SEMINARIO DE MODELOS DE SISTEMAS EDUCATIVOS

Participantes: Mª L. Alvarez, F. Briones, T. Casañas, A. Cristóbal, I. González, Mª C. Martín, J. J. Palacios, V. J. Rubio, M. Sánchez Marcos.

NOTAS PARA LA CONSTRUCCION DE UN MODELO DEMOGRAFICO RELACIONADO CON EL MODELO ECENSE DEL SISTEMA EDUCATIVO. (1ª parte).(*)

Por F. Briones.

NOTA 1 - MODELOS CONTINUOS Y DISCRETOS

El tiempo transcurre de una forma contínua para el observador humano. A cada mínima fracción de segundo sigue otra sin solución de continuidad. Y al transcurrir el tiempo, también la edad de las personas aumenta de forma contínua, siendo, a cada instante que pasa, un instante más viejos.

Pero la mente humana tiene una predisposición notable para discretizar todos los sucesos: El paisaje que pasa ante nuestros ojos desde la ventanilla de un tren en marcha lo hace de una forma contínua, pero rápidamente lo discretizamos, en una serie de instantáneas consecutivas, al ritmo con que pasan los postes del teléfono o de acuerdo con las siempre iguales y siempre cambiantes perspectivas de las hileras de olivos que se extienden hasta el horizonte.

Siendo continuos el tiempo y la edad, el tipo de modelo más apropiado para un estudio demográfico debería ser también contínuo en ambas variables. Pero esto presenta esencialmente dos inconvenientes: En primer lugar, se complica la formulación del modelo mismo, y por tanto los métodos necesarios para utilizarlo (en vez de operaciones aritméticas elementales, aparecerán integrales y derivadas, por ejemplo). En segundo, la

(*) Trabajo realizado para la UNESCO bajo el Contrato nº 277.504

cantidad de información detallada que se necesita es mucho mayor que en el caso discreto, y esa información no nos es generalmente conocida. Debiéndose trabajar con hipótesis más o menos seguras, perdemos la ventaja de la precisión del modelo.

Para hacer el modelo puede discretizarse el tiempo, pero no la edad; puede discretizarse la edad, pero no el tiempo. Y pueden, finalmente, discretizarse ambas variables. La elección de uno u otro tipo de modelo dependerá del tipo de preguntas que queramos contestar con él(1).

El hombre discretizó el tiempo en primer lugar y de forma natural por días solares. En segundo lugar lo hizó por meses lunares que, divididos en cuatro partes (luna nueva, cuarto creciente, luna llena, cuarto menguante) dieron lugar a las semanas. Luego llegó a la discretización por años estacionales. Posteriormente y para fines prácticos se inventaron las subdivisiones del día y para fines cronológicos, las agrupaciones de años.

La enseñanza se realiza generalmente de una forma cíclica, con cursos que, después del letargo del verano, vuelven a reanudarse en los primeros días del otoño. Es lógico pues que los modelos de los sistemas educativos suelan ser discretos, con período de un año(2), aunque para algunos estudios concretos podrían ser interesantes modelos contínuos o discretos con período menor.

El modelo demográfico que queremos construir, al estar ligado al modelo del sistema educativo, no sólo deberá ser discreto para mayor comodidad, sino que además el intervalo de discretización deberá coincidir con el de aquel dentro de lo posible.

Esto no quiere decir que prescindamos por completo del modelo contínuo. Muy al contrario, y sobre todo en estas primeras notas, nos basaremos fundamentalmente en él para construir el discreto y para estudiar la posible forma de solucionar algunos problemas que se nos presentarán.

---

(1) Véase el artículo de D.D. Joshi "Stochastic models utilized in demography" publicado en el tercer volumen de la "World population conference, 1965" por las Naciones Unidas (E/CONF.41/4)

(2) Véase "An Asian model of educational development: perspectives for 1965-80" ED.66/D.33/A, UNESCO 1966 y su modificación, el modelo ECENSE - publicado en 1970 por el Ministerio de Educación y Ciencia de España con el nombre de "Modelo español de desarrollo educativo".

NOTA 2 - EL CONCEPTO DE EDAD EN UN MODELO DISCRETO

Normalmente, cuando se dice que en un instante determinado hay 35.727 personas de 35 años, quiere decirse que hay ese número de personas que han cumplido los 35, pero no los 36.

En algunos países no se utiliza la expresión "tengo 35 años" sino "estoy en mi año 36" para significar exactamente lo mismo.

En algunos casos conviene dar una definición más compleja de población. Supongamos, por ejemplo, un país en el que el curso escolar comience el 1º de octubre, dure nueve meses y haya limitación en la edad de los alumnos para determinados cursos. Supongamos que dicha limitación viene dada porque los alumnos tengan que haber cumplido la edad c antes de que se acabe el curso. Naturalmente, para poder comparar el número de alumnos con el número de personas de dicho país, nos interesará saber la cantidad de personas que en fecha 1º de octubre tienen una edad comprendida entre c años menos nueve meses y c años más tres meses (o mejor $c-0,75$ y $c+0,25$ años). A este número es al que llamaremos Población de edad c en dicha fecha y lo escribiremos

$$P_{0,75}(c, 1/oct/1971)$$

En general, llamaremos

$$P_{\alpha}(c,f)$$

al número de personas de edad comprendida entre $c-\alpha$ y $c+1-\alpha$ en la fecha f.

Hemos supuesto de entrada que la edad se mide en años, pero por supuesto, podría medirse en meses, en lustros o en fracciones de segundo; lo anteriormente expuesto sigue siendo válido con tal de que quede claro cual es la unidad utilizada para discretizar el tiempo.

Si el valor de α está suficientemente claro en el contexto, podrá omitirse como subíndice, escribiéndose simplemente

$$P(c,f)$$

Por otra parte, si el intervalo de edades que nos interesa considerar no es igual a la unidad de tiempo, escribiremos

$$P(c_1, c_2, f)$$

para indicar la población que en la fecha f tenía edades comprendidas entre c_1 y c_2. Como caso particular tendremos

$$P(c-\alpha, c+1-\alpha, f) = P_{\alpha}(c, f)$$

NOTA 3 - RELACION ENTRE POBLACION Y POBLACION DIFERENCIAL

Llamaremos población diferencial a una función Pd(e,f) tal que Pd(e, f) de nos mide la población de edades comprendidas entre e y e de en la fecha f para un incremento diferencial de edad. Tendremos, por tanto, que

$$P(c_1, c_2, f) = \int_{c_1}^{c_2} Pd(e, f)\, de$$

y en particular

$$P_\alpha(c, f) = \int_{c-\alpha}^{c+1-\alpha} Pd(e, f)\, de$$

que, con el cambio de variable $e = c + \beta$ nos da

$$P_\alpha(c, f) = \int_{-\alpha}^{1-\alpha} Pd(c+\beta, f)\, d\beta$$

NOTA 4 - EMIGRANTES

De forma análoga a como hemos hecho antes, diremos que Emd(e,f) es el número diferencial de emigrantes de edad e, en la fecha f si

$$Emd(e, f)\, de\, df$$

nos dá, para incrementos diferenciales de la edad y del tiempo, el número de personas de edades comprendidas entre e y e+de que emigran entre las fechas f y f+df.

Al número total de emigrantes que emigran entre las fechas f y f+t y que en la fecha f tenían edades comprendidas entre c_1 y c_2 le llamaremos $Et(c_1, c_2, f, t)$. Este número podremos ponerlo en función del anterior de forma análoga a como hicimos con la población:

Si en la fecha f tenían la edad comprendida en dicho intervalo, en la fecha $f+v$ la tendrán entre c_1+v y c_2+v. Por tanto

$$Et(c_1, c_2, f, t) = \int_0^t \int_{c_1+v}^{c_2+v} Emd(e, f+v)\, de\, dv =$$

$$= \int_0^t \int_{c_1}^{c_2} Emd(e+v, f+v)\, de\, dv =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \int_0^t Emd(e+v, f+v)\, dv\, de =$$

En particular, si $t = 1$ y $c_2 - c_1 = 1$, tendremos

$$Et(c-\alpha, c+1-\alpha, f, 1) = Et_\alpha(c, f) = \int_{-\alpha}^{1-\alpha} \int_0^1 Emd(c+\beta+v, f+v)\, dv\, d\beta$$

NOTA 5 - INMIGRANTES Y TASA DIFERENCIAL DE MORTALIDAD

Al igual que en la nota anterior, podemos definir un número diferencial de inmigrantes, $Id(c, f)$, y un número total $It(c_1, c_2, f, t)$ relacionados por la fórmula

$$It(c_1, c_2, f, t) = \int_{c_1}^{c_2} \int_0^t Id(e+v, f+v)\, dv\, de$$

Nótese bien que éste es el número total de inmigrantes que han entrado en el país, pero de estos, algunos habrán muerto antes de llegar a la fecha $f+t$, por lo que, a efectos de la contabilidad de personas vivas, debemos descontarlos. Para ello llamaremos $Ird(c, f, t)$ a una función tal que $Ird(c, f, t)\, dc\, df$ es el número de personas de edad comprendidas entre c y c+dc, que entraron durante el intervalo de tiempo (f, f+df) y que siguen vivas en el instante f+t. Llamaremos tasa diferencial de mortalidad a una función Tmd(c+t, f+t) tal que la probabilidad de que una persona que tenga edad c+t en el instante f+t muera entre las fechas f+t y f+t+dt venga dada por Tmd(c+t, f+t) dt.

Tendremos pues que

$$\mathrm{Ird}(c,\ f,\ t+dt)\ dc\ df - \mathrm{Ird}(c,\ f,\ t)\ dc\ df = -\ \mathrm{Ird}(c,\ f,\ t)\ dc\ df\ \mathrm{Tmd}(c+t,\ f+t)\ dt$$

Dividiendo por dc df dt, nos queda la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\ \mathrm{Ird}(c,\ f,\ t)}{dt} = -\ \mathrm{Ird}(c,\ f,\ t)\ \mathrm{Tmd}\ (c+t,\ f+t)$$

cuya solución, teniendo en cuenta que

$$\mathrm{Ird}\ (c,\ f,\ o) = \mathrm{Id}(c,\ f)$$

es

$$\mathrm{Ird}(c,\ f,\ t) = \mathrm{Id}(c,\ f)\ e^{-\int_o^t \mathrm{Tmd}(c+\gamma,\ f+\gamma)\ d\gamma}$$

Esta función es la que tendremos que utilizar en lugar de la Id(c, f) para calcular el número de inmigrantes que entraron entre las fechas f y f+t , que en la fecha f tenían una edad comprendida entre c_1 y c_2 y seguían vivos en la fecha f+t

$$\mathrm{In}(c_1,\ c_2,\ f,\ t) = \int_{c_1}^{c_2}\int_o^t \mathrm{Ird}(e+v,\ f+v,\ t-v)\ dv\ de =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2}\int_o^t \mathrm{Id}(e+v,\ f+v)\ e^{-\int_o^{t-v} \mathrm{Tmd}(e+v+\gamma,\ f+v+\gamma)\ d\gamma}\ dv\ de$$

En particular

$$\mathrm{In}_\alpha(c,\ f) = \int_{-\alpha}^{1-\alpha}\int_o^1 \mathrm{Id}(c+\beta+v,\ f+v)\ e^{-\int_o^{1-v} \mathrm{Tmd}(c+\beta+v+\gamma,\ f+v+\gamma)\ d\gamma}\ dv\ d\beta$$

NOTA 6 - TASA DE SUPERVIVENCIA

De forma análoga a como hemos hecho con los inmigrantes, llamaremos $Prd(c, f, t)$ a una función tal que $Prd(c, f, t)\,dc$ es el número de personas que en la fecha f tenían una edad comprendida entre c y $c+dc$ y que siguen vivas en el instante $f+t$.

Tendremos como antes que

$$Prd(c, f, t+dt)\,dc - Prd(c, f, t)\,dc = -Prd(c, f, t)\,dc\,Tmd(c+t, f+t)\,dt$$

y dividiendo por dc dt:

$$\frac{d\,Prd(c, f, t)}{dt} = -Prd(c, f, t)\,Tmd(c+t, f+t)$$

nos da

$$Prd(c, f, t) = Pd(c, f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma,\, f+\gamma)\,d\gamma}$$

con la condición

$$Prd(c, f, o) = Pd(c, f)$$

La parte de la población de edad comprendida entre c_1 y c_2 en un instante f y que sigue viva en el instante $f+t$ podremos expresarla en la forma siguiente:

$$Pr(c_1, c_2, f, t) = \int_{c_1}^{c_2} Pd(c, f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma,\, f+\gamma)\,d\gamma}\,dc$$

y en particular

$$Pr_\alpha(c, f, 1) = \int_{-\alpha}^{1-\alpha} Pd(c+\beta, f)\,e^{-\int_0^1 Tmd(c+\beta+\gamma,\, f+\gamma)\,d\gamma}\,d\beta$$

Por otra parte, si llamamos ahora tasa de supervivencia a la probabilidad de que una persona de edad comprendida entre c_1 y c_2 en la fecha f siga viva en el instante $f+t$, tendremos

$$Pr(c_1, c_2, f, t) = P(c_1, c_2, f)\,Ts(c_1, c_2, f, t)$$

o bien

$$Pr_{\alpha}(c, t, 1) = P_{\alpha}(c, f)\, Ts_{\alpha}(c, f, 1)$$

Comparando con las fórmulas anteriormente deducidas en esta nota y en la nota 3, tenemos:

$$Ts(c_1, c_2, f, t) = \frac{\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} Pd(c, f)\, e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma,\, f+\gamma)\, d\gamma}\, dc}{\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} Pd(c, f)\, dc}$$

$$Ts_{\alpha}(c, f) = \frac{\displaystyle\int_{-\alpha}^{1-\alpha} Pd(c+\beta, f)\, e^{-\int_0^1 Tmd(c+\beta+\gamma,\, f+\gamma)\, d\gamma}\, d\beta}{\displaystyle\int_{-\alpha}^{1-\alpha} Pd(c+\beta, f)\, d\beta}$$

NOTA 7 - LA ECUACION DE TRANSFERENCIA

Llamaremos ecuación de transferencia a la que nos da la población de edades comprendidas entre $c_1 + t$ y $c_2 + t$ en una fecha $f + t$, en función de la de edades comprendidas entre c_1 y c_2 en la fecha f, los emigrantes y los inmigrantes.

Con las definiciones de las notas anteriores tendremos que

$$P(c_1 + t, c_2 + t), f + t) = Pr(c_1, c_2, f, t) - Em(c_1, c_2, f, t) + In(c_1, c_2, f, t)$$

o si se prefiere

$$P(c_1 + t, c_2 + t, f + t) = P(c_1, c_2, f)\, Ts(c_1, c_2, f, t) - Em(c_1, c_2, f, t) + In(c_1, c_2, f, t)$$

que, como caso particular, nos da:

$$P_{\alpha}(c + 1, f + 1) = P_{\alpha}(c, f)\, Ts_{\alpha}(c, f) - Em_{\alpha}(c, f) + In_{\alpha}(c, f)$$

Hay que notar aquí que pongo en las fórmulas Em para los emigrantes y no Et (emigrantes totales, nota 4) porque si contase aquí a todos los emigrantes, tanto si mueren como si siguen viviendo después de emigrar, estaría descontando a algunos dos veces: una vez porque mueren y otra porque emigran. La Em que hemos de poner aquí es análoga a la In de la nota 5 .

$$Em(c_1, c_2, f, t) = \int_{c_1}^{c_2} \int_0^t Emd(e+v, f+v)\, e^{-\int_0^{t-v} Tmd(e+v+\gamma,\, f+v+\gamma)\, d\gamma}\, dv\, de$$

$$Em_\alpha(c, f) = \int_{-\alpha}^{1-\alpha} \int_0^1 Emd(c+\beta+v, f+v)\, e^{-\int_0^{1-v} Tmd(c+\beta+v+\gamma,\, f+v+\gamma)\, d\gamma}\, dv\, d\beta$$

NOTA 8 - MIGRANTES Y VISITANTES

Llamaremos migrantes a la diferencia entre inmigrantes y emigrantes en todas sus acepciones:

Número diferencial de Migrantes	Md = Id - Emd
Número total de Migrantes	Mt = It - Et
Migrantes netos	Mn = In - Em

Llamaremos visitantes a aquellos inmigrantes (o emigrantes) que permanecen por poco tiempo en el país de llegada (por vacaciones o por negocios) convirtiéndose después de un cierto tiempo en emigrantes (o inmigrantes).

Desde el momento en que el modelo demográfico nos interesa en relación con un modelo educativo, no parece que el movimiento de visitantes nos deba importar mucho (a menos que todo esté incluído en un modelo más general y nos interese calcular los ingresos monetarios del país). Los que nos interesan son los migrantes cuya intención es cambiar su domicilio de forma permanente.

Puede argüirse que siendo exactas, como lo son, las fórmulas utilizadas hasta ahora (todavía no hemos hecho ninguna aproximación) tanto para el modelo contínuo como para el discreto, basta utilizarlas, que ya ellas se encargarán de eliminar a los visitantes indeseables, ya que estarán contados tanto entre los inmigrantes como entre los emigrantes. Sin embargo, esto no es cierto, como veremos con el siguiente ejemplo:

Supongamos un país en el que todos los inmigrantes son turistas que vienen a pasar sus vacaciones, y que estas vacaciones son exactamente de un mes. La tabla de inmigrantes-emigrantes por meses podría ser algo así:

	I	E	M
Dic. 68	1.020.000	1.010.000	10.000
Ene. 69	1.030.000	1.020.000	10.000
Feb. 69	1.040.000	1.030.000	10.000
Mar. 69	1.050.000	1.040.000	10.000
Abr. 69	1.060.000	1.050.000	10.000
May. 69	1.360.000	1.060.000	300.000
Jun. 69	1.660.000	1.360.000	300.000
Jul. 69	1.960.000	1.660.000	300.000
Ago. 69	2.260.000	1.960.000	300.000
Sep. 69	1.660.000	2.260.000	-600.000
Oct. 69	1.060.000	1.660.000	-600.000
Nov. 69	1.070.000	1.060.000	10.000
Dic. 69	1.080.000	1.070.000	10.000
Ene. 70	1.090.000	1.080.000	10.000

En este país, y a pesar de que todos los inmigrantes que entran, salen al mes siguiente el número neto de migrantes durante 1969 es de 60.000 personas debido al hecho de que el número de turistas que vienen a visitarlo aumenta de forma continua.

Además de este efecto, los visitantes producen otro que también queda reflejado en la tabla: Una gran irregularidad en su distribución a lo largo del año. En un país de tipo mediterráneo, por ejemplo, habrá muchos más turistas en verano que en invierno.

Para evitar estos inconvenientes llamaremos de ahora en adelante migrantes, inmigrantes y emigrantes a aquellos cuyos desplazamientos se efectúan con intención de afincarse en el país de llegada, y supondremos que de una u otra manera conocemos su número, excluyendo de nuestro modelo a los que hemos llamado visitantes[1].

---

(1) En este contexto pueden verse las páginas 17 a 19 del libro de Richard Stone "Demographic accounting and model-building" publicado en Paris en 1971 por la OECD en su serie "Education and development technical reports".

NOTA 9 - HIPOTESIS SOBRE LA CONSTANCIA DE LA TASA DIFERENCIAL DE MORTALIDAD

Haremos ahora la hipótesis de que la tasa diferencial de mortalidad se mantiene prácticamente constante durante el intervalo de tiempo y para el intervalo de edades que se consideran, es decir que

$$\mathrm{Tmd}\,(c+\gamma\,,\, f+\gamma) = \mathrm{Tmd}\,(c_1,\, c_2,\, f,\, t)$$

De la definición de tasa de supervivencia obtendremos

$$\mathrm{Ts}(c_1, c_2, f, t) = \frac{\displaystyle\int_{c1}^{c2} \mathrm{Pd}(c, f)\, e^{-\int_0^t \mathrm{Tmd}\,(c+\gamma\,,\, f+\gamma)\, d\gamma}\, dc}{\displaystyle\int_{c1}^{c2} \mathrm{Pd}(c, f)\, dc} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{c1}^{c2} \mathrm{Pd}(c, f)\, e^{-t\,\mathrm{Tmd}\,(c_1,\, c_2,\, f,\, t)}\, dc}{\displaystyle\int_{c1}^{c2} \mathrm{Pd}\,(c, f)\, dc} =$$

$$= e^{-t\,\mathrm{Tmd}\,(c_1,\, c_2,\, f,\, t)}$$

de donde

$$\mathrm{Tmd}(c_1, c_2, f, t) = -\frac{\ln \mathrm{Ts}(c_1, c_2, f, t)}{t}$$

Llamando ahora tasa de mortalidad a la función

$$\mathrm{Tm}(c_1, c_2, f, t) = 1 - \mathrm{Ts}(c_1, c_2, f, t)$$

y como el logaritmo neperiano de 1-c puede aproximarse, para valores pequeños de c , mediante la expresión $-(c + c^2/2)$, nos quedará:

$$\mathrm{Tmd}(c_1, c_2, f, t) = \frac{\mathrm{Tm}(c_1, c_2, f, t)\,(1 + 0.5\,\mathrm{Tm}(c_1, c_2, f, t))}{t}$$

y por tanto:

$$\frac{Tm(c_1, c_2, f, t)}{Tmd(c_1, c_2, f, t)} = \frac{t}{1 + 0.5\, Tm(c_1, c_2, f, t)}$$

que se puede aproximar mediante

$$\frac{Tm(c_1, c_2, f, t)}{Tmd(c_1, c_2, f, t)} = t(1 - 0.5\, Tm(c_1, c_2, f, t)) = t\ \frac{1 + Ts(c_1, c_2, f, t)}{2}$$

NOTA 10 - HIPOTESIS SOBRE LA LINEARIDAD DEL NUMERO DIFERENCIAL DE MIGRANTES Y SUS CONSECUENCIAS SOBRE LA ECUACION DE TRANSFERENCIA.

Supondremos ahora, una vez excluídos los visitantes temporales (Nota 8), que los números diferenciales de inmigrantes y emigrantes varían linealmente dentro de los intervalos de edad y tiempo considerados. Llamando $c = e - c_1$, tendremos para el número diferencial de inmigrantes que

$$Id(e+v, f+v) = Id1(c_1, c_2, f, t) + v\, Id2(c_1, c_2, f, t) + c\, Id3(c_1, c_2, f, t)$$

y por tanto

$$It(c_1, c_2, f, t) = \int_0^{c_2 - c_1} \int_0^t (Id1 + v\, Id2 + c\, Id3)\, dv\, dc =$$

$$= (c_2 - c_1)\, t\, Id1 + (c_2 - c_1) \frac{t^2}{2}\, Id2 + \frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\, t\, Id3$$

donde, por comodidad, hemos prescindido de los subíndices.

Teniendo en cuenta (Nota 9) que

$$e^{-\int_0^{t-v} Tmd(e+v+\gamma,\ f+v+\gamma)\, d\gamma} \doteq e^{(v-t) Tmd(c_1, c_2, f, t)}$$

tendremos

$$\ln(c_1,\ c_2,\ f,\ t) \ = \int_{o}^{c_2-c_1}\int_{o}^{t} (Id\,1 + v\,Id\,2 + c\,Id\,3)\ e^{(v-t)Tmd}\ dv\ dc \ =$$

$$= (c_2 - c_1)\ Id\,1 \left[\frac{e^{(v-t)\,Tmd}}{Tmd} \right]_o^t + (c_2 - c_1)\,Id\,2 \left[\frac{v\,e^{(v-t)Tmd}}{Tmd} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{(v-t)Tmd}}{Tmd^2} \right]_o^t + \frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\ \ Id\,3 \left[\frac{e^{(v-t)\ Tmd}}{Tmd} \right]_o^t =$$

$$= (c_2 - c_1)Id\,1\ \frac{1-e^{-t\,Tmd}}{Tmd} + (c_2 - c_1)\,Id\,2 \left(\frac{t}{Tmd} - \frac{1-e^{-t\ Tmd}}{Tmd^2} \right)$$

$$\frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\ \ Id\,3\ \ \frac{1-e^{-\,t\ Tmd}}{Tmd} \ =$$

$$= (c_2 - c_1)\,Id\,1\ \frac{1 - Ts}{Tmd} + (c_2 - c_1)\ Id\,2 \left(\frac{t}{Tmd} - \frac{1 - Ts}{Tmd^2} \right) + \frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\ Id3\ \frac{1 - Ts}{Tmd} =$$

$$= (c_2 - c_1)\,Id\,1\ \ \frac{t(1 + Ts)}{2} + (c_2 - c_1)\ \ Id\,2 \left(\frac{t}{Tmd} - \frac{t\ (1 + Ts)}{2\ Tmd} \right) +$$

$$+ \ \ \frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\ Id\,3\ \ \frac{t(1 + Ts)}{2} \ \ =$$

$$= (c_2 - c_1)\,Id\,1\ \ \frac{t(1+ Ts)}{2} + (c_2 - c_1)\ Id\ 2\ \frac{t}{2} \left(\frac{1\ -\ Ts}{Tmd} \right) + \frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\ \ Id\,3\ \frac{t(1+ Ts)}{2} =$$

$$= \left[(c_2 - c_1)\,t\,Id\,1 + (c_2 - c_1)\ \frac{t^2}{2}\ Id\,2 + \frac{(c_2 - c_1)^2}{2}\ t\ Id\ 3 \right]\ \ \frac{1 + Ts}{2} \ \ =$$

$$= \ It\ (c_1,\ c_2,\ f,\ t)\ \ \frac{1 + Ts(c_1,\ c_2,\ f,\ t)}{2}$$

Fórmulas análogas obtendríamos para los emigrantes, por lo que la ecuación de transferencia podremos ponerla en la forma

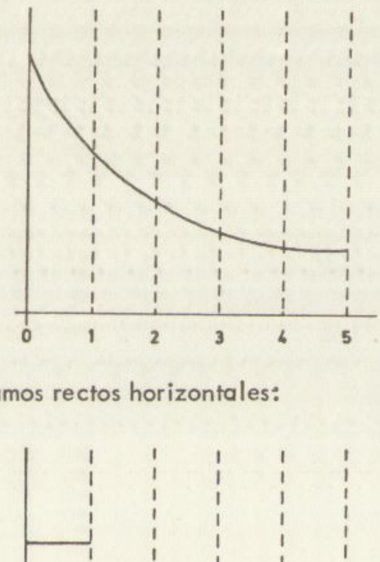
$$P(c_1+t,\ c_2+t,\ f+t) = P(c_1, c_2, f)\ Ts(c_1, c_2, f, t) + (It(c_1, c_2, f, t) - Et(c_1, c_2, f, t)\ \frac{1+Ts(c_1, c_2, f}{2}$$

y en particular

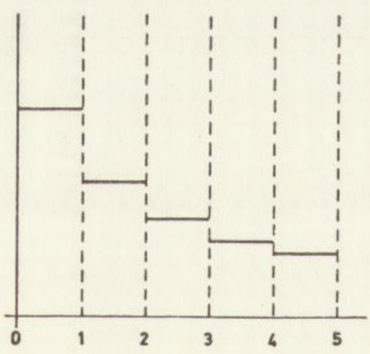
$$P_\alpha(c+1,\ f+1) = P_\alpha(c,f)\ Ts_\alpha(c,f) + (It_\alpha(c,f) - Et_\alpha(c,f))\ \frac{1+Ts_\alpha(c,f)}{2}$$

NOTA 11 - ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS HIPOTESIS ANTERIORES

La hipótesis de constancia de una función, tal como hemos hecho en la Nota 9 para la tasa de mortalidad, supone sustituir la curva real



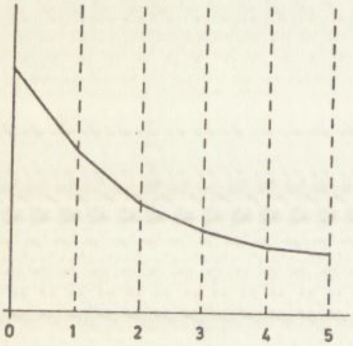
por una serie de tramos rectos horizontales:

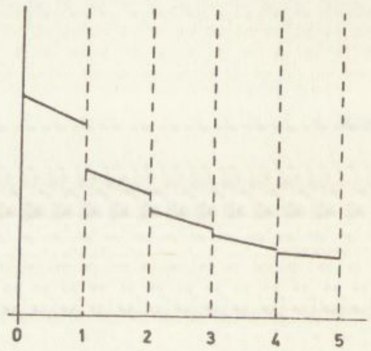


Esta hipótesis será más o menos aceptable según sea la curva que aproximemos.

La constancia de la tasa de mortalidad con respecto a la edad, en intervalos de un año, parece suficientemente buena salvo la excepción, que estudiaremos más adelante, de los recien nacidos. Su constancia con respecto al tiempo, también en intervalos de un año, parece asimismo aceptable salvo en ocasiones de tipo catastrófico y suponiendo que sean desdeñables las variaciones estacionales (sería interesante un estudio estadístico en este sentido).

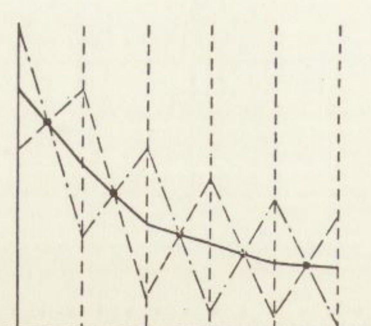
La hipótesis de linearidad de una función, tal como hemos hecho en la Nota 10 para las migraciones, supone la sustitución de la curva real por una serie de tramos también rectos, pero no necesariamente horizontales.





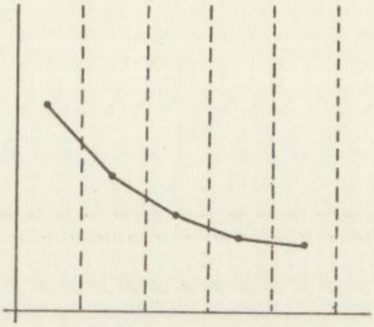
Cada uno de estos tramos puede, o no, empalmar con los anteriores, aunque lo normal será lo primero.

Supuesto que de la función conozcamos sólo su integral en cada uno de los intervalos, el trazado de esos segmentos rectos podrá hacerse de una infinidad de maneras, ya que de cada uno de ellos solo conoceremos un punto (el valor en el centro del intervalo, que será igual a la integral dividida por su anchura). Si suponemos que los segmentos empalman, el grado de indeterminación será menor, pero seguirá habiendo infinitas soluciones, dependiendo del valor que asignemos a la función en el punto cero.



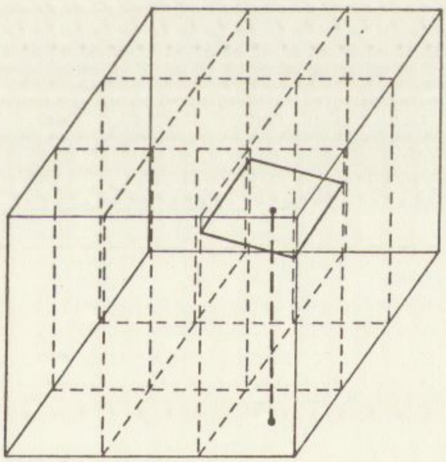
Normalmente, la solución que nos interesará será la más suave, la que tenga menos oscilaciones. Pero aún aquí queda una indeterminación y ésta es qué es lo que entendemos por "más suave".

Si unimos entre sí los puntos centrales mediante segmentos rectos,



diremos que la solución "más suave" es aquella que en los extremos de los intervalos se separa menos, en el sentido de los mínimos cuadrados, de esta aproximación.

Por desgracia, esto que decimos es aplicable sólo a funciones de una sola variable, ya que para funciones de dos variables, como la que nos ocupa, al -



tener que determinar la sección plana correspondiente a uno de los paralelepípedos, será conocido no sólo el punto central (valor de la integral doble, partido por área de la base) sino dos de los lados, que habrán quedado fijados (si se quiere continuidad) al determinar las secciones planas de los paralelepípedos adyacentes. Como un plano queda determinado por una recta y un punto o por dos rectas que se cortan, resultará que en general no habrá solución al tener prefijadas dos rectas y un punto.

Las soluciones "más contínuas" que se pueden esperar en este caso serán aquellas en las que las secciones planas vengan determinadas por su punto central y por que coincidan con las adyacentes en el centro de sus lados.

En este caso, como en el de una sola variable, también hay infinitas soluciones, interesándonos la "más suave" con una interpretación análoga a la de aquel.