

CREACION DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL ESTUDIO DE TRANSITORIOS

Por R. Marqués Fernández (*)

Tercera parte

Introducción. El estudio de la transmisión de calor forma parte importante de cálculo en el diseño de plantas industriales. Concretamente, la transmisión de calor por conducción, aparece de una manera preponderante en el estudio de la distribución de temperaturas de un sólido atravesado por un flujo de calor. Se trata, por consiguiente, de integrar la ecuación de Fourier.

Sin embargo la ecuación de Fourier sólo puede ser integrada analíticamente, en algunos casos, y aun en otros, las ecuaciones analíticas resultantes son de una extremada complejidad que hace muy laborioso el cálculo de las temperaturas. Aparece pues, la conveniencia de desarrollar métodos numéricos de integración y su consiguiente programación en lenguaje fortran, aun en los casos en que exista solución analítica.

(*) Trabajo realizado con beca de ayuda a la investigación del Fondo IBM (Equipo formado por R. Marqués Fernández, M. Llorens Morraja, L. Jutglar Banyeres, M. Villarrubia López, A. L. Miranda Barreras, J. L. González Vicente, C. Franco Peral, J. Guztresa Colomer, G. Franco González; de la Cátedra de Física Industrial de la Facultad de Ciencias. Barcelona).

En una primera etapa hemos efectuado el estudio de la transmisión de calor en régimen transitorio en una pared plana, y con una sola dirección de propagación. Desde el punto de vista teórico existen dos posibilidades según se proponga un valor finito (real) o infinito para los coeficientes de convección. También puede ampliarse el estudio introduciendo un término de generación de calor. Dejaremos para un posterior informe el estudio de los casos en los que se tenga en cuenta la convección y la generación de calor.

Desarrollo Teórico

Solución analítica. La ecuación de transmisión de calor por conducción en régimen no estacionario es de la forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

siendo α una característica del cuerpo llamada difusibilidad térmica.

Como hemos indicado en la introducción, nos ceñiremos al caso de la transmisión de calor monodireccional; con lo cual la ecuación (1) queda en la forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2)$$

Es importante delimitar las condiciones de contorno. Llamaremos θ_a a la temperatura de interior del horno, y θ_b a la temperatura del exterior. Consideraremos el espesor de la pared como ϵ . Llamaremos $\theta_{x=0}$ a la temperatura de la pared interna y $\theta_{x=\epsilon}$ a la temperatura de la pared externa, como puede apreciarse en la fig. 1

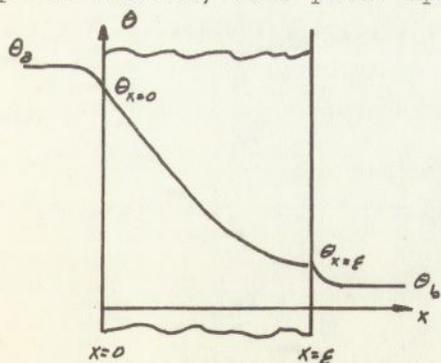


Fig. 1

Las pequeñas caídas de temperatura, $\theta_a - \theta_{x=0}$ y $\theta_{x=\ell} - \theta_b$ son debidas a la convección del interior con la pared y de la pared con el exterior. Estas caídas vendrán determinadas por las ecuaciones:

$$h_a (\theta_a - \theta_{x=0}) = -k \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (3)$$

y

$$-k \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=\ell} = h_b (\theta_{x=\ell} - \theta_b) \quad (4)$$

Si suponemos, en una primera aproximación, que el factor controlante es el de conducción, las condiciones de contorno las podemos expresar mediante el siguiente esquema:

Para $t = 0$

$$\theta = \theta(x) \quad \underline{1^a \text{ condición}}$$

Y para cualquier tiempo:

$$\theta_{x=0} = \theta_a$$

$$\theta_{x=\ell} = \theta_b \quad \underline{2^a \text{ condición}}$$

Proponemos que la solución de la ecuación (2) sea igual al producto de dos funciones, una del tiempo y otra de la dirección de propagación. Es decir:

$$\theta(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Derivando y sustituyendo en (2) queda:

$$X \cdot \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Ecuación que puede ponerse en la forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (5)$$

Ambos miembros de la igualdad (5), deben ser constantes. Constante que llamaremos $-\omega^2$. De esta manera resulta que la derivada de T respecto al tiempo es:

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha \omega^2 T$$

y la solución una exponencial de la forma:

$$T = e^{-\alpha \omega^2 t} \quad (6)$$

Y la derivada segunda de X respecto a la dirección vale:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\omega^2 X$$

y la solución una función trigonométrica, que podría ser tanto en senos como en cosenos; la combinación lineal de ambas posibilidades sería una solución general de mayor amplitud. El valor de X lo expresaremos, pues, como:

$$X = a \cos \omega x + b \sin \omega x \quad (7)$$

Según (6) y (7) la solución de la ecuación (2) será

$$\theta_w = X.T = C^{-\alpha \omega^2 t} (a \cos \omega x + b \sin \omega x)$$

Sin embargo no existe un ω única, por lo cual podemos pensar en una solución más general que sería de la forma:

$$\theta_w = \sum C^{-\alpha \omega_n^2 t} (A_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x) \quad (8)$$

En régimen estacionario debe cumplirse que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

y esta ecuación integrada, da lugar a una caída lineal de temperaturas. La solución estacionaria, que representaremos por θ_s , vendrá dada por la expresión:

$$\theta_s = C + Dx$$

Evidentemente, la solución estacionaria cumple con la ecuación de Fourier, por tanto la solución total y definitiva, presenta la forma

$$\theta = C + Dx + \sum e^{-\alpha w_n^2 t} (A_n \cos w_n x + b_n \operatorname{sen} w_n x) \quad (9)$$

Para $t=0$, la ecuación (9) queda:

$$\theta_b = C + Dx + (\sum \theta_w)_{t=0} \quad (10)$$

en el supuesto que la distribución inicial de temperatura sea constante y coincida con la temperatura ambiente. La parte estacionaria, lineal, tiene por ordenada en el origen θ_a y pendiente

$$-\frac{\theta_a - \theta_b}{\epsilon}$$

Sustituyendo los valores anteriores en (10) y ordenando convenientemente obtendremos:

$$\theta_b - \theta_a + \frac{\theta_a - \theta_b}{\epsilon} x = \sum A_n \cos w_n x + b_n \operatorname{sen} w_n x \quad (11)$$

La parte lineal de la ecuación (11) desarrollada en serie de Fourier, nos permite calcular los coeficientes de dicho desarrollo cuyos valores serán:

$$b_n = -\frac{2(\theta_a - \theta_b)}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \quad A_n = 0$$

Siendo el valor de $w_n = \frac{n\pi}{\epsilon}$.

Resumiendo la ecuación (8) quedará de la forma:

$$\theta = \theta_a - \frac{\theta_a - \theta_b}{\epsilon} b \cdot x - \frac{2(\theta_a - \theta_b)}{\pi} \sum e^{-\alpha w_n^2 t} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n \frac{\pi}{\epsilon} \cdot x)$$

Método numérico desarrollado para el estudio del problema propuesto.

Podemos abordar el estudio del transitorio de temperatura en la pared de espesor de un horno mediante métodos numéricos.

Sea la ecuación

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (12)$$

Con las condiciones de contorno:

$$\theta(0,t) = \theta_a \quad \text{y} \quad \theta(\epsilon,t) = \theta_b \quad \text{para todo } t$$

supongamos la existencia de una distribución inicial de temperaturas

$$\theta(x) = f(x) \quad \text{para} \quad t = 0$$

Consideremos la pared dividida en n secciones, espaciadas

por un intervalo h (fig. 2)

Consideremos un espaciado k para el tiempo t .

Podemos escribir entonces para la sección i , en el instante j

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{h^2} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{k}$$

de lo cual la ecuación (12) finita será:

$$\alpha \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{k}$$

tomando $\lambda = \frac{k \cdot \alpha}{h^2}$ resulta

$$\lambda \cdot (\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}) = \theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}$$

de lo cual la ecuación diferencial (12) reducida a un sistema lineal de $n-1$ ecuaciones para cada intervalo de tiempo j .

$$-\lambda \cdot \theta_{i+1,j} + (1+2\lambda) \theta_{i,j} - \lambda \theta_{i-1,j} = \theta_{i,j-1} \quad (14)$$

$$i=1, \dots, n-1$$

entonces que las condiciones de contorno serán:

$$\theta_{0,j} = \theta_a \quad \theta_{n,j} = \theta_b \quad \text{para } j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

y la distribución inicial de temperaturas:

$$\theta_{i,0} = f(x_i) \text{ para } j = 0 \text{ siendo } x_i = ih \quad (16)$$

Resolución del sistema de ecuaciones lineales resultante

Tal como indica el sistema (14) para determinar la distribución de temperaturas a lo largo de la pared en un determinado instante j partiremos de la distribución de temperaturas previamente calculada en el instante $(j-1)$ y procederemos a la resolución del sistema de ecuaciones lineales (14). La matriz asociada a este sistema presenta un gran número de elementos nulos lo cual aconseja usar un método de tipo iterativo (Gauss-Seidel) frente a métodos de eliminación (Gauss-Jordan), lo cual lleva consigo una considerable ahorro de memoria en el momento de proceder a la resolución de dicho sistema mediante un ordenador. Por otra parte los métodos iterativos presentan en general ventajas frente a los de eliminación en cuanto los errores de redondeo producidos durante el proceso de cálculo son menores en los primeros que en los segundos.

Los siguientes puntos constituyen las metas inmediatas a alcanzar en el estudio de este problema:

- a) Desarrollar un método para trabajar a intervalos de tiempo desiguales a fin de obtener niveles de temperatura.
- b) Modificar los métodos de iteración empleados para obtener una convergencia más rápida mediante factores de aceleración.
- c) Analizar el caso en el cual se presentan caídas de temperatura apreciables debidas a la aparición de coeficientes de convección en las paredes del horno.



FACULTAD DE INFORMÁTICA
BIBLIOTECA

Nomenclatura

- t tiempo en hr.
- α difusibilidad térmica, su valor es k/c .
- c calor específico, en Kcal/hr.Kg.
- ρ densidad en Kg/m.
- k conductividad térmica de la pared, en Kcal/°C.m.hr.
- θ temperatura, en °C.
- $\theta_{x=0}$ temperatura de la pared interna, en °C
- $\theta_{x=\delta}$ temperatura de la pared externa, en °C
- θ_a temperatura del fluido caliente, en °C
- θ_b temperatura del fluido frío (ambiente), en °C
- $\theta(x)$ distribución inicial de temperaturas en °C
- θ_s temperatura estacionaria, en °C
- θ_ω temperatura transitoria, en °C
- h_a coeficiente individual de transmisión de calor del fluido interior-pared, en Kcal/°C.m.hr.
- h_b coeficiente individual de transmisión de calor por convección de la pared-fluido exterior, en Kcal/°C.m.hr.
- δ espesor de la pared en m.

Bibliografía

- Mc Cracken, D.D. + Dorn, W.S.- Métodos numéricos y programación FORTRAN. Limusa-Wiley S.A. México. 1967.
- Sadosky, M.- Cálculo numérico y gráfico. Ediciones Librería del Colegio. Buenos Aires. 1962.
- Stiefel, E.- Introducción a la matemática numérica. Editorial Labor S.A. Barcelona. 1966.
- Pipes, L.A. y Harvill, L.R.- Applied Mathematics for engineers and physicists. Mc Graw-Hill, New York. 1970.
- Shao Ti Hsu.- Engineering Heat Transfer. Van Nostrand. New York. 1963.
- Gröber-Erk-Grigull.- Transmisión de calor. Selecciones científicas. Madrid. 1967.
- Kern, D.Q.- Process Heat Transfer. McGraw-Hill. New York. 1950.
- Jacob, Max. Heat Transfer. John Wiley and Sons, Inc. New York. 1965.

Informe complementario a la Tercera Parte

Introducción.-

En nuestros anteriores informes presentamos la resolución de transitorios por el método de Runge-Kutta. Es ahora nuestro propósito abordarlos por el método predictor-Corrector de Hamming y a fin de poder comparar los resultados obtenidos en cada caso, resolveremos exactamente el mismo problema que se planteó a modo de ejemplo en el informe correspondiente a los meses de Octubre-Noviembre.

EXTRACTO DEL METODO PREDICTOR-CORRECTOR DE HAMMING.-

Para integrar un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado con la mayor aproximación posible, tenemos que emplear un método iterativo, lo que lleva consigo un gran número de operaciones.

El método de Hamming nos libra parcialmente de esta contrariedad por ser un método predictor-corrector abreviado.

Sea la ecuación diferencial, $y' = f(x,y)$ con la condición inicial $y_0 = y(x_0)$; el valor de "y" en el paso de cálculo $n+1$ viene dado por la expresión:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y'_{n-1} h + \dots + a_p y'_{n-p} h + (b_{-1} y'_{n+1} + b_0 y'_n + \dots + b_p y'_{n-p}) h + E_n \quad (1)$$

en donde $h = x_{i+1} - x_i$ y E_n es el error en la determinación de y_{n+1} debido a los errores de truncamiento y redondeo.

Por lo que para determinar el valor de y_{n+1} debemos conocer y_i para todo $n-p \leq i \leq n$ e y'_i para todo $n-p \leq i \leq n+1$.

En general un método iterativo constaría de las siguientes etapas

- 1). Predecir un valor de "y" para $x = x_{n+1}$ que designaremos por y_{n+1}^* .
- 2). Usando la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con $y = y_{n+1}^*$ determinaremos $f(x, y_{n+1}^*) = y'_{n+1}$ y en particular y'_{n+1} .
- 3). Con este valor de y'_{n+1} en (1) en lugar de y'_{n+1} determinar un nuevo valor de y_{n+1} .

Deberá repetirse el cálculo hasta que y_{n+1} esté determinado con el error requerido.

Tomando las fórmulas de interpolación de Newton podemos predecir para y_{n+1} el valor

$$y_{n+1}^* = y_{n-3} + \frac{4}{3} h (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) + \frac{14}{15} h^5 y'' (\xi) \quad (2)$$

y obtener

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*) \quad (3)$$

Milne da como nuevo valor de y_{n+1} (corrector), de acuerdo con las fórmulas de Newton antes también utilizadas

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}) \quad (4)$$

Designaremos a

y_{n+1}^* por p_{n+1} y a y_{n+1} por c_{n+1} de

forma que la diferencia será $y_{n+1}^* - y_{n+1} \approx k(p_n - c_n)$

Pues $p_n - c_n$ es el error inicial del paso anterior

Podremos reducir, en parte la repetición del proceso, introduciendo el concepto de modificador.

Si en lugar de y_{n+1}^* para determinar $y_{n+1}' = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ utilizamos $y_{n+1}' = f(x_{n+1}, y_{n+1}^* - k(p_n - c_n))$, y_{n+1}' estará más cerca del valor verdadero y_{n+1}' .

Pues por lo menos hemos sustraído a y_{n+1}^* el error que se cometió para su evaluación en el paso precedente, que será bastante próximo al que se cometería en este paso, siempre que h no sea excesivamente grande.

A la cantidad $y_{n+1}^* - k(p_n - c_n)$ la llamamos modificador y la designamos por m_{n+1} y a $f(x_{n+1}, m_{n+1})$ por m'_{n+1} .

El proceso completo será pues

1. Determinar un valor aproximado de y_{n+1} que denominaremos p_{n+1}
2. Determinar $m_{n+1} = p_{n+1} - k(p_n - c_n)$
3. Determinar $m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$
4. $c_{n+1} = f$ (términos conocidos, m'_{n+1})
5. $y_{n+1} = c_{n+1} + k(p_{n+1} - c_{n+1})$

Donde p_{n+1} es el predictor, m_{n+1} es el modificador y c_{n+1} es el corrector en el paso de cálculo $n+1$.

En el método de Milne-Hamming las ecuaciones correspondientes a estas etapas son

$$p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2y_n' - y_{n-1}' + 2y_{n-2}')$$

$$m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{11h^2}{12l} (p_n - c_n)$$

$$m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{8} \left[9y_n - y_{n-2} + 3h (m'_{n+1} + 2y_n' - y_{n-1}') \right]$$

$$y_{n+1} = c_{n+1} + \frac{9}{12l} (p_{n+1} - c_{n+1})$$

PROBLEMA DE CALCULO

Recordemos que el transitorio resuelto por Runge-Kutta en el primer informe y que ahora abordamos por Hamming es una ecuación del tipo:

$$A \frac{d^2 z}{dt^2} + B \frac{dz}{dt} + Cz + D = 0$$

con $z = z(t)$, A, C, D, constantes y $B = k \cdot \left| \frac{dz}{dt} \right|$

que con un oportuno cambio de variables resulta,

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \beta z_2 |z_2| + \gamma z_1 + \theta$$

donde β , γ y θ , son a su vez constantes a las que damos, al igual que entonces, los valores $\beta = 0.10451$; $\gamma = -0.48995 \cdot 10^{-4}$; $\theta = 0$ con las siguientes condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad z_1)_0 = 7,66 \quad \text{y} \quad z_2)_0 = -0,0599$$

OBSERVACIONES

El límite superior del error admisible PRMT (4) ha tendido que ser reducido a fin de que el número de bisecciones no supere las 10 permitidas por el programa.

Así mientras que el método de Runge-Kutta admitía para este parámetro un valor de 5 millonésimas, el de Hamming para un mismo intervalo de integración requiere un valor superior. El programa que se presente opera con un PRMT(4) igual a una milésima.

Bibliografía

- STREETER, V.L. Fluid Mechanics McGraw-Hill. New York -1966.
- RALSTON, A.-WILF, H.S. Mathematical Methods for digital computers. Johns Wiley and Sons. New York. 1967.
- MILNE, W.E. Numerical Solution of differential equations. John Wiley and Sons. New York. 1953.
- I.B.M. Application Program. System 1360. Scientific sub-routine Package. Version III. Programmer's Manual. Fifth Edition. 1970.

Cuarta parte

1. Introducción.- En el informe anterior, correspondiente al mes de enero, se presentó el estudio de la transmisión de calor en régimen no-estacionario a través de la pared de un horno, analítica y numéricamente. En el presente informe trataremos sobre las modificaciones a introducir en el método numérico a fin de mejorar su aplicación práctica.

2. DESARROLLO NUMÉRICO (1) .- Podemos abordar el estudio del transitorio de temperatura en la pared de espesor ϵ de un horno mediante métodos numéricos.

Sea la ecuación

$$\alpha \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \quad (12)$$

(1) Para mayor comodidad del lector, se cree apropiado repetir brevemente el planteo numérico del problema propuesto, así como continuar con la misma notación y numeración de fórmulas que el informe anterior (Enero).

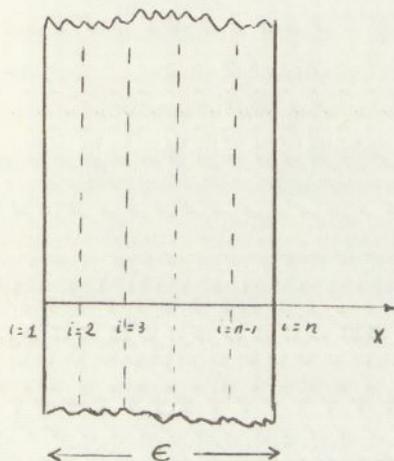
Con las condiciones de contorno:

$$\theta(0, t) = \theta_a \quad \theta(\epsilon, t) = \theta_b \text{ para todo } t$$

y supongamos de una distribución inicial de temperaturas

$$\theta(x) = f(x) \text{ para } t = 0$$

Consideremos la pared dividida en n secciones, espaciadas por un intervalo h (Fig 2)



Consideremos un espaciado k para el tiempo t .

Podemos escribir entonces para la sección i , en el instante j

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{k} \quad (13)$$

Con lo cual la ecuación (2), en diferencias finitas será:

$$\alpha \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{k}$$

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha}{h^2}$ resulta

$$\lambda (\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}) = \theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}$$

Con lo cual la ecuación diferencial (2) reducida a un sistema lineal de $n-1$ ecuaciones para cada intervalo de tiempo j .

$$-\lambda \theta_{i+1,j} + (1+2\lambda) \theta_{i,j} - \lambda \theta_{i-1,j} = \theta_{i,j-1} \quad (14)$$

$$i = 1 \dots n-1$$

Mientras que las condiciones de contorno serán:

$$\theta_{0,j} = \theta_a \quad \theta_{n,j} = 0_b \quad \text{para } j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

y la distribución inicial de temperaturas

$$\theta_{i,0} = f(x_i) \quad \text{para } j = 0 \text{ siendo } x_i = ih \quad (16)$$

3. MODIFICACIONES INTRODUCIDAS.- Al intentar calcular las temperaturas en el régimen transitorio, empleado para ello las ecuaciones (4), nos vemos obligados a escoger un intervalo de tiempo (k) de trabajo, llevando consigo los siguientes problemas:

- a) En primer lugar, debido al desconocimiento a priori de la duración del transitorio, no podemos fijar un intervalo de tiempo k , que se ajuste a nuestras necesidades.
- b) En segundo lugar, fácilmente se puede comprobar que, debido a la propia naturaleza del transitorio, al principio la velocidad de variación de la temperatura para una sección próxima a la cara interna (izqda.) será muy grande, mientras que al cabo de cierto tiempo dicha variación aumentará muy lentamente (ver gráfico 1).

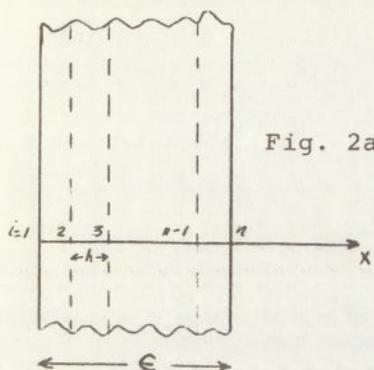
De las observaciones anteriores podemos deducir que si nos interesa conocer el régimen de variación de la temperatura (θ) sin saltos bruscos de la misma, debemos tomar una k relativamente pequeña. Ahora bien, cuando usemos dicho valor de k , a partir de un cierto tiempo obtendremos unas variaciones de temperatura muy pequeñas, eternizándose el proceso de cálculo hasta alcanzar el régimen estacionario. Si por otra parte pretendiésemos economizar tiempo de cálculo y usásemos una k relativamente grande obtendríamos unos saltos de temperatura excesivos sobre todo al inicio del transitorio.

Para solventar las dificultades anteriormente expuestas hemos creído conveniente utilizar un intervalo de tiempo (k) variable a lo largo del estudio del régimen transitorio en función de la diferencia de temperaturas entre dos instantes de tiempo sucesivos j y $(j+1)$ y de la diferencia entre la temperatura calculada para el instante j y la temperatura estacionaria previamente calculada.

4. CONTROL DE LA VARIACION DEL INTERVALO DE TIEMPO(k).-

El control de la variación del intervalo de tiempo (k) se ha realizado de la siguiente manera:

Supongamos la pared del horno dividida en n secciones, tal como indica la fig. 2a.



Sea $\theta_{i,j}$, $i = 1 \dots n$, la distribución de temperaturas en el instante j , la cual se supone conocida y $\theta_{i,j+1}$, $i = 1 \dots n$, la distribución de temperaturas en un instante $j+1$, que pretendemos calcular, verificándose que:

$$t_{j+1} = t_j + k$$

siendo k el valor del intervalo de tiempo de trabajo usado para calcular la distribución de temperaturas $\theta_{i,j}$.

En primer lugar se procede a un cálculo previo de $\theta_{i,j+1}$ utilizando la k anteriormente mencionada y a continuación se selecciona el valor de i para el cual se verifica que el salto de temperatura máxima, es decir se escoge el valor de la sección i para el cual se cumple.

$$|\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}| = \text{máximo}$$

Seguidamente efectuamos la siguiente comparación:

$$\text{cota inferior} < \left| \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\theta_{i,j} - \theta_{i,\text{estacionario}}} \right| < \text{Cota superior}$$

es decir exigimos que el salto relativo de temperaturas entre dos niveles consecutivos correspondientes a la sección i , frente al salto entre este nivel y el estacionario permanezca entre unas ciertas cotas que se pueden fijar según la naturaleza del transitorio.

Llamando

$$p_i = \left| \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\theta_{i,j} - \theta_{i,\text{estac.}}} \right|$$

podemos encontrarnos con los siguientes casos:

a) que se verifique la condición

$$\text{Cota inferior} < p_i < \text{Cota superior}$$

con lo cual, en este caso el intervalo de tiempo de trabajo (k) es el apropiado para las condiciones de nuestro problema y en consecuencia adoptaremos como solución para el instante $j+1$ los valores $\theta_{i,j+1}$ ($i = 1 \dots n$) previamente calculados.

b) que se verifique la condición:

$$p_i > \text{Cota superior}$$

con lo cual, dicha desigualdad nos indica que el salto p_i relativo de temperaturas es demasiado grande y en consecuencia debemos reducir el intervalo de tiempo (k) dividiéndolo por un factor de "frenado" β_1 previamente fijado, con lo cual obtenemos un nuevo valor de k dado por la expresión $k = k/\beta_1$, que utilizamos para volver a calcular el nivel de temperaturas $\theta_{i,j+1}$ ($i = 1 \dots n$). Este proceso se reitera tantas veces como sea necesario hasta que se cumpla la condición:

$$p_i < \text{Cota superior}$$

Al llegar a este punto adoptamos como solución para el instante de tiempo $j+1$, el último nivel de temperaturas calculado:

$$\theta_{i,j+1} \quad (i = 1 \dots n)$$

c) que se verifique la condición:

$$p_i < \text{Cota inferior}$$

con lo cual estamos en el caso contrario del anterior. En este caso debemos aumentar la k tomando como nuevo valor de k el dado por : $k = k \cdot \beta_2$, siendo β_2 un factor de "aceleración" previamente fijado. El proceso de cálculo es completamente análogo al anterior.

Ahora bien, fácilmente puede comprobarse que los valores de los factores β_1 y β_2 han de verificar la condición

$$\beta_1 > \beta_2 > 1$$

a fin de que el proceso sea estable.

5. DESCRIPCION DEL PROGRAMA REALIZADO.

Se ha procedido a la elaboración de un programa para la comprobación de la bondad del método numérico anteriormente expuesto, así como de las mejoras introducidas a efectos de rapidez de computación mediante el control de la variación del intervalo de tiempo (k) de trabajo.

A continuación realizamos la descripción de las variables de entrada y salida de dicho programa, que aún no estando escrito de forma definitiva, calcula el régimen transitorio en el seno de una pared de un horno, con las siguientes características:

Espeor (ϵ) = 25 cm

Difusibilidad térmica (α) = 0,00283 m²/h.

Temperatura pared derecha (θ_a) = 20 °C

Temperatura pared izquierda (θ_b) = 1000°C

Las variables usadas en el programa fueron:

ENTRADA:

k : Valor del intervalo inicial del tiempo de trabajo, prefijado por el usuario. Es necesario hacer notar que sobre este valor no existe en principio ninguna restricción ya que el programa busca por sí mismo el valor de k más apropiado.

ERROR: Máxima diferencia aceptada entre dos resultados consecutivos obtenidos para un mismo nivel de tiempo al resolver el sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Seidel.

TOL: Máxima diferencia admitida para alcanzar el régimen estacionario, dada en tanto por uno. Así diremos que se ha alcanzado el régimen estacionario cuando la diferencia relativa entre todas las temperaturas en un instante j y sus correspondientes estacionarias sea menor que TOL.

DMIN, DMAX: Cotas inferior y superior respectivamente, dadas en tanto por uno, prefijadas por el usuario a fin de proceder al control del intervalo de tiempo de trabajo (k) a lo largo del cálculo.

N: Número de secciones en que se considera dividida la pared para el estudio del régimen transitorio.

E: Espesor de la pared (m)

ALFA: Coeficiente de difusibilidad en m^2/h .

TEMCH: Temperatura ($^{\circ}C$) de la pared derecha que coincide con la temperatura de la pared izquierda antes de encenderse el horno.

TEMED: Temperatura ($^{\circ}$) que adquiere la pared del horno al encenderse éste.

BETA 1, BETA 2: Factores de "frenado" y "aceleración" respectivamente.

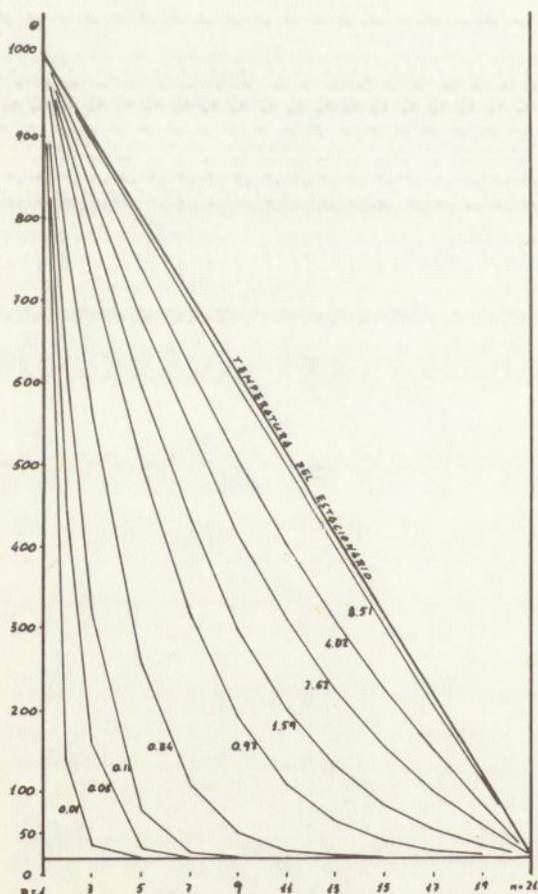


Gráfico 1

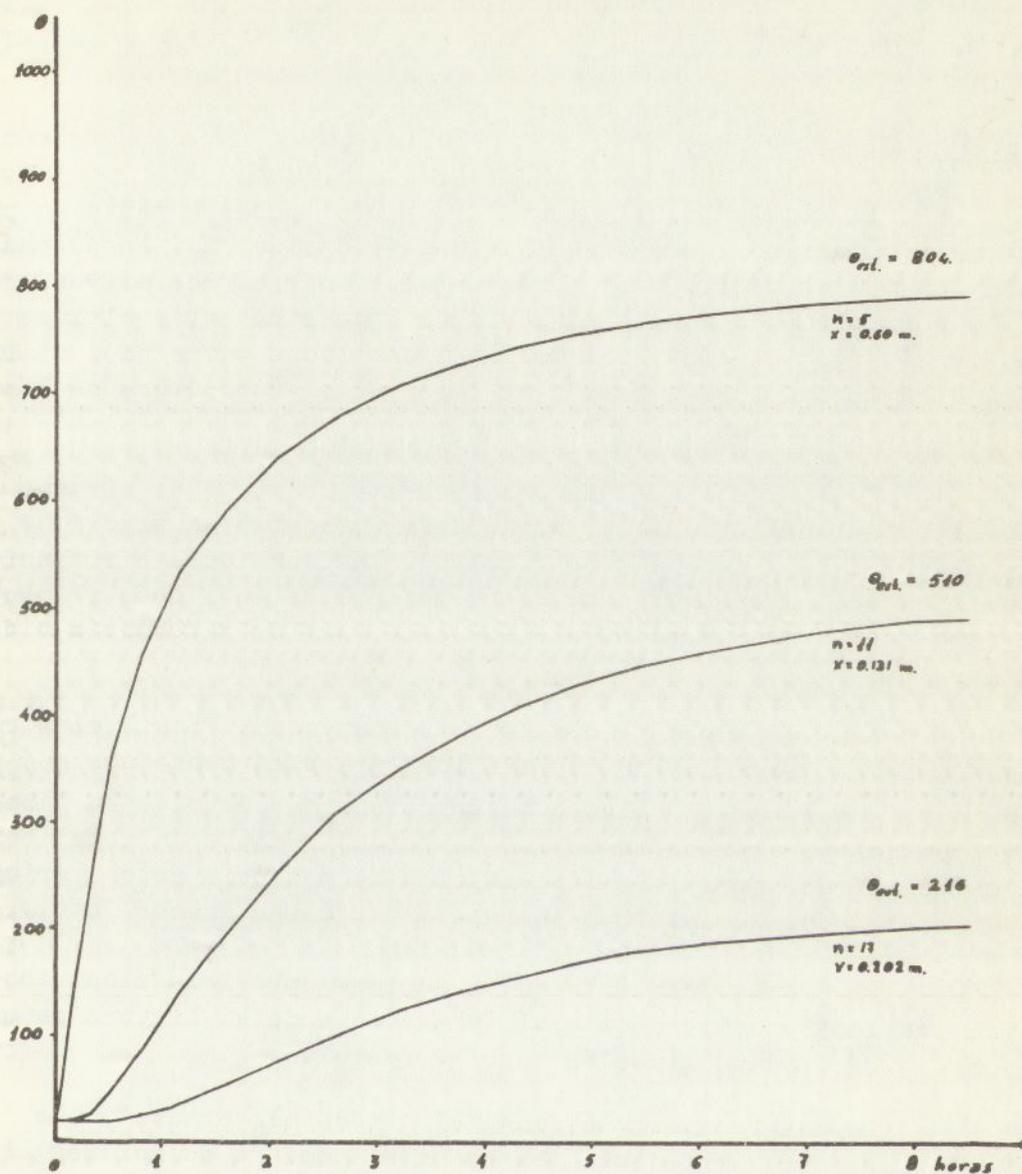


Gráfico 2