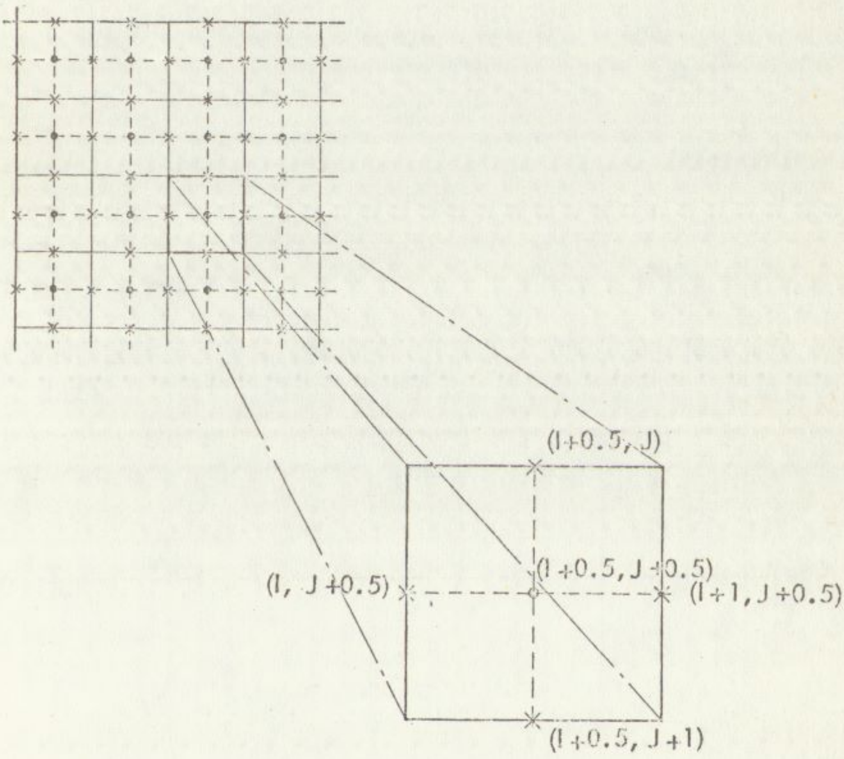
NOTAS PARA LA CONSTRUCCION DE UN MODELO DEMOGRAFICO RELACIONADO CON EL MODELO ECENSE DEL SISTEMA EDUCATIVO. (2ª parte). (*)

Por F. Briones

NOTA 12 - OBTENCION DE LA APROXIMACION "MAS SUAVE" PARA EL NUMERO DIFERENCIAL DE MIGRANTES

Representemos mediante el siguiente diagrama la base de los paralelepípedos mencionados en la nota anterior.



Daremos las coordenadas (I+0.5, J+0.5) al centro del cuadrado que corresponde

(*) Trabajo realizado para la UNESCO bajo el Contrato n° 277.504.

a la edad I en el año J (con J relativo al año de partida que será el año 0). Este es el único punto, para cada cuadrado, en el que conocemos el valor de la función que queremos aproximar

$$Z_{I+0.5,\ J+0.5} = F(I, J)$$

donde F(I,J) puede ser $It_{\alpha}(I, J)$, $Et_{\alpha}(I, J)$ o $Mt_{\alpha}(I, J)$ y $Z_{I+a,\ J+b}$ será, respectivamente $Id(I+a-\alpha+b, J+b)$, $Emd(I+a-\alpha+b, J+b)$ o $Md(I+a-\alpha+b, J+b)$.

Si unimos mediante un segmento recto el punto $(I+0.5, J+0.5, Z_{I+0.5, J+0.5})$ con el $(I+0.5, J+1.5, Z_{I+0.5, J+1.5})$, el valor de Z en el punto medio será una - aproximación, en dicho punto, de lo que estamos buscando.

$$Z^{*}_{I+0.5,\ J+1} = \frac{F(I, J) + F(I, J+1)}{2}$$

Análogamente

$$Z^{*}_{I+1,\ J+0.5} = \frac{F(I, J) + F(I+1, J)}{2}$$

Si fijamos el valor de $Z_{I+0.5,\ 0}$, uniendo este punto con el $(I+0.5, 0.5, Z_{I+0.5,\ 0.5})$ mediante una recta y prolongando hasta el $(I+0.5, 1, Z_{I+0.5,\ 1})$ obtenemos

$$Z_{I+0.5,\ 1} = 2F(I, 0) - Z_{I+0.5,\ 0}$$

Conocido este valor, unimos el último punto con el $(I+0.5, 1.5, Z_{I+0.5,\ 1.5})$ y obtenemos

$$Z_{I+0.5,\ 2} = 2F(I, 1) - Z_{I+0.5,\ 1}$$

y en general

$$Z_{I+0.5,\ J} = 2F(I, J-1) - Z_{I+0.5,\ J-1}$$

De aquí se deduce que podemos tratar cada una de las líneas cuyo primer subíndice es $I+0.5$, con I entero y fijo, por separado y, además, poniendo $Z_{I+0.5,\,J}$ en función de los valores de F (que son conocidos) y de $Z_{I+0.5,\,0}$ (fijado a priori) tendremos

$$Z_{I+0.5,\,J} = 2 \sum_{L=0}^{J-1} (-1)^{J-L-1}\, F(I,L) + (-1)^J Z_{I+0.5,\,0}$$

Hemos llamado aproximación "más suave" a aquella que hace mínima la expresión

$$\sum_{J=1}^{N} (Z^{*}_{I+0.5,\,J} - Z_{I+0.5,\,J})^2 = \sum_{J=1}^{N} \Big(\frac{F(I,J-1)+F(I,J)}{2} - 2 \sum_{L=0}^{J-1} (-1)^{J-L-1}\, F(I,L) - (-1)^J Z_{I+0.5,\,0}\Big)^2$$

Como la única variable que podemos fijar como queramos es la $Z_{I+0.5,\,0}$, tendrá que anularse la derivada con respecto a ella. Es decir

$$\sum_{J=1}^{N} \Big(\frac{F(I,J-1)+F(I,J)}{2} - 2 \sum_{L=0}^{J-1} (-1)^{J-L-1}\, F(I,L) - (-1)^J Z_{I+0.5,\,0}\Big) (-1)^J = 0$$

y por tanto

$$Z_{I+0.5,\,0} = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^{N} \Big((-1)^J \, \frac{F(I,J-1)+F(I,J)}{2} + 2 \sum_{L=0}^{J-1} (-1)^L F(I,L) \Big) =$$

$$= \frac{1}{N} \; \frac{(-1)^N F(I,N) - F(I,0)}{2} + 2 \sum_{L=0}^{N} (-1)^L (N-L)\, F(I,L)$$

Fórmulas análogas podemos obtener fijando el subíndice J y variando el I, pero hemos de tener en cuenta aquí que el valor inicial no puede ser $Z_{0,J+0.5}$ si $\alpha \neq 0$, ya que esta cifra correspondería a población de edad $-\alpha$. Hay pues que empezar poniendo

$$Z_{1,J+0.5} = 2Z_{\frac{1+\alpha}{2},J+0.5} - Z_{\alpha,J+0.5}$$

Como en el primer intervalo la I varía entre α y 1, el punto medio, al que corresponde el valor medio de la integral será el $\frac{1+\alpha}{2}$, por tanto

$$Z_{1,J+0.5} = \frac{2}{1-\alpha} F(0,J) - Z_{\alpha,J+0.5} = 2F(0,J) + \frac{2\alpha}{1-\alpha} F(0,J) - Z_{\alpha,J+0.5}$$

a partir de aquí, y poniendo $Z_{\alpha,J+0.5} - \frac{2\alpha}{1-\alpha} F(0,J)$ donde hubieramos puesto $Z_{0,J+0.5}$, el razonamiento no cambiaría por lo que obtendríamos

$$Z_{\alpha,J+0.5} = \frac{1}{M} \quad \frac{(-1)^M F(M,J) - F(0,J)}{2} + 2\sum_{L=0}^{M} (-1)^L (M-L) F(L,J) + \frac{2\alpha}{1-\alpha} F(0,J)$$

Una vez calculados a partir de $Z_{I+0.5,0}$ y $Z_{\alpha,I+0.5}$ los valores de $Z_{I+0.5,J}$ y $Z_{I,J+0.5}$, puede calcularse el valor de $Z_{I+a,J+b}$ $(0 \leq a,\ b \leq 1)$ mediante la expresión

$$Z_{I+a,J+b} = F(I,J) + \frac{a-0.5}{2}(F(I,J) - Z_{I,J+0.5}) + \frac{b-0.5}{2}(F(I,J) - Z_{I+0.5,J}) =$$

$$= \frac{1+a+b}{2} F(I,J) - \frac{a-0.5}{2} Z_{I,J+0.5} - \frac{b-0.5}{2} Z_{I+0.5,J}$$

NOTA 13 - EL CAMBIO SIMULTANEO EN LA FECHA Y EN EL CONCEPTO DE EDAD

Como ya vimos (Notas 1 y 2), el modelo demográfico que queremos construir conviene que nos dé el número de personas en la misma fecha y con el mismo concepto d de edad que el utilizado en el sistema educativo al que ha de estar ligado.

Si la información que poseemos es $P_\alpha(c,f)$, y la que necesitamos es - $P_\beta(c,f+m)$, habrá que poner estos últimos valores en función de los primeros.

Suponiendo que $0 \leq m < 1$ y dependiendo de cuanto valgan α y β, una de las tres fechas

$$c-\alpha+m-1$$
$$c-\alpha+m$$
$$c-\alpha+m+1$$

estará comprendida entre $c-\beta$ y $c+1-\beta$. Sea esta la $c-\alpha+m-k \quad (k=1,0,-1)$. Podremos poner entonces

$$P_\beta(c,f+m) = P(c-\beta,c+1-\beta,f+m) = P(c-\beta,c-k-\alpha+m,f+m) + \\ + P(c-k-\alpha+m,c+1-\beta,f+m)$$

Aplicando a cada uno de los dos sumandos la ecuación general de transferencia, obtenemos

$$P(c-\beta,c-k-\alpha+m,f+m) = P(c-\beta-m,c-k-\alpha,f)Ts(c-\beta-m,c-k-\alpha,f,m) + \\ + Mt(c-\beta-m,c-k-\alpha,f,m)\frac{1+Ts(c-\beta-m,c-k-\alpha,f,m)}{2}$$

$$P(c-k-\alpha+m,c+1-\beta,f+m) = P(c-k-\alpha,c+1-\beta-m,f)Ts(c-k-\alpha,c+1-\beta-m,f,m) + \\ + Mt(c-k-\alpha,c+1-\beta-m,f,m)\frac{1+Ts(c-k-\alpha,c+1-\beta-m,f,m)}{2}$$

Al ser la tasa de mortalidad constante entre las fechas f y f+1 y para cada año de edad, tendremos

$$Ts(c-\beta-m, c-k-\alpha, f, m) = \left[Ts_\alpha(c-k-1, f)\right]^m$$

$$Ts(c-k-\alpha, c+1-\beta-m, f, m) = \left[Ts_\alpha(c-k, f)\right]^m$$

Un caso particular que es el más normal es cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1-m$ Tendremos entonces que $k = 0$ y que el segundo sumando de la descomposición de $P(c-\beta, c+1-\beta, f+m)$ es nulo, quedándonos

$$P_\beta(c, f+m) = P(c-\beta, c+1-\beta, f+m) = P(c+m-1, c+m, f+m) =$$

$$= P(c-1, c, f)Ts(c-1, c, f, m) + Mt(c-1, c, f, m)\frac{1+Ts(c-1, c, f, m)}{2}$$

donde

$$Ts(c-1, c, f, m) = \left[Ts(c-1, f)\right]^m$$

Para el cálculo de Mt utilizaremos las fórmulas deducidas en la nota anterior, aunque, dada la complicación de la notación nos limitaremos aquí al caso particular.

$$Mt(c-1, c, f, m) = \int_{c-1}^{c}\int_{o}^{m} Md(e+b, f+b)\,db\,de = \int_{o}^{1}\int_{o}^{m} Md(c-1+a+b, f+b)\,db\,da =$$

$$= \int_{o}^{1}\int_{o}^{m} Z_{c-1+a, f+b}\,db\,da = \int_{o}^{1}\int_{o}^{m}\left[\frac{1+a+b}{2}F(c-1, f) - \right.$$

$$\left. - \frac{a-0.5}{2}Z_{c-1, f+0.5} - \frac{b-0.5}{2}Z_{c-0.5, f}\right] db\,da =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(m^2+3m)F(c-1, f) + (m-m^2)Z_{c-0.5, f}\right]$$

En el caso general hay que actuar en forma análoga, pero hay también que hacer alguna hipótesis suplementaria sobre la forma de la función P.

NOTA 14 - LAS MIGRACIONES EN UN CONTEXTO REGIONAL

Prescindiremos por ahora del subíndice α :

$$P(c+1, f+1) = P(c, f)\, Ts(c, f) + (It(c,f) - Et(c, f))\, \frac{1+Ts(c, f)}{2}$$

Además, y puesto que las ecuaciones siempre serán para una edad c, en una fecha f, prescindiremos también de los argumentos, poniendo P^{+1} en lugar de $P(c+1, f+1)$ para indicar que se trata de un año más en fecha y en edad, quedándonos

$$P^{+1} = P\, Ts + (It - Et)\, \frac{1+Ts}{2}$$

Supondremos ahora que esta fórmula la aplicamos a un conjunto de regiones y no a una sola región. Pondremos un subíndice "i" para indicar a que región nos referimos. Si hay N regiones, i podrá valer 1, 2, 3, ... hasta N. El conjunto de fórmulas que nos quedará será:

$$P_i^{+1} = P_i\, Ts_i + (It_i - Et_i)\, \frac{1+Ts_i}{2}$$

Llamaremos $Ir_{o,i}$ y $Er_{o,i}$ a los migrantes que no van o vienen de estas regiones (es decir los que van o vienen de lo que llamaremos "extranjero") e $Ir_{j,i}$ y $Er_{j,i}$ a los inmigrantes y emigrantes que van o vienen de la región j a la i. Tendremos que

$$P_i^{+1} = P_i\, Ts_i + \left(\sum_{j=o}^{N} Ir_{j,i} - \sum_{j=o}^{N} Er_{j,i} \right) \frac{1+Ts_i}{2}$$

Teniendo en cuenta que $Er_{j,i} = Ir_{i,j}$ y suponiendo que la tasa de supervivencia es distinta para los inmigrantes que para los residentes de la región, nos quedará

$$P_i^{+1} = P_i\, Ts_i + \sum_{j=o}^{N} Ir_{j,i}\, \frac{1+Ts_{j,i}}{2} - \sum_{j=o}^{N} Ir_{i,j}\, \frac{1+Ts_i}{2}$$

Supondremos además que el número de emigrantes que van de una región a otra es proporcional a la población de la región de partida en la fecha f (salvo para los que vienen del "extranjero", cuya población desconocemos).

$$P_i^{+1} = P_i\, Ts_i + (Ir_{o,i} + \sum_{j=1}^{N} Fa_{j,i}\, P_j)\, \frac{1 + Ts_{j,i}}{2} - P_i \sum_{j=o}^{N} Fa_{i,j}\, \frac{1 + Ts_j}{2} =$$

$$= P_i (Ts_i - \frac{1 + Ts_i}{2} \sum_{j=o}^{N} Fa_{i,j}) + \sum_{j=1}^{N} Fa_{j,i}\, P_j\, \frac{1 + Ts_{j,i}}{2} + Ir_{o,i}\, \frac{1 + Ts_{o,i}}{2}$$

Llamaremos "factores de atracción" a los $Fa_{i,j}$ y estos dependerán de factores socio-económicos (uno de los cuales podría ser la propia población) y deberán, por tanto, ser calculados en el correspondiente modelo.

Hay que hacer notar que el concepto "región" se puede tomar en un sentido muy amplio; puede significar "nación", puede significar "provincia" o incluso puede significar "zona rural" y "zona urbana".

NOTA 15 - POBLACION DE EDAD UNO

La población de edad uno en la fecha f + 1 podremos ponerla en función de la de edad cero utilizando la ecuación deducida en la Nota 7, pero añadiendo un término Nn correspondiente a los nacidos entre las fechas f y $f + \alpha$ que en la fecha f + 1 estarán vivos y tendrán una edad comprendida entre $1 - \alpha$ y 1 y por tanto hay que incluirlos entre ellos

$$P_\alpha(1, f+1) = P_\alpha(0,f)\, Ts_\alpha(0,f) - Em_\alpha(0,f) + In_\alpha(0,f) + Nn(f, f+\alpha, f+1)$$

Estudiaremos en la Nota 17 el término Nn; aquí nos limitaremos a hacer la observación de que la hipótesis de constancia de la tasa diferencial de mortalidad (Nota 9) no puede ser aplicada aquí para calcular Em e In en función de Et e It y poner así la ecuación de transferencia en la forma deducida al final de la Nota 10.

Suprimiendo el subíndice α y poniendo los que corresponden al caso e gional (Nota 14) tendremos:

$$P_i(1,f+1) = P_i(0,f)\,Ts_i(0,f) - \sum_{j=o}^{N} Em_{j,i}(0,f) + \sum_{j=o}^{N} In_{j,i}(0,f) + Nn(f,f+\alpha f+1)$$

Haremos ahora la hipótesis, en sustitución de la que no podemos aplicar de que $Em_{j,i}(0,f) = In_{j,i}(0,f)$ que equivale a decir que la tasa de mortalidad para los migrantes de edad 0, es la misma que les hubiera correspondido si hubieran permanecido en su país de origen.

Si además ahora llamamos

$$Ir_{j,i}(0,f) = In_{j,i}(0,f)\,\frac{2}{1+Ts_i(0,f)}$$

nos quedará, salvo el término Nn, la misma ecuación que en el caso general.

Esto que hemos hecho con los migrantes de edad 0 podríamos haberlo he cho con cualquier otro grupo de edades. Vemos pues que lo único que añaden las hipótesis de las notas 9 y 10 es el poder utilizar una tasa de mortalidad $Ts_{j,i}$ distinta de Ts_i.

La hipótesis de linearidad del número de migrantes con respecto al tiempo y a la edad (Nota 10) la mantendremos aquí y además, para las interpolaciones descritas en la Nota 12, utilizaremos la Ir que hemos definido aquí como si fuera la definida anteriormente.

NOTA 16 - POBLACION DE EDAD CERO

Teniendo en cuenta que no puede haber personas de edad negativa, hay que introducir algunas modificaciones en las fórmulas en las que aparece la población de edad cero. Así

$$P_\alpha(0,f) = \int_0^{1-\alpha} Pd(\beta,f)\,d\beta$$

$$Mt_{\alpha}(0,f) = \int_0^1 \int_{MAX(-\alpha,\,-v)}^{1-\alpha} Md(\beta + v,\, f + v)\, d\beta\, dv$$

$$Mn_{\alpha}(0,f) = \int_0^1 \int_{MAX(-\alpha,\,-v)}^{1-\alpha} Md(\beta + v, f + v)\, e^{-\int_0^{1-v} Tmd(\beta + v + \gamma,\, f + v + \gamma)\, d\gamma}\, d\gamma\, dv$$

$$Ts_{\alpha}(0,f) = \frac{\int_0^{1-\alpha} Pd(\beta, f)\, e^{-\int_0^1 Tmd(\beta + \gamma,\, f + \gamma)\, d\gamma}\, d\beta}{\int_0^{1-\alpha} Pd(\beta, f)\, d\beta}$$

En cuanto al cálculo de la población de edad cero en la fecha $f + 1$ en función de la población existente en la fecha f, y utilizando la función Nn definida en la nota anterior, tendremos simplemente

$$P_{\alpha}(0, f + 1) = Nn\,(f + \alpha\,,\ f + 1,\ f + 1)$$

NOTA 17 - RECIEN NACIDOS Y TASA DE FERTILIDAD

Dado que intentaremos poner el número de recien nacidos en función de la población femenina haremos ahora la distinción entre las poblaciones de ambos sexos añadiendo una F a las funciones cuando se quiera especificar el sexo femeni no y una M, cuando se quiera especificar el maculino. Por ejemplo: $P = PF + PM$.

Llamaremos tasa diferencial de fertilidad a una función $Tfd\,(e, f)$ tal que $Tfd(e + t,\ f + t)$ multiplicado por la población femenina de edad entre $e + t$ y $e + t + de$ en el instante $f + t$ y por dt nos dá el número de hijos que dichas mu jeres han tenido entre las fechas $f + t$ y $f + t + dt$.

El número de mujeres de edad $e + t$ en el instante $f + t$ que viven de entre las que en el instante f tenían edad e es (Nota 6)

$$PFd(c, f)\, e^{-\int_0^t Tmd(c + \gamma,\, f + \gamma)\, d\gamma}$$

De ellas nacerán por tanto, en el intervalo de tiempo $f+t$, $f+t+dt$

$$Tfd(c+t,\ f+t)\,PFd(c,f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma\ ,f+\gamma\ )d\gamma}\,dt\,dc$$

de entre estos recien nacidos solo sobrevivirán hasta la fecha $f+1$

$$Pfd(c+t,\ f+t)\,PFd(c,f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma\ ,f+\gamma\ )d\gamma}\,e^{-\int_0^{1-t} Tmd(\gamma,f+t+\gamma\ )d\gamma}\,dt\ dc$$

Integrando ahora para todas las edades posibles de las madres y para los posibles instantes del nacimiento, tendremos que el número de nacidos que sobrevi ven en el instante $f+1$ será

$$\int_c \int_A^B Tfd(c+t,f+t)PFd(c,f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma,f+\gamma)d\gamma}\,e^{-\int_0^{1-t} Tmd(\gamma,f+t+\gamma)d\gamma}\,dt\,dc$$

donde la segunda integral se entiende entre $A=\alpha$ y $B=1$ o entre $A=0$ y $B=\alpha$

Llamando tasa de supervivencia de recien nacidos a la función

$$Tsrn(f) = \frac{\int_c \int_A^B Tfd(c+t,f+t)PFd(c,f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma,f+\gamma)d\gamma}\,e^{-\int_0^{1-t} Tmd(\gamma,f+t+\gamma)}\,dt\,dc}{\int_c \int_A^B Tfd(c+t,\ f+t)PFd(c,f)\,e^{-\int_0^t Tmd(c+\gamma\ ,f+\gamma\ )d\gamma}\,dt\,dc}$$

que no es sino un promedio de la tasa diferencial a lo largo del año, nos quedará que el número de nacidos será

$$Tsrn(f,A,B)\ \sum_{e=PB}^{MN} \int_{-\alpha}^{1-\alpha}\int_A^B Tfd(e+\beta+t,f+t)PFd(e+\beta\ ,f)\,e^{-t\,Tmd(e,f)}\,dt\ ,\ d\beta$$

donde hemos sustituído la primera integral por una suma de integrales correspondien tes cada una a un año de edad, siendo PB la edad de la pubertad (mínima) y MN la de la menopausia (máxima).

Supondremos ahora que la tasa de fertilidad no varía en los intervalos de un año de edad y de tiempo con lo que nos queda:

$$\mathrm{Tsrn}\,(f,A,B) \sum_{e=PB}^{MN} \mathrm{Tf}(e,f) \int_{-\alpha}^{1-\alpha} \mathrm{PFd}(e+\xi,f)\,d\xi \int_{A}^{B} e^{-t\,\mathrm{Tmd}(e,f)}\,dt =$$

$$= \mathrm{Tsrn}\,(f,A,B) \sum_{e=PB}^{MN} \mathrm{Tf}(e,f)\mathrm{PF}_{\alpha}(e,f)\, \frac{e^{-A\,\mathrm{Tmd}} - e^{-B\,\mathrm{Tmd}}}{\mathrm{Tmd}}$$

En el caso $\alpha = 0$, tendremos

$$\mathrm{Tsrn}(f) \sum_{e=PB}^{MN} \mathrm{PF}(e,f)\,\mathrm{Tf}(e,f)\, \frac{1-e^{-\mathrm{Tmd}\,(e,f)}}{\mathrm{Tmd}(e,f)} =$$

$$= \mathrm{Tsrn}(f) \sum_{e=PB}^{MN} \mathrm{PF}\,(e,f)\,\mathrm{Tf}\,(e,f)\, \frac{1+\mathrm{Ts}(e,f)}{2}$$

En la función Nn habrá que incluir, además de los hijos de las mujeres existentes en la fecha f en la región, a los de las inmigrantes, excluyendo a los de las emigrantes.

Suponiendo para este cálculo que las tasas se mantienen todas iguales a las del país de origen tendremos, por razonamientos análogos a los seguidos hasta ahora

$$\mathrm{Nn}_i(f,\ f+1,\ f+1) = \mathrm{Tsrn}_i \sum_{e=PB}^{MN} \Big(1 - \sum_{j=o}^{N} \mathrm{FFa}_{i,j}\Big)\mathrm{PF}_i \mathrm{Tf}_i\, \frac{1+\mathrm{Ts}_i}{2} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Tsrn}_j \sum_{e=PB}^{MN} \mathrm{PF}_j\ \mathrm{FFa}_{j,i}\ \mathrm{Tf}_j\, \frac{1+\mathrm{Ts}_j}{2} +$$

$$+ \mathrm{Tsrn}_o \sum_{e=PB}^{MN} \mathrm{IFr}_{o,i}\ \mathrm{Tf}_o\, \frac{1+\mathrm{Ts}_o}{2}$$

Este número deberá ser multiplicado por un factor de proporción de niños al nacer (wM) o de proporción de niñas (wF) con lo que tendremos finalmente la población de edad cero para cada sexo.