

CREACION DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL ESTUDIO DE TRANSITORIOS

Por R. Marqués Fernández (*)

Quinta parteIntroducción.-

Se pretende aplicar las técnicas del análisis numérico para integrar sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo hiperbólico. Nos limitaremos al caso de sistemas de dos ecuaciones con dos variables dependientes y dos variables independientes. Combinaciones lineales de las ecuaciones diferenciales convierten éstas en un sistema de ecuaciones diferenciales totales que contienen derivadas sobre dos direcciones, llamadas direcciones características. Usando las propiedades de estas direcciones se obtienen diferencias finitas (1), (2), (3), (4).

(*) Trabajo realizado con beca de ayuda a la investigación del Fondo IBM (Equipo formado por R. Marqués Fernández, M. Llorens Morraja, L. Jutglar Banyeres, M. Villarrubia López, A. L. Miranda Barreras, J. L. González Vicente, C. Franco Peral, J. Gu^ltrésa Colomer, G. Franco González; de la Cátedra de Física Industrial de la Facultad de Ciencias. Barcelona).

El método de las características que aquí se introduce permite integrar por ejemplo, las ecuaciones que se plantean al estudiar, la ecuación de ondas; el golpe de ariete; el flujo isentrópico unidimensional, etc.

Planteamiento matemático.-

La forma general de un sistema de ecuaciones derivadas parciales casi lineal es:

$$L_1 = A_1 u_x + B_1 u_y + C_1 v_x + D_1 v_y + E_1 = 0 \quad (1)$$

$$L_2 = A_2 u_x + B_2 u_y + C_2 v_x + D_2 v_y + E_2 = 0 \quad (2)$$

donde A_1, B_2, \dots, E_2 son funciones de u, v, x, y siendo u, v las variables dependientes

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

Si el sistema considerado es del tipo hiperbólico, una combinación lineal de (1) y (2),

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \quad (4)$$

permite transformar estas ecuaciones en

$$F \frac{du}{dx} + (a \varphi_+ - G) \frac{dv}{dx} + (K \varphi_+ - H) = 0 \quad (5)$$

$$F \frac{du}{dx} + (a \varphi_- - G) \frac{dv}{dx} + (K \varphi_- - H) = 0 \quad (6)$$

donde a, F, G, k y H son respectivamente,

$$\begin{aligned} A &= A_1 C_2 - A_2 C_1 & G &= B_1 C_2 - B_2 C_1 \\ F &= A_1 B_2 - A_2 B_1 & K &= A_1 E_2 - A_2 E_1 \\ & & H &= B_1 E_2 - B_2 E_1 \end{aligned} \quad (7)$$

y donde las soluciones de (5) y (6) están respectivamente restringidas a las siguientes direcciones características:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_+ \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi_- \qquad (8)-(9)$$

Así pues, toda solución del sistema original (1) y (2) (de acuerdo con las condiciones iniciales y de contorno propias del problema real que se plantea), satisface al sistema de ecuaciones en derivadas totales siguiente

$$F du + (a_+ - G) dv + (K_+ - H) dx = 0 \qquad (10)$$

$$dy = \varphi_+ dx \qquad (11)$$

$$F du + (a_- - G) dv + (K_- - H) dx = 0 \qquad (12)$$

$$dy = \varphi_- dx \qquad (13)$$

Aproximación por diferencias finitas. Intervalos regulares

A fin de obtener una malla o red de características que permitan obtener la solución para aquellos valores deseados de las variables independientes x e y , supongamos que u y v son funciones conocidas de x para un cierto valor de y , y_0 (puede ser debido a las condiciones iniciales o bien a un paso previo del cómputo)

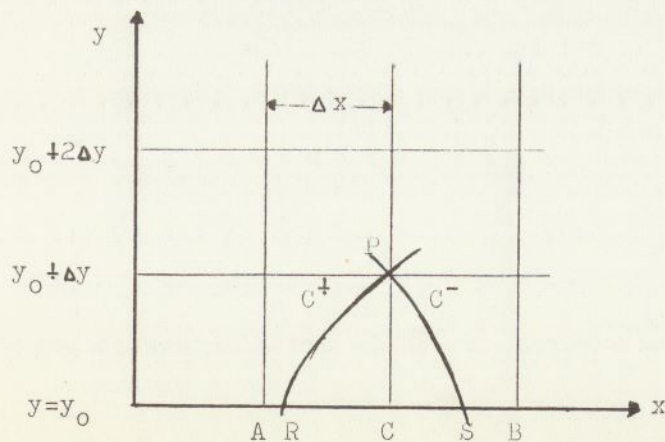


Fig. 1
Intervalos
específicos

Sean pues $u_A, v_A, u_B, v_B, u_C, v_C$, los valores conocidos de las funciones u y v en A, B, y C respectivamente, esto es, (ver Fig. 1)

$$\begin{aligned} u_A &= u(x, y_0) \\ &\dots\dots\dots \\ v_C &= v(x + \Delta x, y_0) \end{aligned} \quad (14)$$

se pretende determinar u y v en un punto determinado P sobre la línea $y_0 + y$, esto es

$$\begin{aligned} u_P &= u(x + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) \\ v_P &= v(x + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) \end{aligned} \quad (15)$$

Si consideramos una aproximación lineal de primer orden por diferencias finitas,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_1)] (x_1 - x_0) \quad (16)$$

para resolver las ecuaciones (10) - (13), podremos determinar (15) mediante las siguientes etapas de cómputo:

1.- Considerando las dos curvas características que pasan por P, determinamos x_R y x_S (ver Fig. 1)

$$y_P - y_R = (\varphi_+)_C(x_P - x_R) \quad (17)$$

$$y_P - y_S = (\varphi_-)_C(x_P - x_S) \quad (18)$$

2.- Interpolando linealmente entre A y C y C y B determinamos u_R, v_R, u_S y v_S . Se consideran pendientes constantes para C^+ y C^- entre los punto P y R y P y S respectivamente. (Ello implica necesariamente operar con un Δy suficientemente pequeño).

$$u_R = u_C \left[1 - (\varphi_+)_C^{-1} \theta \right] + u_A \theta (\varphi_+)_C^{-1} \quad (19)$$

$$v_R = v_C \left[1 - (\varphi_+)_C^{-1} \theta \right] + v_A \theta (\varphi_+)_C^{-1} \quad (20)$$

$$u_S = u_C \left[1 - (\varphi_-)_C^{-1} \theta \right] + u_B \theta (\varphi_-)_C^{-1} \quad (21)$$

$$v_S = v_C \left[1 - (\varphi_-)_C^{-1} \theta \right] + v_B \theta (\varphi_-)_C^{-1} \quad (22)$$

3.- Determinamos u_P y v_P resolviendo simultáneamente (5) y (6) en la siguiente forma

$$F_C (u_P - u_R) + (a \varphi_+ - G)_C (v_P - v_R) + (K \varphi_+ - H)_C (x_P - x_R) = 0 \quad (23)$$

$$F_C (u_P - u_S) + (a \varphi_- - G)_C (v_P - v_S) + (K \varphi_- - H)_C (x_P - x_S) = 0 \quad (24)$$

Así pues el cómputo podrá realizarse como sigue (Fig. 2)

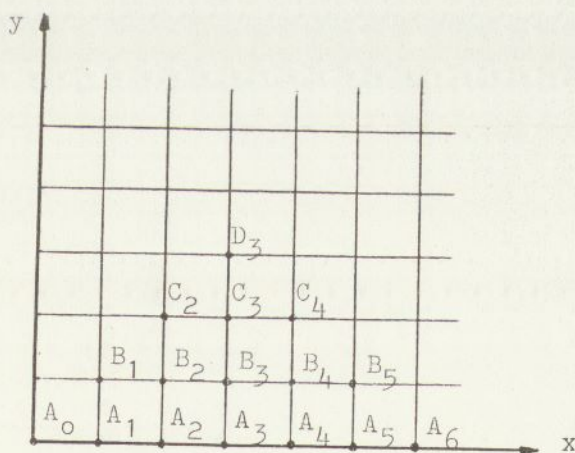


Fig. 2.- Progresión en el cómputo de los puntos de la malla.

Conocido u y v en A_0, A_1, \dots, A_6 , estas a su vez pueden calcularse por medio de las ecuaciones (17) a (24) en los puntos $B_1 \dots B_5$ y así sucesivamente C_2, C_3, C_4 y finalmente D_3 .

La red de puntos podrá completarse, a partir de las condiciones de contorno definidas respectivamente para x_{inicial} y x_{final} .

Cabe indicar finalmente que el método podrá mejorarse, utilizando aproximaciones de orden superior, además usando procedimientos iterativos y si cabe incluso puede considerarse algún método de extrapolación (como el de Richardson por ejemplo).

Problema planteado

Nos proponemos abordar el estudio del movimiento de ondas en el aire bajo la acción de la gravedad a temperatura constante (5). La ecuación que rige este movimiento es,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{2k}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \begin{array}{l} t > 0 \\ z > 0 \end{array} \quad (25)$$

donde φ es el desplazamiento vertical de las partículas, que inicialmente se hallan en z , y donde $k = \gamma g / 2c$ (γ es la razón de los calores específicos).

Para resolver (25) se tendrán en cuenta las condiciones iniciales,

$$\begin{array}{l} t = 0 \\ z > 0 \end{array} \quad \varphi(z, 0) = 0 \quad (26)$$

y las condiciones de contorno,

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ t > 0 \end{array} \right\} \varphi(0, t) = \varphi_0 \quad (27)$$

Carlslaw y Jaeger, (5), determinan la solución a partir del teorema de Inversión:

$$\varphi = 0 \quad t < \frac{z}{c} \quad (28)$$

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(\frac{kz}{c}\right) \left[1 - \frac{kz}{c} \int_{z/c}^t \frac{J_1 \left[k \sqrt{\tau^2 - z^2/c^2} \right]}{\sqrt{\tau^2 - z^2/c^2}} d\tau \right] \quad t > \frac{z}{c} \quad (29)$$

Resolución por el método de las características

A fin de obtener un sistema de ecuaciones análogo a (1) y (2) introducimos una función $\theta = \theta(x, t)$ continua y de derivadas continuas al que verifique para todo $z > 0$, $t > 0$ las condiciones siguientes:

$$0 = A \frac{\partial \varphi}{\partial z} + B \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (30)$$

$$\theta = C \frac{\partial \theta}{\partial z} + D \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (31)$$

onde A, B, C, y D son constantes.

Derivando (30) con respecto de z y (31) con respecto a t, igualando las derivadas cruzadas y sustituyendo $\partial \theta / \partial t$ según (30) se tiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{C} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{BD}{AC} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

Comparando los coeficientes de (32) con los de (25) se tiene un sistema algebraico con dos grados de libertad:

$$C = \frac{c}{2k} \quad (33)$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{1}{c^2} \quad (34)$$

Eligiendo $A = B = 1$, (30) y (31) se reducen a

$$L_1 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

$$L_2 \equiv \frac{c}{2k} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{2kc} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \theta = 0 \quad (36)$$

con las siguientes condiciones iniciales,

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi(z, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (37)$$

$$z > 0 \left\{ \begin{array}{l} \theta(z, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (38)$$

y de contorno,

$$z = 0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0, t) = \varphi_0 \end{array} \right. \quad (39)$$

$$t > 0 \left\{ \begin{array}{l} \theta(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (40)$$

Observación:

En estos momentos se trabaja en la confección de un programa para la resolución del problema por el método de las características. Confiamos presentar en un futuro, resultados, así como la comparación de éstos con los obtenidos a partir de la solución propuesta en (28) y (29) por Carslaw y Jaeger.

BIBLIOGRAFIA

- (1) LISTER, M.- The Numerical Solutions of Hiperbolic Partial Differential Equations by the Method of Characteristics, in A. Ralston and H.S. Wilf (eds.): Mathematical Methods for Digital Computers, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1960.
- (2) G.E. FORSYTE, W.R. WASOW.- Finite Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc. Cuarta edición, New York, 1967.
- (3) F.B. HILDEBRAND.- Métodos de cálculo para Ingenieros. Editorial Aguilar, Madrid, 1960.
- (4) V.L. STREETER, E.B. WYLIE.- Hydraulic Transients. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- (5) H.S. CARSLAW, J.C. JAEGER.- Operational Methods in Applied Mathematics. Dover Publications, Inc. New York, 1963.

Sexta parte

1. Introducción

En el cuarto informe (*) se trató el problema de la transmisión de calor unidireccional a través de una pared plana sin convección, desarrollando un método numérico para la integración de la ecuación de Fourier en el caso que se propuso. En el presente informe se trata el mismo problema, pero considerando la existencia de unos coeficientes de convección finitos, con lo cual aunque la ecuación diferencial que rige el proceso sea la misma que en el caso simplificado (sin convección), la presencia de unos valores finitos de los coeficientes de convección hacen que las condiciones de contorno sean distintas.

2. Planteamiento del problema

Consideremos la pared de un horno de espesor ϵ , construida con un material refractario de densidad ρ , calor específico c y

coeficiente de conducción térmica K . Cuando el horno está apagado la pared se encuentra a una temperatura uniforme θ_p . Al encender el horno la temperatura del fluido en contacto con la cara interna de la

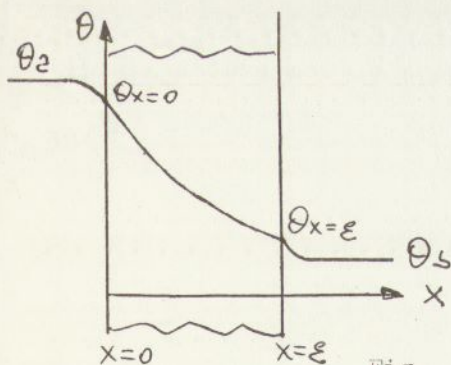


Fig. 1

(*) Véase Boletín del Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid, n° 18, marzo 1972, pág. 68.

pared se eleva bruscamente hasta una temperatura θ_a . Sean h_a y h_b los coeficientes de convección correspondientes a los contactos sólido-fluido, de las caras interna y externa respectivamente. El propósito de este informe es el desarrollo de un método numérico para el cálculo del régimen transitorio de temperaturas que se establece en el seno de la pared.

La ecuación diferencial que rige el proceso será

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

siendo α el coeficiente de difusibilidad térmica dado por la expresión $K/\rho c$.

Las condiciones de contorno vendrán dadas por

$$\begin{aligned} h_a(\theta_a - \theta_{x=0}) &= -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} \\ h_b(\theta_{x=0} - \theta_b) &= -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\epsilon} \end{aligned} \quad (2)$$

para todo t .

Y teniendo como distribución inicial de temperaturas $\theta = \theta_b$ para $t=0$. Siendo $\theta_{x=0}$ la temperatura de la pared interna y $\theta_{x=\epsilon}$ la temperatura de la pared externa.

2.1 Cálculo del régimen estacionario.

El coeficiente global de transmisión de calor U , vendrá dado por la expresión

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_a} + \frac{\varepsilon}{K} + \frac{1}{h_b} \quad (3)$$

La distribución de temperaturas $\theta_s(x)$ en el régimen estacionario se obtendrá por integración de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

con las condiciones de contorno (2). Como resultado de esta integración se obtiene para $\theta_s(x)$ una expresión del tipo

$$\theta_s(x) = \left(\theta_a - \frac{S}{h_a}\right) - \frac{S}{K} x \quad (5)$$

siendo $S = U (\theta_a - \theta_b)$.

2.2 Método numérico desarrollado para el cálculo del régimen no estacionario.

Tal como se ha descrito anteriormente, el régimen no estacionario vendrá regido por la ecuación

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (6)$$

con las condiciones de contorno (2), que eran

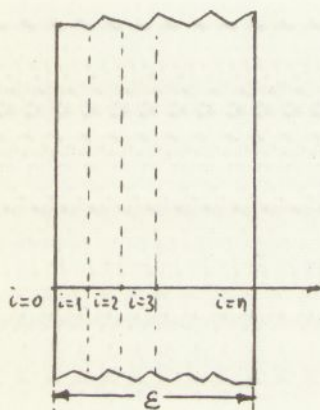
$$h_a(\theta_a - \theta_{x=0}) = -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (7)$$

$$h_b(\theta_{x=\epsilon} - \theta_b) = -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\epsilon}$$

para todo $t \geq 0$

Y teniendo como distribución inicial de temperaturas $\theta = \theta_b$, para $t = 0$.

Fig.2



Consideremos la pared dividida en n secciones espaciadas por un intervalo h , (fig. 2), así como un espaciado k para el tiempo t ; desarrollando la ecuación diferencial (6) en diferencias finitas(*) obtenemos la expresión

$$-\lambda \cdot \theta_{i+1,j} + (1+2\lambda) \theta_{i,j} - \lambda \cdot \theta_{i-1,j} = \theta_{i,j-1} \quad (8)$$

$$i = 1 \dots n-1$$

siendo $\lambda = \frac{k\alpha}{h^2}$

Las condiciones de contorno en diferencias finitas serán

(*) Para una mejor referencia consultar el Boletín del Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid, nº 18 Marzo de 1.972, pag. 69

$$\begin{aligned}
 h_a(\theta_a - \theta_{o,j}) &= -K \frac{\theta_{1,j} - \theta_{o,j}}{h} \\
 h_b(\theta_{n,j} - \theta_b) &= -K \frac{\theta_{n,j} - \theta_{n-1,j}}{h}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Llamando

$$\mu_a = \frac{K}{h \cdot h_a} \quad \text{y} \quad \mu_b = \frac{K}{h \cdot h_b}$$

Obtenemos como temperaturas en la cara interna y externa, $\theta_{o,j}$ y $\theta_{n,j}$, respectivamente, los valores dados por la expresiones

$$\begin{aligned}
 \theta_{o,j} &= \frac{\theta_a + \mu_a \theta_{1,j}}{1 + \mu_a} \\
 \theta_{n,j} &= \frac{\theta_b + \mu_b \theta_{n-1,j}}{1 + \mu_b}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Las ecuaciones (8) y (9) forman un grupo de $n+1$ ecuaciones, cuya resolución conduce a la obtención de la distribución de temperaturas en el seno de la pared para cualquier instante de tiempo prefijado convenientemente por el valor de j .

3. Resolución del sistema de ecuaciones lineales resultante.

Para resolver el sistema de $n+1$ ecuaciones obtenido mediante el proceso de discretación anteriormente descrito se ha

propuesto un método del tipo iterativo desarrollado según los siguientes puntos:

- a) En primer lugar para el nivel de tiempo $j = 0$, la distribución de temperaturas será uniforme e igual a θ_b .
- b) Para el cálculo de una distribución de temperaturas $\theta_{i,j}$ para un determinado nivel de tiempo j , es necesario el conocimiento de la correspondiente distribución de temperaturas para el nivel de tiempos $j-1$, así como los correspondientes valores de $\theta_{0,j}$ y $\theta_{n,j}$ de las caras interna y externa respectivamente, de la pared del horno. Dichas temperaturas $\theta_{0,j}$ y $\theta_{n,j}$ se suponen en un primer paso de cálculo iguales a las temperaturas θ_a y θ_b (análogo al caso sin convección). Con estos valores para $\theta_{0,j}$ y $\theta_{n,j}$ se calcula la distribución $\theta_{i,j}$, desde $i = 1 \dots n-1$ por resolución del grupo de ecuaciones (8) usando el método de Gauss-Seidel; con lo cual obtenemos para un nivel de tiempo j determinado una primera distribución aproximada de temperaturas $\theta_{i,j}$ desde $i = 1 \dots n-1$; a partir de estos valores y mediante las ecuaciones (10) predecimos unos nuevos valores para $\theta_{0,j}$ y $\theta_{n,j}$. Con dichos valores volvemos a repetir todo el proceso hasta conseguir que la máxima diferencia entre dos niveles de temperatura calculados para un mismo valor de j esté acotado para un determinado valor prefijado.

Como se puede comprobar con este proceso de cálculo, que se desarrolla para un mismo nivel de tiempo j , se van obteniendo cada vez, valores mas aproximados de la distribución de tempera-

turas $\theta_{i,j}$ desde $i = 0, 1, \dots, n$, a la solución del sistema de $n+1$ ecuaciones propuesto en el apartado 2.2.

c) Una vez calculada la distribución de temperaturas $\theta_{i,j}$ desde $i = 0, 1, \dots, n$ para un nivel de tiempo j , estamos en condiciones de repetir todo el proceso de cálculo para el siguiente nivel de tiempo $j+1$.

d) Para el control de la variación del intervalo de tiempo k se ha usado el mismo proceso de cálculo que en el caso en que no se presentaban caídas de temperatura debidas a la convección (*).

4. Descripción de las subrutinas usadas.

Se ha procedido a la elaboración de un programa para el cálculo de los procesos anteriormente descritos. Este programa usa dos subrutinas SFWC y TFWC, las cuales pueden ser llamadas indistintamente a voluntad del usuario, mediante una variable de control en el programa principal.

La subrutina SFWC ha sido diseñada para calcular el regimen estacionario, y la subrutina TFWC tiene la misión de calcular el regimen no estacionario.

Los argumentos de la subrutina SFWC son:

a) de entrada

HA = coeficiente de convección de la cara izquierda.
 HB = coeficiente de convección de la cara derecha.
 KKC = coeficiente de conductibilidad térmica de la pared.

* Véase el Boletín del Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid nº 18, Marzo de 1.972, pags. 70-72

- E = espesor de la pared.
- N = nº de secciones en que dividimos la pared para su estudio.
- TEMZD = temperatura del fluido en contacto con la cara izquierda. (temp. alta)
- TEMZB = temperatura del fluido en contacto con la cara derecha. (temp. baja)

b) de salida

- TEST = conjunto de valores de la temperatura en regimen estacionario.

Los argumentos de la subrutina TFWC son

a) de entrada

- TEST = tiene el significado anteriormente descrito.
- ALFA = coeficiente de difusibilidad térmica.
- E, HA, HB, RKC, TEMDCH, TEMZD y N tienen los significados anteriormente descritos.
- RK = valor inicial del intervalo de trabajo prefijado por el usuario (su importancia es relativa, ya que la subrutina se encarga de modificarlo según las necesidades del proceso).
- ERROR = máxima diferencia aceptada entre dos iteraciones consecutivas, obtenidas dentro de un mismo nivel de tiempo al resolver el sistema de ecuaciones lineales, por el método de Gauss-Seidel.
- DMIN y DMAX son las cotas inferior y superior respectivamente dadas en tanto por uno, a prefijar por el usuario a fin de proceder al control del intervalo de trabajo k a lo largo del tiempo.
- BETA1 y BETA2 son los factores de frenado y aceleración sobre el intervalo de tiempo de trabajo. Condición a verificar: $BETA1 > BETA2 > 1$

- TOL = máxima tolerancia en tanto por uno admitida, para alcanzar el regimen estacionario.
- COTA = máxima diferencia aceptada, en valor absoluto, entre dos distribuciones de temperaturas dentro de un mismo nivel de tiempo j.

b) de salida

Desde esta subrutina se escriben los sucesivos valores de las temperaturas del regimen transitorio.

CONCLUSION

Los apéndices I y II incluyen respectivamente los listados de las subrutinas SFWC y TFWC, así como el apéndice III incluye un modelo de programa principal el cual se ha diseñado para resolver un ejemplo numérico dado por los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 h_a &= 250 \text{ Kcal/hr.m}^2.\text{°C} & h_b &= 8 \text{ Kcal/hr.m}^2.\text{°C} \\
 K &= 1,16 \text{ Kcal/hr.m.°C} & \alpha &= 0,00283 \text{ m}^2/\text{hr} \\
 \varepsilon &= 0,25 \text{ m} & \theta_a &= 1.000 \text{ °C} \\
 & & \theta_b &= 20 \text{ °C}
 \end{aligned}$$

Como variables de control de los procesos de cálculo anteriormente descritos se han tomado

$$\begin{array}{lll}
 \text{TOL} & = 0.05 & \text{DMIN} & = 0.10 & \text{DMAX} & = 0.25 \\
 \text{ERROR} & = 0.001 & \text{COTA} & = 0.1 & \text{BETA1} & = 1.5 \\
 \text{BETA2} & = 1.2 & & & &
 \end{array}$$

DOS FORTRAN IV 360N-FD-479 3-5 SFWC DATE 31/07/72 TIME 08.18.16 PAGE 0001

```

0001      SUBROUTINE SFWC(HA,HB,RKC,E,N,TEMZD,TEMZCH,TEST)
0002      DIMENSION TEST(21)
0003      C    CALCULO DEL COEFICIENTE GLOBAL DE TRASMISION DE CALOR(PARED PLANA)...U
0004      U=(1./HA)+(E/RKC)+(1./HB)
          U=1./U
0005      C    CALCULO DEL REGIMEN ESTACIONARIO
0006      C    TEST(I)...TEMPERATURA ESTACIONARIA CORRESPONDIENTE A LA SECCION I
          H=E/N
0007      S1=U*(TEMZD-TEMZCH)
0008      S2=(TEMZD-(S1/HA))
0009      S3=S1*H/RKC
0010      N1=N+1
          APENDICE I
0011      DO 1 I=1,N1
0012      1    TEST(I)=S2-S3*(I-1)
0013      RETURN
          END

```

DOS FORTRAN IV 360N-FD-479 3-5 TFWC DATE 31/07/72 TIME 08.18.56 PAGE 0001

```

0001      SUBROUTINE TFWC(TEST,ALFA,E,HA,HB,RKC,TEMZD,RK,N,ERROR,DMIN
          1,DMAX,BETA1,BETA2,TOL,COTA)
0002      DIMENSION TEST(21),TEM1(21),TEMZA(21),TEMZB(21)
0003      229 FORMAT('0',20X,'TIEMPO EMPLEADO EN HORAS=',F7.3//5(4X,'TEM',I2,'
          1)=',F8.2)//)
0004      228 FORMAT('1',20X,'INTERVALO DE TIEMPO DE TRABAJO=',F8.5,'HORAS//)
0005      731 FORMAT('0',20X,'NUMERO DE MODIFICACIONES REALIZADAS SOBRE EL INTER
          VALO DEL TIEMPO DE TRABAJO=',I4//)
0006      735 FORMAT('0',20X,'NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES POR GAUS-SEIDEL=',I5/
          1//)
0007      INTER=1
0008      H=E/N
0009      N1=N+1
0010      P=ALFA/(H*H)
0011      HCDRA=H*HA
0012      HCORB=H*HB
0013      TIME=0
0014      DO 1 I=1,N1
0015      1    TEM1(I)=TEMZCH
0016      WRITE(3,228) RK
0017      WRITE(3,229) TIME,(I,TEM1(I),I=1,N1)
0018      IBISEC=0
0019      250 RLANDA=P*RK
0020      RMUA=RKC/HCDRA
0021      RMUR=RKC/HCORB
0022      COE2=1./(1.+2.*RLANDA)
0023      COE1=RLANDA*COE2
          530 TEMZA(I)=TEMZD
          85 TEMZA(I)=0.
          145 CONTINUE
          TEMZB(I)=TEMZA(I)
          TEMZR(N1)=TEMZA(N1)
0024      C    PREPARACION PARA LA RESOLUCION POR GAUSS/SEIDEL
0025      DO 4 I=2,N
0026      4    TEMZR(I)=0
0027      ICONT=0
0028      IMAX=0
0029      71 ICONT=ICONT+1
0030
0031
0032
0033
0034
0035

```

APENDICE II
(pág 1)

DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-5 TFWC DATE 31/07/72 TIME 08.18.56 PAGE 0002

```

0036      D=0
          C  AQUI COMIENZA LA ITERACION POR GAUSS-SEIDEL
0037      DO 5 I=2,N
0038      X=COE1*(TEMZB(I-1))+TEMZB(I+1))+COE2*TEM1(I)
0039      DIF=ABS(X-TEMZB(I))
0040      IF(DIF-D)5,6,6
0041      6  D=DIF
0042      5  TEMZB(I)=X
0043      IF(D-ERROR)7,7,71
0044      7  IF(ICONTA-IMAX)9,10,10
0045      10  IMAX=ICONTA
0046      9  TEMZB(1)=(TEMZD+RMUA*TEMZB(2))/(1.+RMUA)
0047      8  TEMZB(N1)=(TEMZDCH+RMUB*TEMZB(N))/(1.+RMUB)
0048      DO 11 I=1,N1
0049      IF(ABS(TEMZA(I)-TEMZB(I))-COTA)11,11,13
0050      11  CONTINUE
0051      GO TO 180
0052      13  DO 14 J=1,N1
0053      14  TEMZA(J)=TEMZB(J)
0054      GO TO 145
0055      180  DO 16 I=1,N1
0056      DESV=(TEMZB(I)-TEST(I))/TEMZB(I)
0057      DESV=ABS(DESV)
0058      IF(DESV-TOL)16,16,17
0059      16  CONTINUE
0060      INTER=-1
0061      GO TO 21
0062      17  COMAX=0.
0063      DO 421 I=2,N
0064      COMP=TEMZB(I)-TEM1(I)
0065      IF(COMAX-COMP)61,61,421
0066      61  IND=I
0067      COMAX=COMP
0068      421  CONTINUE
0069      COMXS=TEST(IND)-TEM1(IND)
0070      COMAX=ABS(COMAX/COMXS)
0071      IF(COMAX-DMAX)22,22,23
0072      23  RK=RK/BETA1
0073      IRISEC=IRISEC+1
0074      GO TO 250

```

APENDICE II
(pág 2)

DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-5 TFWC DATE 31/07/72 TIME 08.18.56 PAGE 0003

```

0075      22  IF(COMAX-DMIN) 321,322,322
0076      321  RK=RK*BETA2
0077      IRISEC=IRISEC+1
0078      GO TO 250
0079      322  CONTINUE
0080      21  TIME=TIME+RK
0081      WRITE(3,22R) RK
0082      WRITE(3,229) TIME,(I,TEMZB(I),I=1,N1)
0083      WRITE(3,731) IRISEC
0084      WRITE(3,735) IMAX
0085      IF(INTER)31,32,32
0086      32  DO 34 I=1,N1
0087      34  TEM1(I)=TEMZB(I)
0088      IRISEC=0
0089      GO TO 530
0090      31  WRITE(3,527)
0091      527  FORMAT('1',35X,' SE HA ALCANZADO EL REGIMEN ESTACIONARIO'////)
0092      WRITE(3,229) TIME,(I,TEST(I),I=1,N1)
0093      RETURN
0094      END

```

APENDICE II
(pág 3)

```

DOS FORTRAN IV 360N-F0-479 3-5          MAINPGM          DATE 31/07/72          TIME 08.17.10          PAGE 0001
0001          DIMENSION TEST(21)
0002          C          LECTURA DE PARAMETROS CALORIFICOS
          READ(1,1) HA,HB,RKC,ALFA
0003          C          LECTURA DE PARAMETROS GEOMETRICOS
          READ(1,2) E
0004          C          LECTURA DE TEMPERATURAS DE LOS FLUIDOS CIRCUNDANTES
          READ(1,3) TEMDCH,TEMZO
0005          C          LECTURA DE PARAMETROS DE DISCRETACION
          READ(1,4) RK,N
0006          C          LECTURA PARAMETROS DE ERROR Y CONTROL
          READ(1,5) TOL,DMIN,DMAX
0007          READ(1,6) ERROR,COTA
0008          READ(1,7) BETA1,BETA2
0009          READ(1,8) INTER
          C          HA,COEFICIENTE CONVECCION CARA IZQUIERDA(ALTA TEMPERATURA)
          C          HB,COEFICIENTE CONVECCION CARA DERECHA(BAJA TEMPERATURA)
          C          COEFICIENTE DE CONDUCCION TERMICA DE LA PARED
          C          E,ESPESOR DE LA PARED
          C          TEMDCH,TEMPERATURA CARA DERECHA(BAJA)
          C          TEMZO,TEMPERATURA CARA IZQUIERDA(ALTA)
          C          RK,INTERVALO INICIAL DE DISCRETACION DE TIEMPO A FIJAR POR EL USUARIO
          C          N,NUMERO DE INTERVALOS EN QUE SE DIVIDE LA PARED PARA EL ESTUDIO DE LA DI
          C          STRIBUCION DE TEMPERATURAS
          C          TOL,MAXIMA TOLERANCIA,EN TANTO POR UNO,ADMITIDA PARA ALCANZAR EL REGIMEN
          C          ESTACIONARIO
          C          O,PREFIJADAS POR EL USUARIO,A FIN DE PROCEDER AL CONTROL DEL INTERVALO DE
          C          DMIN,DMAX,COTAS INFERIOR Y SUPERIOR RESPECTIVAMENTE,DADAS EN TANTO POR UN
          C          TRABAJO(K) A LO LARGO DEL CALCULO
          C          ERROR,MAXIMA DIFERENCIA ACEPTADA ENTRE DOS ITERACIONES CONSECUTIVAS,0HTEN
          C          IDAS DENTRO DE UN MISMO NIVEL DE TIEMPO AL RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACION
          C          ES LINEALES POR EL METODO DE GAUSS-SEIDEL
          C          BETA1,FACTOR DE FRENADO SOBRE EL INTERVALO DE TIEMPO DE TRABAJO
          C          BETA2,FACTOR DE ACCELERACION SOBRE EL INTERVALO DE TIEMPO DE TRABAJO
          C          CONDICION A VERIFICAR BETA1 BETA2 1
          C          BLOQUE DE FORMATOS DE ENTRADA
0010          1          FORMAT (4E15,7)
0011          2          FORMAT (F5,3)
0012          3          FORMAT (2F6,1)
0013          4          FORMAT (F4,2,13)
0014          5          FORMAT (3F5,3)

```

APENDICE III
(pág 1)

```

DOS FORTRAN IV 360N-F0-479 3-5          MAINPGM          DATE 31/07/72          TIME 08.17.10          PAGE 0002
0015          6          FORMAT(F7,5,F3,1)
0016          7          FORMAT (2F4,1)
0017          8          FORMAT (I2)
0018          9          FORMAT('1',45X,'DATOS DEL PROBLEMA'////)
0019          10         FORMAT(5X,'COEF. CONVECCION CARA IZDA (KCAL/M*M*HORA*GRADO)=' ,F5,1
          1,5X,'COEF. CONVECCION CARA DCHA (KCAL/M*M*HORA*GRADO)=' ,F5,1////)
0020          11         FORMAT(1H ,5X,'COEF. CONDUCCION PARED (KCAL/M*HORA*GRADO)=' ,F5,2,5
          1X,'COEF. DIFUSIBILIDAD (M*M/HORA)=' ,F8,5////)
0021          12         FORMAT(1H ,20X,'ESPESOR DE LA PARED EN METROS=' ,F6,3////)
0022          13         FORMAT(1H ,5X,'TEMP. CARA IZDA (ALTA)=' ,F7,1,10X,'TEMP. CARA DCHA(
          1BAJA)=' ,F6,1////)
0023          14         FORMAT(10X,'TOL=' ,F6,3,15X,'DMIN=' ,F6,3,15X,'DMAX=' ,F6,3////)
0024          15         FORMAT(1H ,5X,'ERROR=' ,F8,5, 10X,'COTA=' ,F5,2,10X,'BETA1=' ,F4,1,10
          1X,'BETA2=' ,F4,1////)
0025          16         FORMAT('1',30X,'REGIMEN ESTACIONARIO'////)
0026          17         FORMAT(1H ,5(4X,'TEM(' ,I2,')=' ,F8,2)////)
0027          WRITE(3,9)
0028          WRITE(3,10) HA,HB
0029          WRITE(3,11) RKC,ALFA
0030          WRITE(3,12) E
0031          WRITE(3,13) TEMDCH,TEMZO
0032          WRITE(3,14) TOL,DMIN,DMAX
0033          WRITE(3,15) ERROR, COTA, BETA1,BETA2
0034          CALL SFWC (HA,HB,RKC,E,N,TEMDCH,TEMZO,TEST)
0035          N1=N-1
0036          WRITE(3,16)
0037          WRITE(3,17) (I,TEST(I),I=1,N1)
0038          IF(INTER)20,20,21
0039          21 CALL TFWC( TEST,ALFA,E,HA,HB,RKC,TEMDCH,TEMZO,RK,N,ERROR,DMIN,DMAX,
          1BETA1,BETA2,TOL,COTA)
0040          20 STOP
0041          END

```

APENDICE III
(pág. 2)

NOMENCLATURA

- t tiempo en hr.
- α difusibilidad térmica, su valor es $K/c \cdot \rho$. en $m^2/hora$.
- c calor específico, en Kcal/hr.Kg.
- ρ densidad en KG/m^3
- K conductividad térmica de la pared, en Kcal/hr.m. $^{\circ}C$
- θ temperatura en $^{\circ}C$
- $\theta_{x=0}$ temperatura de la pared interna, en $^{\circ}C$
- $\theta_{x=L}$ temperatura de la pared externa, en $^{\circ}C$
- θ_2 temperatura del fluido caliente, en $^{\circ}C$
- θ_b temperatura del fluido frío (ambiente), en $^{\circ}C$
- $\theta(x)$ distribución inicial de temperaturas en $^{\circ}C$
- θ_s temperatura estacionaria en $^{\circ}C$
- θ_w temperatura transitoria en $^{\circ}C$
- h_a coeficiente individual de transmisión de calor del fluido interior-pared, en $Kcal/m^2 \cdot ^{\circ}C \cdot hr$.
- h_b coeficiente individual de transmisión de calor del fluido exterior-pared, en $Kcal/hr \cdot m^2 \cdot ^{\circ}C$.
- ε espesor de la pared en m.

BIBLIOGRAFIA

- Mc Cracken, D.D. Dorn, W.S.- Métodos numéricos y programación FORTRAN. Limusa-Wiley S.A. México. 1967.
- Sadosky, M.- Cálculo numérico y gráfico. Ediciones Librería del Colegio. Buenos Aires. 1962.
- Stiefel, E.- Introducción a la matemática numérica. Editorial Labor S.A. Barcelona 1966.
- Pipes, L.A. y Harvill, L.R.- Applied Mathematics for engineers and physicists. Mc Graw-Hill, New York. 1970.
- Shao Ti Hsu.- Engineering Heat Transfer. Van Nostrand. New York. 1963.
- Gröber-Erk-grigull.- Transmisión de calor. Selecciones científicas. Madrid. 1967.
- Kern, D.Q.- Process Heat Transfer. Mc Graw-Hill. New York. 1950.
- Jacob, Max.- Heat Transfer. John Wiley and Sons, Inc. New York. 1965.