COMUNICACIONES

CREACION DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL ESTUDIO DE TRANSITORIOS

Por R. Marqués Fernández (*)

Séptima parte

Introducción.-

Se consideran las ecuaciones que rigen el fenómeno del "golpe de ariete", [1],[2],[3] dando lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales totales de primer orden que se integra numéricamente por el método de las características [4],[5], mediante discretación numérica de segundo orden de aproximación. Se incluye listado del programa en Fortran, así como algunos resultados obtenidos en el ejemplo que se plantea.

Planteamiento de ecuaciones.-

A partir de la ecuación de Bernouilli para régimen no estacionario y de la ecuación de continuidad para líquidos

(*) Trabajo realizado con beca de ayuda a la investigación del Fondo IBM (Equipo formado por R. Marqués Fernández, M. Llorens Morraja, L. Jutglar Banyeres, M. Villarrubia López, A.L. Miranda Barreras, J.L. González Vicente, C. Franco Peral, J. Gultresa Colomer, G. Franco González; de la Cátedra de Física Industrial de la Facultad de Ciencias. Barcelona).

compresibles viscosos en conducciones elásticas horizontales, se obtiene el siguiente sistema casi lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, de tipo hiperbólico:

$$L_1 = \frac{c}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + a^2\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$L_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + c\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} + f\,\frac{c/c/}{2D} = 0 \qquad (2)$$

Considerando la combinación lineal, $L = L_1 + \lambda L_2$, se obtiene un sistema equivalente al anterior para valores de $\lambda = \pm a$ (véase informe precedente sobre el mismo tema).

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dp}{dt} + a\rho\dfrac{dc}{dt} + a\rho f\,\dfrac{c/c/}{2D} = 0 & (3) \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = c + a & (4) \end{array}\right\} C^{+}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dp}{dt} - a\rho\dfrac{dc}{dt} - a\rho f\,\dfrac{c/c/}{2D} = 0 & (5) \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = c - a & (6) \end{array}\right\} C^{-}$$

Las ecuaciones (3) y (5) reciben el nombre de características y están restringidas respectivamente a las direcciones características (4) y (6).

Ejemplo de cálculo

Estudio del golpe de ariete que se produce debido al cierre de una válvula, en el extremo aguas abajo de una tubería horizontal de hierro comercial de 1750 metros de longitud y 1,2 metros de diámetro, destinada al transporte de agua.

Condiciones iniciales (régimen estacionario, válvula completamente abierta):

Velocidad media en la tubería, $c_o = 1,1$ m/seg.

Presión en la válvula, $p_o)_{x=L} = 9.10^5$ N/m^2

Ley de cierre de la válvula:

$$\tau = \frac{(C_d S_v)_o}{C_d S_v} = \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^b \qquad (7)$$

donde t_c es el tiempo de cierre completo de la misma. Se considera $t_c = 6,2$ seg. y $b = 3,2$.

Otros datos: Se ha elegido un factor de fricción, $f=0,019$ y una velocidad sónica(celeridad)$a = 1197$ m/seg.

<u>Condiciones de contorno</u>

a) <u>A la entrada de la tubería</u>

El fluído que entra en la tubería, es suministrado por un depósito adyacente a la misma, cuyo nivel se mantiene constante.

En este caso la ecuación (5) es válida, pero no ocurre lo mismo con (6). Está ultima podrá reemplazarse por:

$$p + \frac{1}{2}\rho c^2 = Cte \qquad \text{para} \qquad c > 0 \qquad (8)$$

$$p = Cte \qquad \text{para} \qquad c < 0 \qquad (9)$$

donde la constante podrá determinarse a partir de la condición inicial que da la presión del fluído en la válvula en condiciones de régimen estacionario.

b) <u>Al final de la tubería</u>

En este caso debe reemplazarse (6) (no aplicable ahora), por la condición de flujo, que impone la válvula situada en este extremo.

El flujo a través de la válvula, inicialmente vendrá dado por:

$$Sc_0 = (C_d S_v)_0 \sqrt{2p_0/\rho} \qquad (10)$$

y en general por,

$$Sc = C_d S_v \sqrt{2p/\rho} \qquad (11)$$

dividiendo estas expresiones resulta,

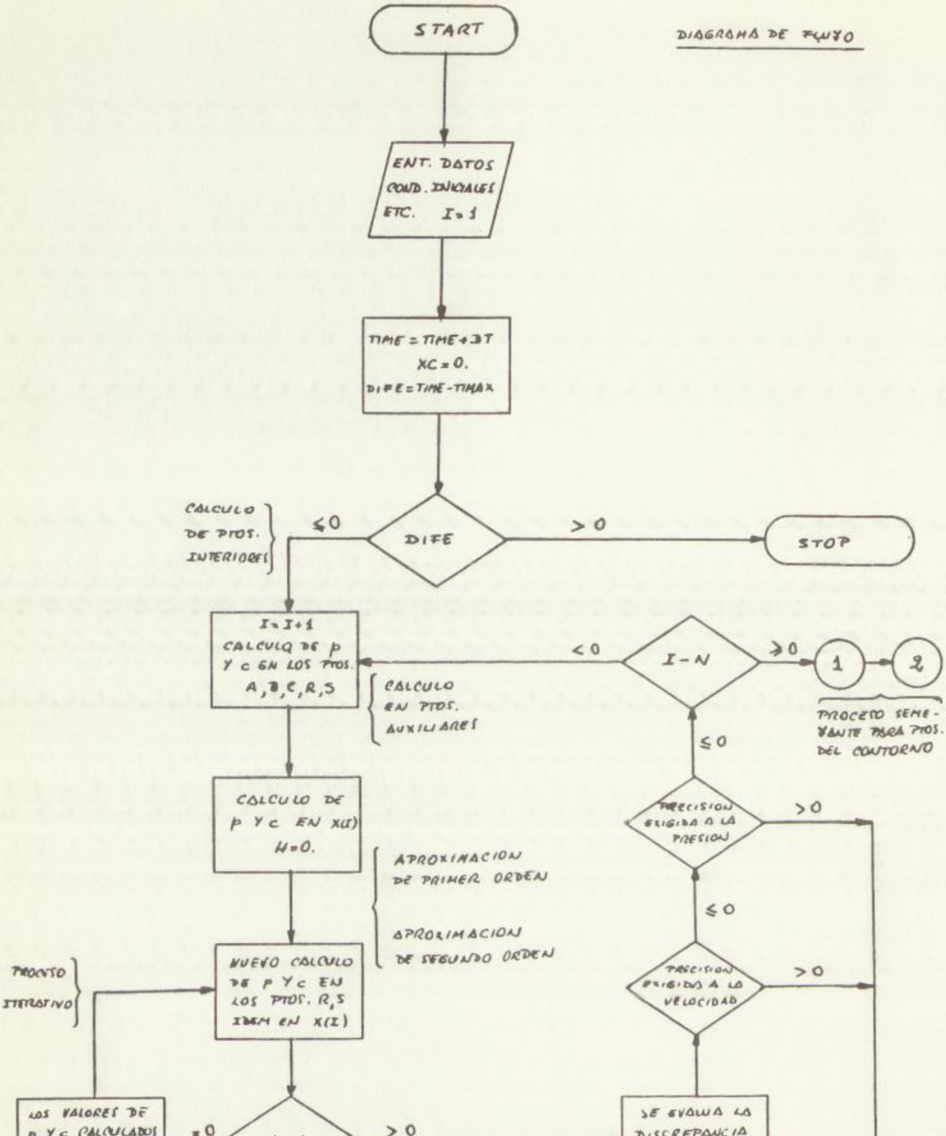
$$\frac{c}{c_0} = \tau \sqrt{\frac{p}{p_0}} \qquad (12)$$

Así pues en nuestro caso rige (12) para $t < t_c$, mientras que para $t \geqslant t_c$, la velocidad en $x = x_L$ es nula, esto es $c = 0$.

Programa de cálculo.-

A partir del problema físico enunciado, se ha considerado la solución que desarrolla Streeter([1]),([2]) procurando completarla hasta un segundo orden de aproximación y utilizando un proceso iterativo a fin de obtener la precisión deseada en la evaluación de las variables dependientes p(presión) y c(velocidad). A efectos de brevedad del presente informe, se han omitido las numerosas expresiones discretadas que conducen paso a paso a determinar la solución en cada punto, que por otra parte pueden reconstruirse fácilmente a partir del artículo de Mary Lister ([4]).

El programa resuelve el problema para tubos cortos (once puntos sobre la tubería) y hasta un tiempo máximo de 10 segundos. Sin embargo se presentan, por las mismas razones de brevedad, unos pocos resultados.


START
DIAGRAMA DE FLUJO
ENT. DATOS
COND. INICIALES
ETC. I=1
TIME = TIME + ΔT
XC = 0.
DIFE = TIME - TIMAX
CALCULO DE PTOS. INTERIORES
≤0
DIFE
>0
STOP
I=I+1
CALCULO DE p Y c EN LOS PTOS. A, B, C, R, S
CALCULO EN PTOS. AUXILIARES
<0
I-N
≥0
1
2
PROCESO SEMEJANTE PARA PTOS. DEL CONTORNO
≤0
CALCULO DE p Y c EN X(I)
H=0.
PRECISION EXIGIDA A LA PRESION
>0
APROXIMACION DE PRIMER ORDEN
≤0
APROXIMACION DE SEGUNDO ORDEN
PROCESO ITERATIVO
NUEVO CALCULO DE p Y c EN LOS PTOS. R, S IDEM EN X(I)
PRECISION EXIGIDA A LA VELOCIDAD
>0
LOS VALORES DE p Y c CALCULADOS SE GUARDAN EN SPEED3(I) PRES3(I)
=0
H-1.
>0
SE EVALUA LA DISCREPANCIA DE LOS DOS ULTIMOS CALCULOS.
<0
STOP

LISTADO DEL PROGRAMA

```
ESTE PROGRAMA RESUELVE NUMERICAMENTE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
EN DERIVADAS PARCIALES HIPERBOLICAS DEL ESTUDIO DEL GOLPE DE ARIETE
POR EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS, CON APROXIMACIONES DE SEGUNDO
ORDEN Y MEDIANTE PROCESO ITERATIVO.
CONDICIONES DE CONTORNO...DEPOSITO AL INICIO DE LA TUBERIA Y
VALVULA AL FINAL.

    DIMENSION SPEED1(100),SPEED2(100),PRES1(100),PRES2(100)
    REAL LONG
  1 FORMAT(2(F10.1),I10,3(F10.3)/4(F10.3))
  2 FORMAT(31X,'DATOS DEL PROBLEMA'///)
  3 FORMAT(17X,'LONG=',F7.1,17X,'A=',F7.1,17X,'N=',I3,17X,'DIAMT=',F4.
   11//)
  4 FORMAT 16X,'FRICT=',F6.3,13X,'SPEED1=',F4.1,16X,'TCLOSE=',F4.1,16X,
   11'TIMAX=',F5.1//)
  5 FORMAT(16X,'PRES1=',E12.5,9X,'GRAV=',F5.1,13X,'Y=',F4.1,16X,'DENS
   11I=',F6.0/////)
  6 FORMAT('1',35X,'ALTURAS Y VELOCIDADES EN DIEZ SECCIONES DE LA TUBE
   1RIA')
  7 FORMAT(1H0,5X,25HTIME    TAU    X/L=    0.  6X,2H.1,6X,2H.2,6X,2H.3,6
   11X,2H.4,6X,2H.5,6X,2H.6,6X,2H.7,6X,2H.8,6X,2H.9,5X,3H1.)
  8 FORMAT(1H0,2F7.3,2X,3H H=,11F7.3/17X,3H V=,11F7.2)
212 FORMAT(////(5X,E12.5)//)
    READ(1,1)LONG,A,N,DIAMT,FRICT,SPEED1,TCLOSE,TIMAX,PRES1,GRAV,Y,DENS
   11I
    WRITE(3,2)
    WRITE(3,3)LONG,A,N,DIAMT
    WRITE(3,4)FRICT,SPEED1,TCLOSE,TIMAX
    WRITE(3,5)PRES1,GRAV,Y,DENSI

    CALCULO PARA EL REGIM. PERMANENTE

    DIFF=DENSI*FRICT*SPEED1*SPEED1*LONG/(2.*DIAMT*N)
    PRES=PRES1+N*DIFF+DENSI*SPEED1*SPEED1/2.
    NN=N+1
    DO 100 I=1,NN
    SPEED1(I)=SPEED1
    COEFI=NN-I
100 PRES1(I)=PRES1+COEFI*DIFF
    TAU=1.
    TIME=0.
    DX=LONG/N
    DT=LONG/(A*N)
    ZETA=DT/DX
    WRITE(3,6)
    WRITE(3,7)
```

```
      DO 800 I=1,K
  800 PRES1(I)=PRES1(I)/9.81*10000.)
  101 WRITE(3,3)TIME,TAU,(PRES1(I),I=1,K),(SPEED1(I),I=1,K)
      DO 700 I=1,K
  700 PRES1(I)=9.81*10000.*PRES1(I)
      TIME=TIME+DT
      XC=0
      IF(TIME-TIMAX)99,99,30
C
C     CALCULO DE PUNTOS INTERIORES.APROXIMACION DE PRIMER ORDEN
C
   99 CONTINUE
      DO 102 I=2,N
      XC=XC+DX
      PC=PRES1(I)
      CC=SPEED1(I)
      PA=PRES1(I-1)
      CA=SPEED1(I-1)
      PB=PRES1(I+1)
      CB=SPEED1(I+1)
      XR=XC-(CC+A)*DT
      XS=XC-(CC-A)*DT
      PR=PC+(PA-PC)*(CC+A)*BETA
      CR=CC+(CA-CC)*(CC+A)*BETA
      PS=PC-(PB-PC)*(CC-A)*BETA
      CS=CC-(CB-CC)*(CC-A)*BETA
      PRES3(I)=0.5*(PR+PS)+A*DENSW*(CR-CS)/2.
      SPEED3(I)=0.5*(CR+CS)+(PR-PS)/(2.*A*DENSW)-FRICT*CC*ABS(CC)*DT/(2.
     1*DIAMT)
C
C     CALCULO DE PUNTOS INTERIORES.APROXIMACION DE SEGUNDO ORDEN
C
      H=0.
  103 GAMMA=1./(SPEED3(I)+A)+1./(CR+A)
      DELTA=1./(SPEED3(I)-A)+1./(CS-A)
      H=H+1.
      XR=XC-2.*DT/GAMMA
      XS=XC-2.*DT/DELTA
      PR=PC-(PA-PB)*(XR-XC)/(2.*DX)+(PA+PB-2.*PC)*(XR-XC)*(XR-XC)/(2.*DX
     1*DX)
      CR=CC-(CA-CB)*(XR-XC)/(2.*DX)+(CA+CB-2.*CC)*(XR-XC)*(XR-XC)/(2.*DX
     1*DX)
      PS=PC-(PA-PB)*(XS-XC)/(2.*DX)+(PA+PB-2.*PC)*(XS-XC)*(XS-XC)/(2.*DX
     1*DX)
      CS=CC-(CA-CB)*(XS-XC)/(2.*DX)+(CA+CB-2.*CC)*(XS-XC)*(XS-XC)/(2.*DX
     1*DX)
      AM=PS-PR-A*DENSW*(CR+CS)+A*DENSW*FRICT*(CR*ABS(CR)+CS*ABS(CS))*DT/
     1(4.*DIAMT)
      XM=2.*DIAMT/(FRICT*DT)
      CM=FRICT*DT*AM/(2.*A*DENSW*DIAMT)
      IF(AM)1000,1001,1002
```

```
000 SPEED3(I)=RO*(SQRT(1.-FI)-1.)
    GO TO 1003
001 SPEED3(I)=0.
    GO TO 1003
002 SPEED3(I)=RO*(1.- SQRT(1.+FI)
003 PRES3(I)=PR+A*DENSW*(CR-SPEED3(I))-A*DENSW*FRICT*(CR*ABS(CR)+SPEED
   13(I)*ABS(SPEED3(I))*DT/(4.*DIAMT)

    PROCESO ITERATIVO

    IF(H-1.)30,104,105
104 S3=SPEED3(I)
    P3=PRES3(I)
    GO TO 103
105 SP3=ABS(S3-SPEED3(I))
    PR3=ABS(P3-PRES3(I))
    IF(SP3-0.001)106,106,104
106 IF(PR3-0.001)102,102,104
102 CONTINUE

    CONDICION DE CONTORNO A LA ENTRADA. APROXIMACION DE PRIMER ORDEN.

    XC=DX
    PA=PRES1(1)
    CA=SPEED1(1)
    PB=PRES1(3)
    CB=SPEED1(3)
    PC=PRES1(2)
    CC=SPEED1(2)
    XS=-(CA-A)*DT
    PS=PA-(PC-PA)*(CA-A)*ZETA
    CS=CA-(CC-CA)*(CA-A)*ZETA
    C1=PS-A*DENSW*CS+A*DENSW*FRICT*CA*ABS(CA)*DT/(2.*DIAMT)
    IF(CA)112,113,113
113 SPEED3(1)=A*(SQRT (1.+2.*(AK-C1)/(A*A*DENSW))-1.)
    PRES3(1)=C1+A*DENSW*SPEED3(1)
    GO TO 300
112 SPEED3(1)=(AK-C1)/(A*DENSW)
    PRES3(1)=AK

    CONDICION DE CONTORNO A LA ENTRADA. APROXIMACION DE SEGUNDO ORDEN.

300 CONTINUE
    H=0.
119 DELTA=1./(SPEED3(1)-A)+1./(CS-A)
    H=H+1.
    XS=-2.*DT/DELTA
    PS=PC-(PB-PA)*(XC-XS)/(2.*DX)+(PA+PB-2.*PC)*(XC-XS)*(XC-XS)/(2.*DX
   1*DX)
    CS=CC-(CB-CA)*(XC-XS)/(2.*DX)+(CA+CB-2.*CC)*(XC-XS)*(XC-XS)/(2.*DX
   1*DX)
    C2=PS-A*DENSW*CS+A*DENSW*FRICT*CS*ABS(CS)*DT/(4.*DIAMT)
    C3=1.+A*FRICT*DT/(2.*DIAMT)
    IF(CA)114,115;115
```

```
  115 SPEED5(1)=A*(SQRT(1.+2.*C5*(AK-C2)/(A*A*DENSW))-1.)/C5
      PRES5(1)=C2+A*DENSW*SPEED5(1)+A*DENSW*FRICT*SPEED5(1)*SPEED5(1)*DT
     1/(4.*DIAMT)
      GO TO 400
  114 SPEED5(1)=(2.*DIAMT/(FRICT*DT))*(1.-SQRT(1.-FRICT*DT*(AK-C2)/(A*DE
     1NSW*DIAMT)))
      PRES5(1)=AK
C
C     PROCESO ITERATIVO.
C
  400 CONTINUE
      IF(N-1.)30,116,117
  116 S5=SPEED5(1)
      P5=PRES5(1)
      GO TO 119
  117 SP5=ABS(S5-SPEED5(1))
      PR5=ABS(P5-PRES5(1))
      IF(SP5-0.001)118,118,116
  118 IF(PR5-0.001)120,120,116
  120 CONTINUE
C
C     CONDICION DE CONTORNO A LA SALIDA.APROXIMACION DEL PRIMER ORDEN.
C
      XC=(N-1)*DX
      PA=PRES1(K-2)
      CA=SPEED1(K-2)
      PB=PRES1(K)
      CB=SPEED1(K)
      PC=PRES1(K-1)
      CC=SPEED1(K-1)
      XS=LONG-(CB+A)*DT
      PS=PB-(PB-PC)*(CB+A)*ZETA
      CS=CB-(CB-CC)*(CB+A)*ZETA
      C5=CS+PS/(A*DENSW)-FRICT*CB*ABS(CB)*DT/(2.*DIAMT)
      IF(TIME-TIMEC)122,125,125
  122 TAU=(1.-TIME/TIMEC)**3
      C4=A*DENSW*((SPEEDI*TAU)**2)/PRESI
      SPEED5(K)=SQRT(C4*C4/4.+C4*C5)-0.5*C4
      PRES5(K)=A*DENSW*(C5-SPEED5(K))
      GO TO 500
  125 SPEED5(K)=0.
      PRES5(K)=A*DENSW*C5
C
C     CONDICION DE CONTORNO A LA SALIDA. APROXIMACION DE SEGUNDO ORDEN.
C
  500 CONTINUE
      N=0
  121 GAMMA=1./(SPEED5(K)+A)+1./(CS+A)
      N=N+1.
      XS=LONG-2.*DT/GAMMA
      PS=PC-(PB-PA)*(XC-XS)/(2.*DX)+(PA+PB-2.*PC)*(XC-XS)*(XC-XS)/(2.*DX
     1*DX)
      CS=CC-(CB-CA)*(XC-XS)/(2.*DX)+(CA+CB-2.*CC)*(XC-XS)*(XC-XS)/(2.*DX
     1*DX)
```

```
      CC6=1.+FRICT*DT*C4/(4.*DIAMT)
      CC7=CS+PS/(A*DENSW)-FRICT*CS*ABS(CS)*DT/(4.*DIAMT)
      IIF(TIME-TIMEC)124,125,125
  124 SSPEED3(K)=(SQRT(C4*C4/4.+C4*C6*C7)-0.5*C4)/C6
      PPRES3(K)=A*DENSW*(C7-SPEED3(K)-FRICT*SPEED3(K)*SPEED3(K)*DT/(4.*DI
     1AAMT)
      GGO TO 600
  125 TTAU=0.
      SSPEED3(K)=0.
      PPRES3(K)=A*DENSW*C7

      PPROCESO ITERATIVO.

  600 CCONTINUE
      IIF(H-1.)30,126,127
  126 SS3=SPEED3(K)
      PP3=PRES3(K)
      GGO TO 121
  127 SSP3=ABS(S3-SPEED3(K))
      PPR3=ABS(P3-PRES3(K))
      IIF(SP3-0.001)128,128,126
  128 IIF(PR3-0.001)130,130,126
  130 CCONTINUE
      DDO 131 I=1,K
      SSPEED1(I)=SPEED3(I)
  131 PPRES1(I)=PRES3(I)/(9.81*10000.)
      GGO TO 101
   30 SSTOP
      EEND
```

Algunos resultados:

ALTURAS Y VELOCIDADES EN DIEZ SECCIONES DE LA TUBERIA

TIME	TAU	X/L=	0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.
0.0	1.000	P=	9.342	9.326	9.309	9.292	9.275	9.258	9.242	9.225	9.208	9.191	9.174
		C=	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
0.146	0.926	P=	9.338	9.337	9.320	9.303	9.287	9.270	9.253	9.236	9.219	9.202	9.767
		C=	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.05
0.292	0.857	P=	9.337	9.339	9.330	9.314	9.297	9.280	9.263	9.246	9.230	9.736	10.371
		C=	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.05	1.00
0.439	0.791	P=	9.332	9.335	9.332	9.324	9.307	9.290	9.273	9.257	9.813	10.390	10.986
		C=	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.05	1.00	0.95
0.585	0.723	P=	9.342	9.333	9.328	9.326	9.317	9.301	9.234	9.840	10.417	11.005	11.607
		C=	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.05	1.00	0.95	0.90
0.731	0.669	P=	9.339	9.347	9.327	9.322	9.319	9.311	9.867	10.444	11.032	11.631	12.232
		C=	1.09	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.05	1.00	0.95	0.90	0.85
0.877	0.614	P=	9.337	9.342	9.340	9.321	9.315	9.886	10.471	11.059	11.656	12.240	[illegible]
		C=	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.05	1.00	0.95	0.90	0.85	[illegible]
1.023	0.561	P=	9.337	9.336	9.336	9.334	9.887	10.476	11.078	11.685	12.265	12.874	13.480
		C=	1.09	1.09	1.09	1.09	1.05	1.00	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75
1.170	0.512	P=	9.335	9.340	9.330	9.903	10.494	11.080	11.690	12.283	12.892	13.505	14.096
		C=	1.09	1.09	1.09	1.04	1.00	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70
1.316	0.466	P=	9.341	9.333	9.907	10.490	11.095	11.708	12.285	12.896	13.521	14.110	14.704
		C=	1.09	1.09	1.04	0.99	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65
1.462	0.423	P=	9.340	9.912	10.498	11.099	11.704	12.290	12.905	13.523	14.115	14.721	15.299
		C=	1.09	1.04	0.99	0.94	0.89	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60
1.608	0.383	P=	9.339	10.503	11.104	11.712	12.284	12.900	13.528	14.123	14.722	15.305	15.873
		C=	0.99	0.99	0.94	0.89	0.85	0.79	0.74	0.70	0.65	0.60	0.55

NOMENCLATURA

a = celeridad	A
b = exponente de la ecuación que calcula	B
c = velocidad del fluído	SPEED1(I),SPEED3(I)
c_o = velocidad media inicial del fluído	SPEEDI
C_d = coeficiente de descarga de la válvula	
D = diámetro de la tubería	DIAMT
f = factor de rozamiento o de fricción	FRICT
g = aceleración de la gravedad	GRAV
L = longitud de la tubería	LONG
N = número de tramos iguales en que se divide L	N
p = presión	PRES1(I),PRES3(I)
p_o = presión inicial de la válvula	PRESI
S = área de la sección recta de la tubería	
S_v = área de la sección recta de la válvula	
t = tiempo	TIME
t_c = tiempo de cierre de la válvula	TIMEC
t_{max} = valor máximo de t	TMAX
Δt = discretación constante de t (=L/CAN)	DT
x = distancia sobre el eje de la tubería	
Δx = discretación constante de x (=L/N)	DX
ρ = densidad del fluído	DENSW
τ = ley de cierre de la válvula	TAU

BIBLIOGRAFIA

(1) V.L. STREETER, E.B. WYLIE. Hydraulic Transients.Mc.Graw-Hill Book Company, New York, 1.967.

(2) V.L. STREETER,Fluid Mechanics Mc.Graw-Hill, Book Company, New York, 1.958.

(3) G. RICH. Hidraulic Transients, Dover Publications, Inc. New York, 1.963.

(4) LISTER,M. The Numerical Solutions of Hiperbolic Partial Differential Equations by the Method Characteristics, in A. Ralston and H.S. Wilf (eds.) Mathematical Methods for Digital Computers John Wiley and Sons, Inc. New York, 1.960.

(5) G.E. FORSYTE, W.R. WASOW, Finite Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc. Cuarta Edición New York, 1.967.