CREACION DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL ESTUDIO DE TRANSITORIOS

Por R. Marqués Fernández (*)

Octava parte

1.- INTRODUCCION.- En el presente informe se trata el problema de la transmisión de calor en régimen no estacionario a través de un cuerpo con simetría cilíndrica. Como primer paso en el estudio propuesto se aborda el caso de un cilindro homogéneo e ilimitado sin generación de calor interna sumergido en el seno de un fluido a distinta temperatura, del cual recibe o cede calor, con un coeficiente de convección h correspondiente al contacto sólido-fluido.

La resolución analítica de este problema lleva consigo la determinación de las raíces de una ecuación trascendente en la que aparecen las funciones de Bessel J_0 y J_1, así como parámetros característicos del material, de la geometría del cilindro y de las condiciones de trabajo. En el presente informe se incluye un estudio de dicha ecuación proponiéndose un método de resolución y un modelo de programa para llevar a cabo el cálculo propuesto.

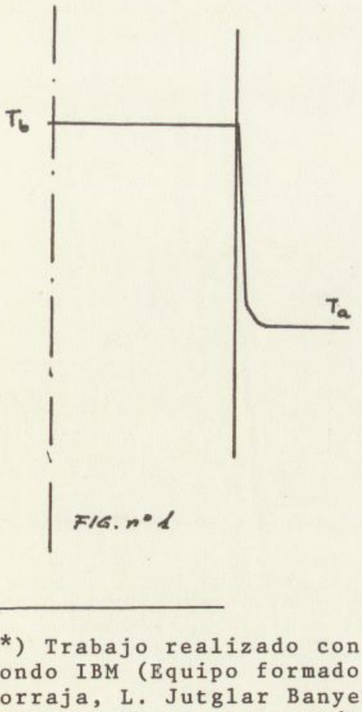

FIG. nº 1

2.- PLANTEAMIENTO Y DESARROLLO DEL PROBLEMA PROPUESTO

Sea un cilindro ilimitado y homogéneo de radio R a una temperatura uniforme T_b en el instante inicial (t = 0), rodeado de un fluido a una temperatura T_a siendo $T_a < T_b$ (Fig. 1).

Se consideran constantes los valores del calor específico c de la densidad ρ y de la conductividad térmica k y en consecuencia el de

---

(*) Trabajo realizado con beca de ayuda a la investigación del Fondo IBM (Equipo formado por R. Marqués Fernández, M. Llorens Morraja, L. Jutglar Banyeres, M. Villarrubia López, A. L. Miranda Barreras, J. L. González Vicente, C. Franco Peral, J. Gultresa Colomer, G. Franco González; de la Cátedra de Física Industrial de la Facultad de Ciencias. Barcelona).

la difusibilidad α ($\alpha = k/\rho \cdot c$). La ecuación de Fourier en coordenadas cilíndricas que rige el proceso supuesto $\theta = \theta\ (r,t)$ viene dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \qquad (1)$$

con las condiciones:

$$\begin{array}{ll} t = 0 & \theta\ (0,\ r) = \theta_b \\ t > 0 & \left.\dfrac{\partial \theta}{\partial r}\right]_{r=R} = - \dfrac{h}{k}\ \theta_{r=R} \end{array} \qquad (2)$$

En donde θ (temperatura diferencial) viene definida por:

$$\theta\ (r,t) = T\ (r,t) - T_a \qquad (3)$$

La solución de la ecuación diferencial (1) con las condiciones (2) viene dada por la expresión:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_K} \cdot \frac{J_1(\mu_k)}{J_o^2\ (\mu_k) + J_1^2(\mu_k)} \cdot J_o\ (\mu_k \frac{r}{R}) e^{-\mu_k^2 \cdot \alpha \cdot t\ /R^2} \qquad (4)$$

En donde J_o y J_1 son las funciones de Bessel de primera especie de ordenes 0 y 1 respectivamente, y los valores de μ_k son las raices de la ecuación:

$$\mu_k\ J_1(\mu_k) = \frac{hR}{k}\ J_o\ (\mu_k) \qquad (5)$$

En el caso particular que se considere un coeficiente de convección h infinito, la expresión (4) queda reducida a:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \frac{1}{J_1(\mu_k)} J_o\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_k^2 \cdot \frac{\alpha t}{R^2}} \tag{6}$$

Siendo en este caso μ_k las raices de la ecuación:

$$J_o(\mu_k) = 0 \tag{7}$$

es decir, en este caso los valores de μ_k vendrán dados por los ceros de la función J_o.

3.- RESOLUCION DE LA ECUACIÓN TRASCENDENTE.

En la expresión (4), que proporciona los valores de la temperatura diferencial θ para cada punto del cilindro en cualquier instante de tiempo t, aparecen los valores μ_k que previamente deben determinarse mediante la resolución de la ecuación (5).

Fácilmente puede verse a partir del estudio del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= \mu J_1(\mu) \\ y &= \frac{hR}{k} J_o(\mu) \end{aligned} \tag{8}$$

que las raices de la ecuación (5) verifican la conducción:

$$\begin{aligned} &0 < \mu_1 < x_1 \\ &x_1 < \mu_2 < x_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &x_{k-1} < \mu_k < x_k \end{aligned} \tag{9}$$

siendo x_k las raices de la ecuación:

$$J_a(x) = 0 \quad \text{(Ver gráfico 2)}$$

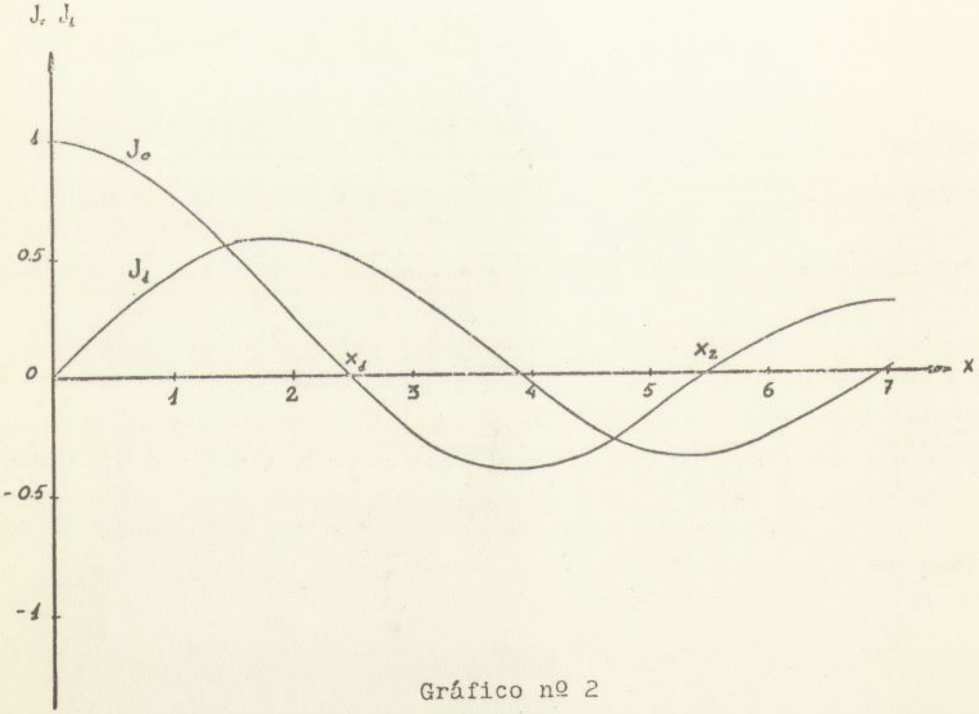

Gráfico nº 2

Una vez conocidas las zonas de existencia de las raices de la ecuación (5) proponemos para su determinación el siguiente método de cálculo.

Las raices de la ecuación (5) coinciden con los valores de que anulan la función: (Ver gráfico nº 3)

$$y = \frac{hR}{k} J_o (\mu) - J_1 (\mu) \qquad (10)$$

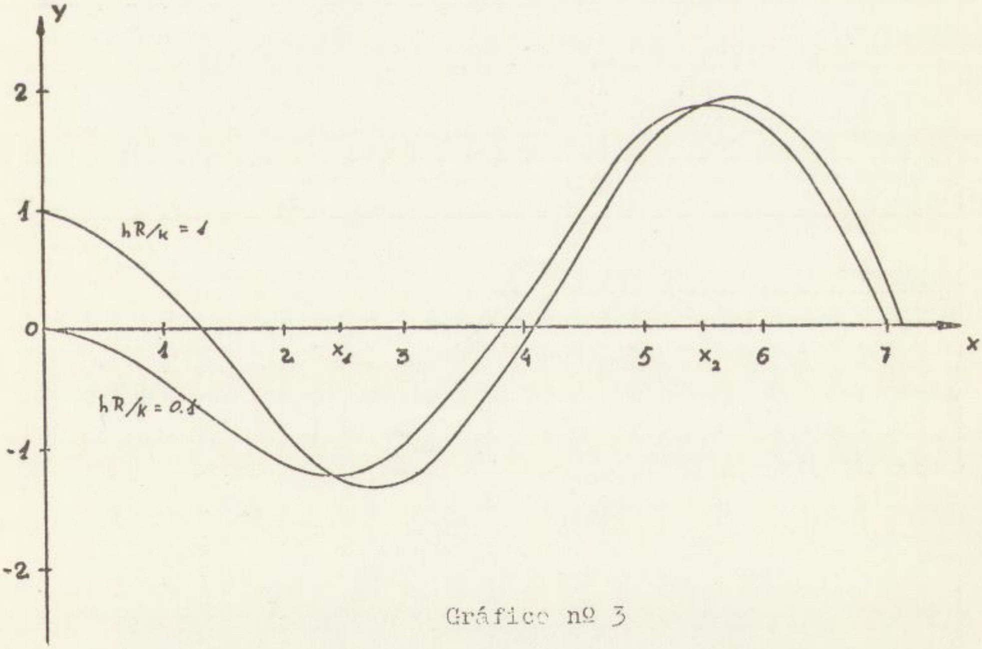

Gráfico nº 3

Una vez conocidos los intervalos de existencia, dados por las condiciones (9), de las raices de la ecuación (5), el procedimiento de cálculo consiste en la evaluación de la función (10) a partir del extremo inferior ($\mu_o = x_{k-1}$) del intervalo de existencia para una sucesión de valores $\mu = \mu_o + \Delta\mu$ hasta que se produce un cambio de signo en la función (10). Una producido dicho cambio de signo (aislada la raiz en un intervalo de longitud $\Delta\mu$) el valor de $\Delta\mu$ se sustituye por $\Delta\mu/M$ repitiéndose el proceso dentro del nuevo intervalo en que se ha aislado la raiz. Este sistema de cálculo se repite tantas veces como sea necesario hasta alcanzar la aproximación deseada (δ) por el usuario. La aproximación lograda en el n-ésimo ciclo de cálculo vendrá dada por:

$$\delta_n = \pm \left(\frac{\Delta\mu}{M}_{n-1}\right)$$

En el programa adjunto se ha tomado M = 10, e $\Delta\mu$= 1

4.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

El programa consta de una subrutina BESJ, que calcula las funciones de Bessel de primera especie de orden 0 y 1; y un programa principal que calcula primero las soluciones de la ecuación trascendente(5) y a continuación los valores de la temperatura para los distintos radios de una sección transversal del cilindro para una sucesión de valores del tiempo t.

El programa se interrumpe cuando la temperatura en el eje del cilindro difiere de la temperatura del fluido circundante en un tanto por uno que puede fijar arbitrariamente el usuario.

5.- DESCRIPCION DE LAS VARIABLES.

VARIABLES DE ENTRADA

CONVEC: Coeficiente de convección (kcal/h.m^2.ºC)
CONDUC: Conductividad térmica del material (kcal/h.m.ºC)
DENS : Densidad del material (kg/m^3)
CALE : Calor específico del material (kcal/kg.ºC)
RADIO : Radio del cilindro (m.)
TETAA : Temperatura del fluído circundante (ºC)

TETAO: Temperatura inicial del cilindro (ºC)
TIMEI: Intervalo inicial de tiempo (horas)
D : Aproximación deseada en las funciones de Bessel
ERROR: Aproximación deseada en el cálculo de los valores de μ_k
TOL : Aproximación del último nivel de tiempo al estacionario en tanto por uno
CORR.: Coeficiente corrector de los intervalos de tiempo en los que se calcula la temperatura.

VARIABLES DE SALIDA

RMU(I): Conjunto de los valores de μ_k obtenidos
ALFA : Difusibilidad térmica (m^2/h.)
FUC : Valor del nº adimensional (hR/k)
TIME : Tiempo en horas para el cual se calcula una distribución de temperaturas en el cilindro.
RAD : Distancia al eje del cilindro, en tanto por uno.
TEMP : Temperatura (ºC)

CONCLUSION

El apéndice I incluye el listado de la subrutina BESJ, y el II el listado del programa principal.

Como ejemplo ilustrativo de la distribución de temperaturas en régimen transitorio se han resuelto dos casos extremos.

a) un cilindro de material conductor con las siguientes caracteristicas:

Radio = 0,1 m	k = 320 kcal/hr. m
T_b = 500 ºC	ρ = 8900 kg/m^3
T_a = 20 ºC	c = 0,098 kcal/kg ºC
h_a = 50 kcal/hr. m^2 ºC	α = 0,367 m^2/hr.

y las siguientes variables de control del programa:

ERROR = 0,0001 CORR = 2,0

D = 0,001 TOL = 0,05

b) un cilindro de material refractario, de las siguientes caracteristicas:

Radio	= 0,1 m	k	= 1,2 kcal/hr. m ºC
T_b	= 500 ºC	ρ	= 1500 kg/m^3
T_a	= 20 ºC	c	= 0,300 kcal/kg ºC
h_a	= 50 kcal/hr. m^2 ºC	α	= 0,002 m^2/hr.

y las siguientes variables de control del programa:

ERROR = 0,0001 CORR = 2,0

D = 0,001 TOL = 0,05

Los resultados obtenidos se han presentado gráficamente, ver figs. 4 y 5.

NOMENCLATURA

T_b = Temperatura inicial del cilindro en ºC

T_a = Temperatura del fluido circundante en ºC

t = Tiempo en horas

θ = $T - T_a$ en ºC

θ_b = $T_b - T_a$ en ºC

R = Radio del cilindro en m

h_a = Coeficiente individual de transmisión de calor (sólido-fluído). en kcal/hr. m^2 ºC

k = Conductividad térmica del cilindro en kcal/hr. m ºC

c = Calor específico del cilindro en kcal/kg. ºC

ρ = Densidad del cilindro en kg /m^3

α = Difusibilidad térmica en m^2/hr.

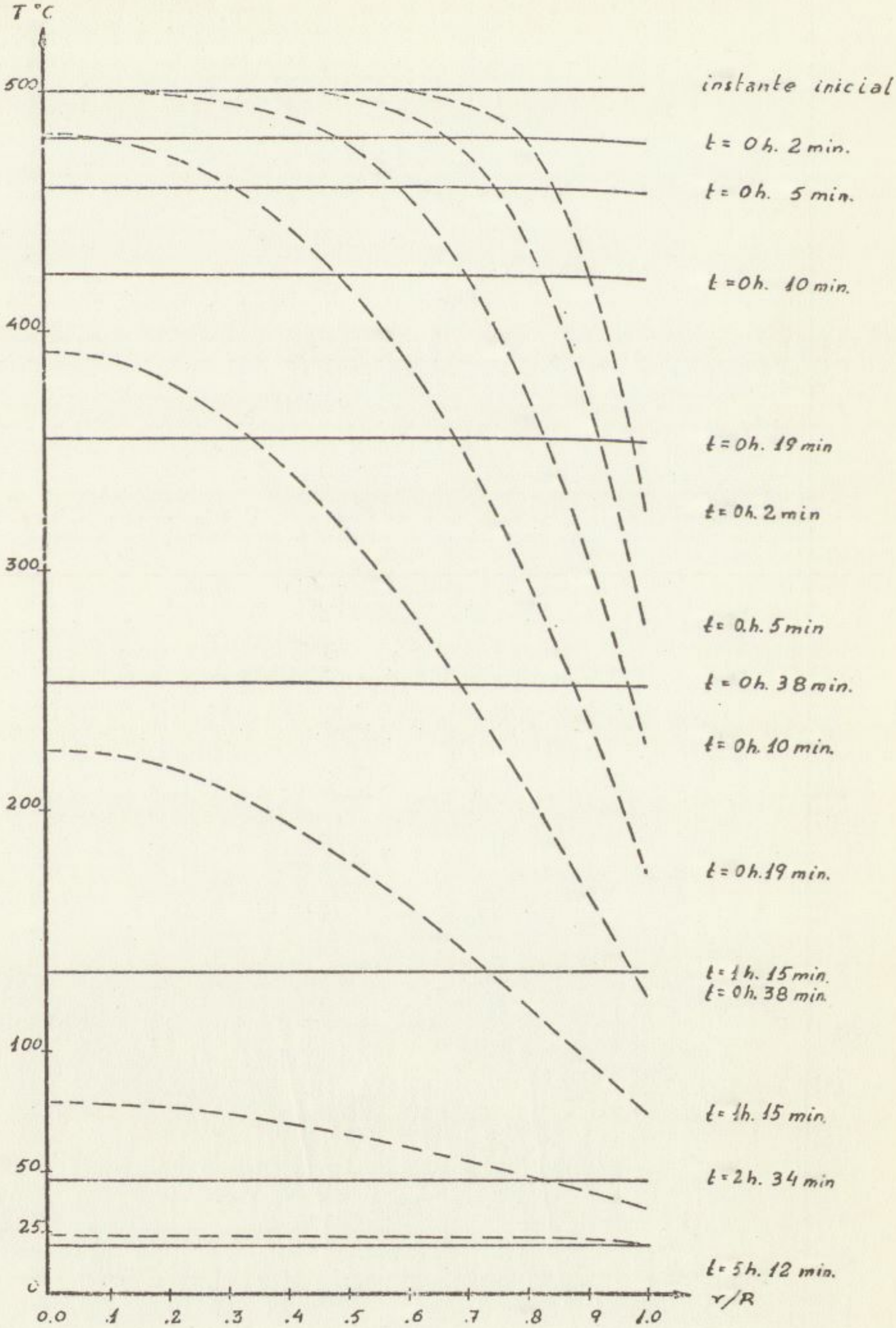

Gráfico nº 4

———— Material buen conductor

- - - - - - Material refractario

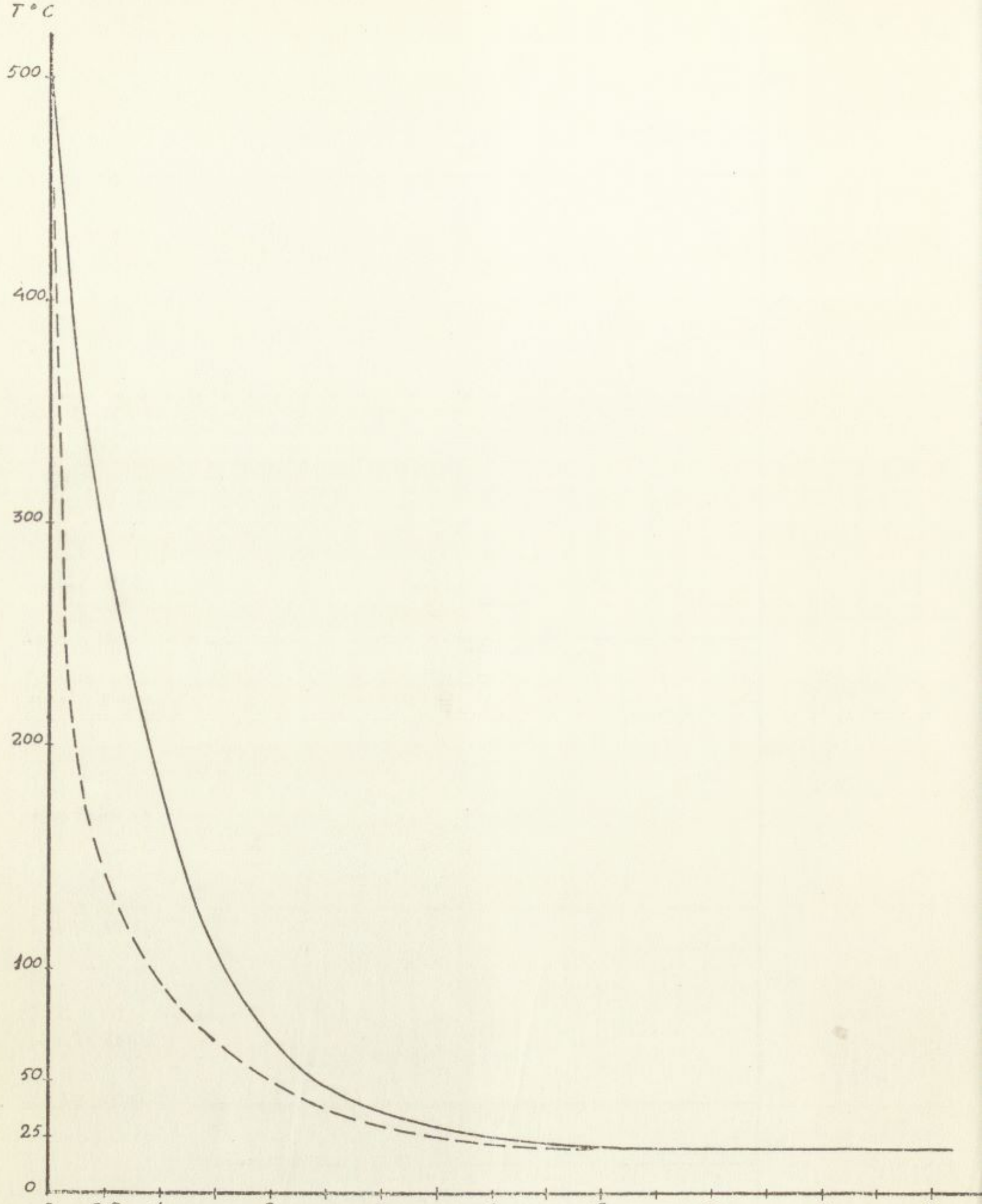

Gráfico nº 5

———— material buen conductor

------ material refractario

```
C
C     ESTE PROGRAMA CALCULA LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN UNA
C     BARRA CILINDRICA CUALQUIERA CON CONVECCION, EN REGIMEN NO ESTA-
C     CIONARIO.
C
C     DATOS QUE DEBEN INTRODUCIRSE
C
C     RADIO=RADIO DEL CILINDRO
C     DENS=DENSIDAD DEL MATERIAL, SUPUESTO HOMOGENEO.
C     CONDUC=CONDUCTIVIDAD TERMICA.
C     CALE=CALOR ESPECIFICO.
C     CONVEC=COEFICIENTE DE CONVECCION CON EL MEDIO.
C     TETAO=TEMPERATURA INICIAL DEL CILINDRO.
C     TETAA=TEMPERATURA DEL MEDIO.
C     TIMEI=TIEMPO INICIAL.
C     ERROR=APROXIMACION CON LA QUE DESEAMOS OBTENER LAS RMU(I).
C     D=APROXIMACION EN LA OBTENCION DE LAS SOLUCIONES DE BESSEL.
C     CORR=FACTOR QUE INCREMENTA EL TIEMPO.
C
C     VARIBLES DE SALIDA.
C
C     TIME(L)=INSTANTE EN EL CUAL SE CALCULA LA TEMPERATURA,
C     RAD(J)=FRACCIONES DECIMALES DEL RADIO
C     TEMP(L,J)=TEMPERATURA CORRESPONDIENTE A UN RADIO Y UN TIEMPO.
C     RMU(I)=SOLUCIONES DE LA ECUACION TRASCENDENTE
C     RMU=(CONVEC*RADIO/CONDUC)(BESSEL(N=0,X=RMU)/BESSEL(N=1,X=RMU))
C     TOL=MAXIMA TOLERANCIA EN TANTO POR UNO ADMITIDA,PARA ALCANZAR EL
C     REGIMEN ESTACIONARIO.
C
C
C     ESTA SUBRUTINA CALCULA LAS FUNCIONES DE BESSEL.
C                                                         (APENDICE I )
      SUBROUTINE BESJ(X,N,BJ,D,IER)
      BJ=.0
      IF(N) 10,20,20
   10 IER=1
      RETURN
   20 IF(X) 30,30,31
   30 IER=2
      RETURN
```

```
   31 IF(X-15.) 32,32,34
   32 NTEST=20.+10.*X-X**2/3
      GO TO 36
   34 NTEST=90.+X/2.
   36 IF(N-NTEST) 40,38,38
   38 IER=4
      RETURN
   40 IER=0
      N1=N+1
      BPREV=.0
      IF(X-5.) 50,60,60
   50 MA=X+6.
      GO TO 70
   60 MA=1.4*X+60./X
   70 MB=N+IFIX(X)/4+2
      MZERO=MAX0(MA,MB)
      MMAX=NTEST
  100 DO 190 M=MZERO,MMAX,3
      FM1=1.0E-28
      FM=.0
      ALPHA=.0
      IF(M-(M/2)*2) 120,110,120
  110 JT=-1
      GO TO 130
  120 JT=1
  130 M2=M-2
      DO 160 K=1,M2
      MK=M-K
      BMK=2.*FLOAT(MK)*FM1/X-FM
      FM=FM1
      FM1=BMK
      IF(MK-N-1) 150,140,150
  140 BJ=BMK
  150 JT=-JT
      S=1+JT
  160 ALPHA=ALPHA+BMK*S
      BMK=2.*FM1/X-FM
      IF(N) 180,170,180
  170 BJ=BMK
  180 ALPHA=ALPHA+BMK
```

```
          BJ=BJ/ALPHA
          IF(ABS(BJ-BPREV)-ABS(D*BJ)) 200,200,190
      190 BPREV=BJ
          IER=3
      200 RETURN
          END
```

```
DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-5        MAINPGM          DATE   26/10/72     TIME    18.37.45       PAGE 0001

      C
      C      CALCULO DE LAS RMU(I)
      C
             DIMENSION RMU(10),TIME(30),RAD(12),TEMP(30,12)
             READ(1,1) CONVEC,CONDUC,DENS,CALE
             READ(1,2) RADIO,TETAO,TETAA,TIMEI
             READ(1,3) ERROR,D,CORR,TOL
           1 FORMAT(F9.3,F9.5,F7.1,F5.3)
           2 FORMAT(F5.3,F7.1,F6.1,F5.3)
           3 FORMAT(F6.4,F6.4,F3.1,F4.2)
           5 FORMAT('0',51X,'TIME=',F6.3///)
           6 FORMAT(4(5X,'RAD=',F4.2,4X,'TEMP=',F6.1)///)
           7 FORMAT('0',44X,'VALORES DE LAS RMU(I) UTILIZADOS')
           8 FORMAT('0',20X,7(F7.3,5X))
           9 FORMAT('0',50X,'DATOS DE ENTRADA')
          10 FORMAT('0',10X,'CONVEC=',F7.3,8X,'CONDUC=',F5.1,7X,'DENS=',F6.1,7X
            1,'CALE=',1X,F5.3)
          11 FORMAT('0',10X,'RADIO=',3X,F5.3,8X,'TETAO=',F6.1,7X,'TETAA=',F5.1,
            17X,'TIMEI=',F5.3)
          12 FORMAT('0',10X,'ERROR=',3X,F6.4,7X,'D=',4X,F6.4,7X,'CORR=',3X,F3.1
            1)
          13 FORMAT('0',10X,'ALFA=',4X,F6.4,7X,'FUC=',2X,F6.4)
             XX=0.0
             XN=1.
             ITER=1
             FINT=1.
             FUC=CONVEC*RADIO/CONDUC
             BJ1=0.0
          81 BJO=1.
             GO TO 83
          50 CONTINUE
             X=XX
             N=0
             CALL BESJ(X,N,BJ,D,IER)
             BJO=BJ
             N=1
             CALL BESJ(X,N,BJ,D,IER)
             BJ1=BJ
          83 Y=FUC*BJO-XX*BJ1
             IF(FINT) 54,55,56
```

(APENDICE II)

```
DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-5          MAINPGM          DATE   26/10/72     TIME    18.37.45      PAGE 0002

         55 CONTINUE
         56 IF(Y) 41,42,43
         54 IF(Y) 43,42,41
         43 XX=XX+XN
            GO TO 50
         41 XX=XX-XN
            XN=XN*0.1
            XX=XX+XN
            IF(XN-ERROR) 42,42,44
         44 GO TO 50
         42 I=ITER
            XX=XX-XN
            RMU(I)=XX
            IF(ITER-7) 52,53,53
         52 ITER=ITER+1
            FINT=FINT*(-1.)
            XX=XX+1.
            XN=1.
            GO TO 50
         53 CONTINUE
C
C           CALCULO DEL TRANSITORIO.
C
            NFIN=29
            NMU=5
            TETAO=TETAO-TETAA
            ALFA=CONDUC/(CALE*DENS)
            TIME(1)=TIMEI
            DO 23 L=1,NFIN
            RAD(1)=0.
            DO 22 J=1,11
            TETAT=0.
            DO 21 I=1,NMU
            X=RMU(I)
            N=1
            CALL BESJ(X,N,BJ,D,IER)
            B=BJ
            N=0
            CALL BESJ(X,N,BJ,D,IER)
            C=BJ
```

```
          X=RMU(I)*RAD(J)
          IF(X) 57,58,59
       58 DR=1.
          GO TO 60
       59 CONTINUE
          CALL BESJ(X,N,BJ,D,IER)
          DR=BJ
       60 DEN=(C*C+B*B)*RMU(I)
          TBES=2.*B*DR/DEN
          REXP=RMU(I)*RMU(I)*ALFA*TIME(L)/(RADIO*RADIO)
          IF(REXP-17.) 71,71,73
       71 REXP=REXP*(-1.)
          TEXP=EXP(REXP)
          GO TO 20
       73 TEXP=0.
       20 TETA=TRES*TEXP
       21 TETAT=TETA+TETAT
          TEMP(L,J)=TETAT*TETAO+TETAA
          RAD(J+1)=RAD(J)+0.1
       22 CONTINUE
          COTA=ABS((TEMP(L,1)-TETAA)/TETAA)
          IF(COTA-TOL) 90,91,91
       90 NFIN=L
          GO TO 92
       91 TIME(L+1)=TIME(L)*CORR
       23 CONTINUE
       92 TETAO=TETAO+TETAA
          WRITE(3,7)
          WRITE(3,8) (RMU(I),I=1,7)
          WRITE(3,9)
          WRITE(3,10) CONVEC,CONDUC,DENS,CALE
          WRITE(3,11) RADIO,TETAO,TETAA,TIMEI
          WRITE(3,12) ERROR,D,CORR
          WRITE(3,13) ALFA,FUC
          DO 100 L=1,NFIN
          WRITE(3,5) TIME(L)
      100 WRITE(3,6) (RAD(J),TEMP(L,J),J=1,11)
       57 STOP
          END
```

BIBLIOGRAFIA.

Georges Goudet - Les fonctions de Bessel. Masson et Cie. Editeurs. 2º Ed. Paris 1965.

Milton Abramowitz, Irene A. Stehuer. - Handbook of Mathematical Functions.Dover Publications, Inc. New York, 1965.

Shao Ti Hsu.-Engineering Heat Transfer. Van Nostrand. New York, 1963.

Gröber-Erk-Grigull.- Transmisión de calor. McGraw-Hill, New York, 1950.

Jakob, M.- Heat Transfer. John Wiley &Sons, Inc. London Sidney, 1964.