A esta generación aleatoria del dibujo podrían añadirse algunas reglas determinísticas (simetrías, inhibición de algunos valores en algunas zonas o en algunas condiciones, etc. ...) a fin de que hubiera un cierto "orden" en el resultado.

SOBRE LOS GIROS QUE TRANSFORMAN UNA FIGURA PLANA EN SI MISMA

Por F. Briones y M. Sánchez Marcos

INTRODUCCION

En el punto 14 de la descripción del programa "Pintura sobre redes moduladas" (Boletín del CCUM, n° 18, págs. 9-10) se dice que, una vez dibujada una malla, el programa buscará todos sus ejes de simetría y todos los giros mediante los cuales dicha malla coincida consigo misma. De hecho sólo es necesario buscar un eje de simetría y el menor de los ángulos de giro, como vamos a ver a continuación:

Sea A una figura tal que mediante un giro de centro B y ángulo $\alpha_1 < 2\pi$, coincide consigo misma.

LEMA 1.- Si A no está constituida por círculos con centro en B, el ángulo α_1 es de la forma $2\pi t/s$, donde t y s son números enteros y primos entre sí.

En efecto: Llamemos α_i al ángulo $i\alpha_1 - 2\pi k_i$, donde k_i ha sido escogido de forma que $0 \leq \alpha_i < 2\pi$.

Pueden ocurrir dos cosas:

a) De entre todos los α_i, hay al menos 2 que coinciden:

$$\alpha_m = \alpha_n$$

$$m\alpha_1 - 2\pi k_m = n\alpha_1 - 2\pi k_n$$

$$\alpha_1 = 2\pi \frac{k_m - k_n}{m - n} = 2\pi \frac{t}{s}$$

b) No hay dos α_i iguales. Como hay infinitas α_i, siempre podremos encontrar dos tan próximas como queramos.

Como la diferencia entre dos giros es un giro, esto quiere decir que existen giros, de ángulo tan pequeño como se quiera por los que A coincide consigo misma y por tanto es una figura con simetría circular.

LEMA 2.- Si t y s son primos entre sí, y el ángulo $\alpha_1 = 2\pi t/s$ es un ángulo de giro de la figura A, también lo es el ángulo $\omega = 2\pi/s$.

En efecto: Sea j_i el primer índice para el que $k_{j_i} = i<t$

$$\alpha_{j_i} = j_i\alpha_1 - 2\pi i = 2\pi \frac{j_i t - si}{s}$$

α_{j_i} no puede ser igual a 0, ya que si lo fuera, tendría que ser

$$j_i t - si = 0$$

$$\frac{t}{s} = \frac{i}{j_i}$$

e i sería igual o múltiplo de t.

Tampoco puede ser $\alpha_{j_i} = \alpha_{j_k}$ para $0<k<i<t$ ya que entonces tendríamos

$$j_i t - si = j_k t - sk$$

$$\frac{t}{s} = \frac{i-k}{j_i - j_k}$$

e $i-k$ tendría que ser igual o múltiplo de t.

Por otra parte, como $0<\alpha_{j_i}<\alpha_1$, tendrá que ser $0<j_i t - si<t$.

Como hay $t-1$ valores distintos de $j_i t - si$ comprendidos entre 0 y t, uno de ellos ha de ser la unidad, c.q.d.

LEMA 3.- Si A es una figura tal que coincide consigo misma mediante dos giros de centro B y ángulos $\alpha=2\pi/s$ y $\beta=2\pi/z$, también coincidirá consigo misma mediante el giro, centrado en B, de ángulo $\gamma=2\pi/w$ donde w es el mínimo común múltiplo de s y z.

En efecto: La suma de dos giros es un giro, por tanto el ángulo $\delta=\alpha+\beta$ será un ángulo de giro de A:

$$\delta = \alpha+\beta = 2\pi \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{z} \right) = 2\pi \frac{s+z}{sz} = 2\pi \frac{t}{w}$$

donde t y w son primos.

Aplicando ahora el LEMA 2, tendremos lo que queríamos demostrar.

LEMA 4.- B es el baricentro de la figura.

Efectivamente: Si es $\alpha=2\pi/s$ un ángulo de giro de la figura A, podremos dividirla en s segmentos iguales con vértice en B. Los baricentros de cada uno de los segmentos estarán situados en los vértices de un polígono regular de s lados y centro en B, con lo que B ha de ser el baricentro de la figura total.

COROLARIO 1. Una figura sólo puede tener un punto girando en torno al cual pueda coincidir consigo misma mediante un ángulo $\alpha<2\pi$.

COROLARIO 2. Encontrado el menor ángulo de giro de una figura, todos los demás son múltiplos de él.

OTRAS CONSIDERACIONES. Si la figura A tiene dos ejes de simetría, el punto en que se cortan es un centro de giro de A. Por tanto todos los ejes de simetría (si hay más de uno) pasan por B.

Si una figura tiene dos ejes de simetría, la segunda se puede siempre efectuar como producto de la primera por un giro. Por tanto basta encontrar uno de ellos y el menor de los giros para tener completamente determinados todos los giros y simetrías de la figura.