UNA PRUEBA DE LOS TEOREMAS DE GÖDEL Y ROSSER

Por José F. Prida

Se presenta aquí una prueba de los teoremas de Gödel y Rosser bajo una formulación más moderna, debida a Rogers (1), en el lenguaje y con las técnicas de la teoría de la computabilidad. El interés del tema, junto con la dificultad grande que el no especialista encontrará en suplir las demostraciones que Rogers omite, ha motivado esta exposición detallada.

INVARIANCIA RECURSIVA

Sea N el conjunto de los números naturales.

DF 1 Dos conjuntos A, B son recursivamente isomorfos si existe una función recursiva uno a uno f tal que $f(A) = B$.

Sea $\bar{A}$ el complemento de A.

TH 1 A recursivamente isomorfo a B implica $\bar{A}$ recursivamente isomorfo a $\bar{B}$.

Dem.: Inmediato.

DF 2 Una propiedad de conjuntos de números es recursivamente invariante si el que la posea un conjunto implica que la poseen todos sus recursivamente isomorfos.

RECURSIVIDAD ENUMERABLE

DF 3 Un conjunto $A \subset N^k$ es recursivamente enumerable si existe un conjunto recursivo $B \subset N^{k+1}$ tal que

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in A \iff \exists y \langle x_1, x_2, \dots, x_k, y \rangle \in B .$$

---

(1) Cfr. Rogers, H. Theory of recursive functions and effective computability. Mc Graw-Hill Co. New York 1967, pp. 96 ss.

Como es bien sabido, se verifica:

TH 2 Las siguiente proposiciones son equivalentes:

1. A es recursivamente enumerable.
2. A = ∅ o A es el rango de una función recursiva.
3. A es el dominio de una función recursiva parcial.
4. A es axiomatizable.

TH 3 La propiedad de ser recursivamente enumerable es recursivamente invariante.

Dem.: Si A es rec. enum. y B es isomorfo a A, existen funciones recursivas f y g tales que g(N) = A y f(A) = B, con lo que f.g (N) = B, f.g recursiva.

TH 4 La intersección de dos conjuntos recursivamente enumerables es recursivamente enumerable.

Dem.:

Si A y B son rec. enum. existen funciones recursivas parciales f y g tales que

A = dominio de f

B = dominio de g ,

con lo que $A \cap B$ es el dominio de la función recursiva parcial

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \text{ converge y } g(y) \text{ converge} \\ \text{indefinida} & \text{en los demás casos .} \end{cases}$$

TEOREMA DE KLEENE

En una determinada y fija numeración efectiva del conjunto de todos los algoritmos se denotará por P_x el algoritmo de lugar x, por $\psi_x^{(k)}$ la función de k argumentos determinada por P_x y por W_x el dominio de $\psi_x^{(k)}$.

TH 5 Para todo m, n 1 , existe una función recursiva total i con m+n argumentos tal que para todo x, $y_1, \ldots, y_m$, $z_1, \ldots, z_n$

$$\psi_x^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \psi_{i(x, y_1, \ldots, y_m)}(z_1, \ldots, z$$

Dem.: Cfr. Kleene, S. C. Introduction to Metamathematics, 5.ª ed. North -Holland Publ. Co. Amsterdam 1964, p. 342.

PRODUCTIVIDAD

DF 4 Un conjunto A es productivo si existe una función recursiva parcial h (llamada función productiva de A) tal que para todo x

$$W_x \subset A \Rightarrow \left[h(x) \text{ definida y } h(x) \in A - W_x\right] .$$

TH 6 La propiedad de ser productivo es recursivamente invariante.

Dem.:

Sea A productivo, h la función productiva de A y f una función recursiva uno a uno tal que f(A) = B. Sea

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi_x(f(y)) \text{ converge} \\ \text{indefinida en los demás casos} & \end{cases}$$

Claramente g es recursiva parcial y en consecuencia (cfr. TH 5) existe una función recursiva total i tal que

$$\psi_{i(x)}(y) = g(x,y)$$

con lo que $W_{i(x)} = f^{-1}(W_x)$.

Es ahora inmediato probar que f.h.i es la función productiva de B, ya que

$$W_x \subset B \Rightarrow f^{-1}(W_x) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow W_{i(x)} \subset A \Rightarrow$$

$$h.i\ (x) \in A - W_{i(x)} \Rightarrow f.h.i\ (x) \in f(A) - f(W_{i(x)})$$

$$\Rightarrow f.h.i\ (x) \in B - W_x \qquad \text{Q.E.D.}$$

TH 7 Ningún conjunto productivo es recursivamente enumerable.

Dem.:

Sea h la función productiva de A. Si A fuera recursivamente enumerable $\exists x(A = W_x)$, con lo que h(x) estaría definida y $h(x) \varepsilon A-W_x = \emptyset$, contradicción.

TH 8 Para conjuntos cualesquiera A,B se verifica:

$[B \text{ rec. enum. y } A \cap B \text{ productivo}] \Rightarrow A \text{ productivo}$.

Dem.:

Sea h la función productiva de $A \cap B$ y I tal que $W_I = B$. Definimos

$$g(x,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi_x(z) \text{ conv. y } \psi_I(z) \text{ conv.} \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Puesto que g es recursiva parcial , por TH 5 existe una f.r.total i tal que $g(x,z) = \psi_{i(x)}(z)$, siendo en consecuencia $W_{i(x)} = W_x \cap W_I$. h.i es la función productiva de A, ya que para todo x

$$W_x \subset A \Rightarrow W_x \cap W_I \subset A \cap W_I \Rightarrow W_{i(x)} \subset A \cap B \Rightarrow$$

$$h.i(x) \varepsilon A \cap B - W_{i(x)} = (A \cap B) - (W_x \cap B) = (A - W_x) \cap B$$

$$\Rightarrow h.i(x) \varepsilon A - W_x \qquad \text{Q.E.D.}$$

TH 9 El conjunto $\bar{K} = \{x \,/\, \psi_x(x) \text{ diverge}\}$ es productivo.

Dem.:

$\bar{K}$ tiene como productiva la función idéntica, ya que

$$W_x \subset \bar{K} \Rightarrow \forall y \left[\psi_x(y) \text{ converge} \Rightarrow \psi_y(y) \text{ diverge}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\psi_x(x) \text{ converge} \Rightarrow \psi_x(x) \text{ diverge}\right] \Rightarrow \psi_x(x) \text{ diverge} \Rightarrow$$

$x \varepsilon \bar{K} - W_x$.

CREATIVIDAD

DF 5 Un conjunto es creativo si es recursivamente enumerable y su complementario es productivo.

TH 10 La propiedad de ser creativo es recursivamente invariante.

Dem.: Consecuencia inmediata de TH1, TH 3 y TH 6.

TH 11 Si un conjunto es creativo no es recursivo.

Dem.:

A creativo $\Rightarrow$ $\bar{A}$ productivo $\Rightarrow$ $\bar{A}$ no rec. enum. $\Rightarrow$ $\bar{A}$ no recursivo $\Rightarrow$ A no recursivo.

TH 12 El conjunto $K = \{x \,/ \psi_x(x) \text{ converge}\}$ es creativo.

Dem.:
Por TH 9 es suficiente probar que K es recursivamente enumerable. Y esto es obvio, al ser el dominio de la f.r. parcial

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi_x(x) \text{ converge} \\ \text{indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

INSEPARABILIDAD

DF 6 Dos conjuntos A, B disjuntos $A \subset N$, $B \subset N$ son efectivamente inseparables si existe una función recursiva parcial de dos variables f tal que para todo x, y

$$[A \subset W_x \text{ y } B \subset W_y \text{ y } W_x \cap W_y = \emptyset] \Rightarrow$$

$f(x,y)$ está definida y $f(x,y) \in \overline{W_x \cup W_y}$.

TH 13 Dos conjuntos A, B recursivamente enumerables y efectivamente inseparables son productivos.

Dem.:
Bastará probar que $\bar{A}$ es productivo.

Sean a, b tales que $A = W_a$ y $B = W_b$ y sea g la función recursiva parcial

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi_x(y) \text{ conv. o } \psi_b(y) \text{ conv.} \\ \text{indefinida} & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Por TH 5 existe una función recursiva total i tal que $\psi_{i(x)}(y) = g(x,y)$, con lo que $W_{i(x)} = W_x \cup W_b$.

De la inseparabilidad de A y B y de las relaciones $A \subset W_a$, $B = W_b \subset W_{i(x)}$ se sigue que existe una función recursiva parcial f tal que $f(a,i(x)) \in \overline{W_a \cup W_{i(x)}}$ $= \overline{W}_a \cap \overline{W}_x \cap \overline{W}_b \subset \overline{W}_a \cap \overline{W}_x = \overline{A} - W_x$, lo que implica que que $\overline{A}$ es productivo con $h(x) = f(a, i(x))$ como función productiva.

TH 14 Para conjuntos cualesquiera A, B, C, si A, B son efectivamente inseparables y $A \subset C \subset \overline{B}$, entonces también lo son B, C.

Dem.: Inmediato.

TH 15 Para conjuntos cualesquiera recursivamente enumerables A, B, C , si A, B son efectivamente inseparables y $A \subset C \subset \overline{B}$, entonces C es creativo.

Dem.: Por TH 13 B, C son efect. insep. y en consecuencia creativos por TH 12.

TH 16 Los conjuntos $A_o = \{x / \psi_x(x) = 0\}$ y $A_1 = \{x / \psi_x(x) = 1\}$ son efectivamente inseparables.

Dem.:

Sea g(u,v,y) la función recursiva parcial definida del siguiente modo: se computan simultaneamente (pasos de cálculo alternados) $P_u(y)$ y $P_v(y)$. Si $P_u(y)$ converge primero, $g(u,v,y) = 1$; si $P_v(y)$ converge primero, $g(u,v,y) = 0$; si ambos divergen, g(u,v,y) es indefinido.

Sea $i(u,v)$ la función recursiva total (cfr. TH 5) tal que $\psi_{i(u,v)}(y) = g(u,v,y)$. i es la función que prueba la inseparabilidad de A_0 y A_1 ya que

$$\left[A_0 \subset W_u \text{ y } A_1 \subset W_v \text{ y } W_u \cap W_v = \emptyset\right] \Longrightarrow i(u,v) \in \overline{W}_u$$

(y análogamente $i(u,v) \in \overline{W}_v$) ya que

$$i(u,v) \in W_u \Rightarrow i(u,v) \in W_u \cap \overline{W}_v \Rightarrow g(u,v,i(u,v)) = 1 \Rightarrow$$

$$\psi_{i(u,v)}(i(u,v)) = 1 \Rightarrow i(u,v) \in A_1 \Rightarrow i(u,v) \in W_v,$$

contra la hipótesis de ser $W_u \cap W_v = \emptyset$.

TH 17 Los conjuntos A_0 y A_1 son recursivamente enumerables.

Dem.: Inmediato.

De TH 15, TH 16 y TH 17 se sigue:

CR 17 Todo conjunto recursivamente enumerable U tal que $A_0 \subset U \subset \overline{A}_1$ es creativo.

****

NUMERACION DE LAS FORMULAS ARITMETICAS

Como es sabido, puede definirse una aplicación uno a uno y efectivamente computable g del conjunto de los números naturales en el conjunto F de las fórmulas aritméticas. Un procedimiento consiste en numerar los símbolos lógicos y aritméticos, con lo que, si $p(n)$ es el número primo de lugar n, a la fórmula $\alpha = s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_n}$ se hace corresponder el número $h(\alpha) = p(1)^{k_1} . p(2)^{k_2} \ldots p(n)^{k_n}$. Denotando por $\mu x [x \in A]$ el menor x tal que $x \in A$, g viene definida por

$$g(0) = h^{-1}(\mu x [x \in h(F)])$$

$$g(n+1) = h^{-1}(\mu x [x \in h(F) \text{ y } h^{-1}(x) \notin \{g(0), \ldots, g(n)\}]) .$$

Obviamente g es uno a uno y computable.

Para toda fórmula α el número natural $g^{-1}(\alpha)$ será denotado por α^*.

Para todo conjunto de fórmulas G el conjunto $\{\alpha^* / \alpha\varepsilon G\}$ será denotado por G^*.

DF 7 Se dirá que un conjunto de fórmulas G es recursivo (respectivamente recursivamente enumerable, productivo, creativo) si lo es G^*.

IMPOSIBILIDAD DE AXIOMATIZAR LA ARITMETICA INTUITIVA

Sea $\alpha(x,y,z)$ la fórmula aritmética que expresa la relación $P_x(y)$ converge en menos de z pasos y sea $\beta(x) = \exists z\alpha(x,x,z)$.

Definamos los conjuntos de fórmulas

$$B = \{\beta(y) / y\varepsilon N\}$$

$$B_{\bar{K}} = \{\beta(y) / y\varepsilon \bar{K}\}$$

$$B' = \{\neg\beta(y) / y\varepsilon N\}$$

$$B'_{\bar{K}} = \{\neg\beta(y) / y\varepsilon \bar{K}\}$$

$$V = \{ \alpha / \alpha \text{ verdadera}\}$$

$$X = \{ \alpha / \alpha \text{ falsa}\}$$

Obviamente $B^*_{\bar{K}}$ y $B'^*_{\bar{K}}$ son recursivamente isomorfos a $\bar{K}$ y en consecuencia (cfr. TH 6 y TH 9) productivos. Además, B^* y B'^* son claramente recursivos.

Puesto que $x\varepsilon\bar{K} \Leftrightarrow \beta(x)$ falsa $\Leftrightarrow \neg\beta(x)$ verdadera

(*) $$B^*_{\bar{K}} = B^* \cap X^*$$

(**) $$B'^*_{\bar{K}} = B'^* \cap V^* \quad .$$

De estas dos relaciones y de TH 8 se sigue que los conjuntos V^* y X^* son productivos y en consecuencia por isomorfía, se tiene:

TH 18 El conjunto de las fórmulas ariméticas verdaderas es productivo.

TH 19 El conjunto de las fórmulas aritméticas falsas es productivo.

Puesto que un conjunto productivo no es recursivamente enumerable y, por tanto, tampoco recursivo, se sigue de TH 18:

CR 18.1 El conjunto de las fórmulas aritméticas verdaderas no es axiomatizable.

CR 18.2 El conjunto de las fórmulas aritméticas verdaderas no es decidible.

De CR 18.1 se sigue que cualquier axiomatización de la aritmética intuitiva es inadecuada: o son derivables fórmulas no verdaderas o hay fórmulas verdaderas no derivables. Mediante la función productiva de V, a partir de cualquier lista (finita o infinita) de fórmulas verdaderas se obtiene una fórmula verdadera que no está en la lista.

TEOREMA DE GÖDEL

Sea ZL un conjunto de reglas lógicas y de axiomas para los números naturales y la aritmética. Se denotará por $ZL \vdash \alpha$ el que la fórmula α sea derivable en ZL. Se utilizarán como símbolos lógicos: $\neg$ (negacion), $\rightarrow$ (implicación), $\bigvee$ (cuantificador existencial) y $\bigwedge$ (cuantificador universal). El número natural x_k será representado por $\bar{x}_k$ y $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ serán utilizados como variables.

El sistema ZL de axiomas y de reglas no será especificado y únicamente se supondrá que - como demostró Gödel para el sistema concreto definido en los Principia Mathematica (2)- toda relación recursiva

(2) Cfr. Gödel, K. Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte für Mathematik und Physik vol. 38 (1931) pp. 173-198.

es representable en el mismo, i.e.: para toda relación recursiva R con k argumentos, existe una fórmula ρ con k variables libres tal que para todo x_1, $x_2, \ldots, x_k$

$$R\, x_1x_2\ldots x_k \Rightarrow ZL \vdash \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$$

$$\text{No } R\, x_1x_2\ldots x_k \Rightarrow ZL \vdash \neg\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$$

DF 8 Un sistema es consistente si no toda fórmula es demostrable en él.

DF 9 Un sistema es ω-consistente si para ninguna fórmula α son demostrables $\neg\alpha(\bar{0})$, $\neg\alpha(\bar{1})$, $\neg\alpha(\bar{2})$, ... y $\bigvee\bar{x}\alpha(\bar{x})$.

Es claro que la ω-consistencia de un sistema implica su consistencia.

Sea $\mu(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ el representante formal de la relación recursiva

$Mxyz \Leftrightarrow P_x(y)$ converge en menos de z pasos; y sea $\rho(\bar{x}) = \bigvee\bar{z}\mu(\bar{x},\bar{x},\bar{z})$. Bajo la hipótesis de la ω-consistencia de ZL se tiene:

$x\varepsilon K \Rightarrow P_x(x)$ converge $\Rightarrow \exists z Mxxz \Rightarrow ZL \vdash \mu(\bar{x},\bar{x},\bar{z})$
$\Rightarrow ZL \vdash \bigvee\bar{z}\mu(\bar{x},\bar{x},\bar{z}) \Rightarrow ZL \vdash \rho(\bar{z})$.

$x\not\varepsilon K \Rightarrow P_x(x)$ diverge $\Rightarrow$ No Mxxz para todo z $\Rightarrow$
$ZL \vdash \neg\mu(\bar{x},\bar{x},\bar{0})$, $ZL \vdash \neg\mu(\bar{x},\bar{x},\bar{1})$, $ZL \vdash \neg\mu(\bar{x},\bar{x},\bar{2})$, ...
$\Rightarrow$ No $ZL \vdash \bigvee z\alpha(\bar{x},\bar{x},\bar{z}) \Rightarrow$ No $ZL \vdash \rho(\bar{x})$

Así pues,

(***) $$x\varepsilon\bar{K} \Leftrightarrow \text{No } ZL \vdash \rho(\bar{x})$$

Sean los conjuntos

$D = \{ \alpha / ZL \vdash \alpha \}$

$R = \{ \rho(\bar{x}) / x \varepsilon N \}$

$R_{\bar{K}} = \{ \rho(\bar{x}) / x \varepsilon \bar{K} \}$

$R' = \{ \neg \rho(\bar{x}) / x \varepsilon N \}$

Claramente R^* y R'^* son recursivos, $R^*_{\bar{K}}$ productivo (por ser isomorfo a $\bar{K}$) y D^* recursivamente enumerable (por ser D axiomatizable). Puesto que por (***)

$$R^*_{\bar{K}} = R^* \cap \overline{D^*}$$

se sigue de TH 8 que $\overline{D^*}$ es productivo y en consecuencia D^* creativo. Así pues, por isomorfía, se tiene:

TH 20 Si ZL es ω-consistente, el conjunto D de las fórmulas demostrables es creativo.

De TH 20 se sigue por TH 11:

CR 20 Si ZL es ω-consistente, el conjunto de las fórmulas demostrables no es recursivo (Gödel).

CONSTRUCCION DE UNA FORMULA INDECIDIBLE

Sea
$$S^* = \{\rho(\bar{x})^* / ZL \vdash \neg \rho(\bar{x})\} .$$

Puesto que S^* es isomorfo a $S'^* = \{\neg \rho(\bar{x})^* / ZL \vdash \neg \rho(\bar{x})\} = R'^* \cap D^*$ y R'^* y D^* son recursivamente enumerables, también lo es S^* y por tanto existe un s tal que

(**) $$S^* = W_s \quad .$$

Además

(*****) $$S^* \subset R^*_{\bar{K}}$$

ya que para todo $x \varepsilon N$

$$x \varepsilon S^* \Rightarrow \exists x_o \left[x = \rho(\bar{x}_o)^* \text{ y } ZL \vdash \neg \rho(\bar{x}_o)\right]$$

$$\Rightarrow \exists x_o \left[x = \rho(\bar{x}_o)^* \text{ y No } ZL \vdash \rho(\bar{x}_o) \right] \Rightarrow x \varepsilon R^*_{\bar{K}} .$$

Si h es la función productiva de $R^*_{\bar{K}}$, de $\binom{**}{**}$ y $\binom{**}{***}$ se sigue que h(s) está definido y h(s)$\varepsilon R^*_{\bar{K}} - S$ y en consecuencia $\exists x_1 [h(s) = \rho(\bar{x}_1)^*$ y $x_1 \varepsilon \bar{K}$ y No $ZL \vdash \neg \rho(\bar{x}_1)]$. Puesto que $x_1 \varepsilon \bar{K}$ implica por (***) No $ZL \vdash \rho(\bar{x}_1)$, se obtiene el teorema de Gödel:

TH 21 Si ZL es ω-consistente, es incompleto. $\rho(\bar{x}_1)$ es un ejemplo de fórmula indecidible (fórmula tal que ni ella ni su negación son demostrables en ZL).

De las dos fórmulas $\rho(\bar{x}_1)$ y $\neg\rho(\bar{x}_1)$ es falsa la primera y verdadera la segunda, al expresar la relación cierta $x_1 \varepsilon \bar{K}$.

TEOREMA DE ROSSER

Sean M, μ, A_0, A_1, D, D^* la relación, la fórmula y los conjuntos ya definidos. Siendo A_0 y A_1 recursivamente enumerables, existen x_o y X_1 tales que $A_o = W_{x_o}$ y $A_1 = W_{x_1}$. Puesto que A_0 y A_1 son disjuntos,

$$\forall y (\exists t M x_1 y t \Rightarrow \text{No } \exists z M x_o y z) \quad .$$

Supongamos que esta relación es demostrable en ZL, i.e. que se verifica

$$\binom{***}{***} \qquad ZL \vdash \bigwedge \bar{y} (\bigvee \bar{t} \mu(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{t}) \rightarrow \neg \bigvee \bar{z} \mu(\bar{x}_o, \bar{y}, \bar{z}))$$

(la demostración depende de los índices x_o y x_1 escogidos para A_o y A_1 y de la peculiar estructura de μ, de la que se ha prescindido aquí).

Sean

$$U = \{y \ / \ ZL \vdash \bigvee \bar{z} \mu(\bar{x}_o, \bar{y}, \bar{z})\}$$

$$V = \{y \ / \ ZL \vdash \neg \bigvee \bar{z} \mu(\bar{x}_o, \bar{y}, \bar{z})\}.$$

Ambos conjuntos son recursivamente enumerables, ya que

U es isomorfo a $\{\bigvee \bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z})^* \ / \ ZL \vdash \bigvee \bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z})\}$, que es la intersección del conjunto recursivamente enumerable D^* con el recursivo $M = \{\bigvee z\mu(x_0,y,z)^* \ / \ y\epsilon N\}$; y análogamente V.

Además, por la consistencia de ZL, $U \cap V = \emptyset$.

Por último, se verifican las relaciones $A_o \subset U$, $A_1 \subset V$, ya que para todo y

$y \ \epsilon A_o \ \Rightarrow \ \exists z M x_o y z \ \Rightarrow \ ZL \vdash \ \mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z}) \ \Rightarrow$

$ZL \vdash \ \bigvee \bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z}) \ \Rightarrow \ y \ \epsilon U$.

$y \ \epsilon A_1 \ \Rightarrow \ \exists t M x_1 y t \ \Rightarrow \ ZL \vdash \ \mu(\bar{x}_1,\bar{y},\bar{t})$

$ZL \vdash \ \bigvee \bar{t}\mu(\bar{x}_1,\bar{y},\bar{t})$ que implica por $\binom{***}{***}$

$ZL \vdash \neg \bigvee \bar{t}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z}) \ \Rightarrow \ y \ \epsilon V$.

Así pues, U, V, A_o, A_1 son recursivamente enumerables y verifican

$$A_o \subset U \subset \bar{V} \subset \bar{A}_1$$

lo que implica por CR 17 que U es creativo y en consecuencia $\bar{U}$ productivo. Así pues, por isomorfía, es productivo el conjunto

$$\hat{U}^* = \{ \bigvee \bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z})^* \ / \ \text{No} \ \ ZL \vdash \bigvee \bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z}) \ = M^* \cap \overline{D^*}$$

con lo que (cfr. TH 8) $\overline{D^*}$ es productivo y por tanto D^* creativo. Así pues se verifica:

TH 22 Si ZL es consistente, el conjunto de las fórmulas demostrables es creativo.

TH 23 Si ZL es consistente, el conjunto de las fórmulas indemostrables es productivo.

CR 22 Si ZL es consistente, el conjunto de las fórmulas demostrables no es recursivo (Rosser).

CONSTRUCCION DE UNA FORMULA INDECIDIBLE

Sea

$$\hat{V}^* = \{ \bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z})^* \ / \ ZL \vdash \neg \bigvee\bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y},\bar{z}) \} \quad .$$

$\hat{V}^*$ es recursivamente enumerable por ser recursivamente isomorfo a V y por tanto existe $v \varepsilon N$ tal que $V = W_v$. Además $\hat{V}^* \subset \hat{U}^*$ como consecuencia de la consistencia de ZL, por lo que, si h es la función productiva de $\hat{U}^*$, h(v) está definido y $h(v) \varepsilon \hat{U}^* - \hat{V}^*$ lo que implica

$$\exists y_o \left[h(v) = \bigvee\bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y}_o,\bar{z})^* \text{ y No } ZL \vdash \bigvee\bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y}_o,\bar{z}) \text{ y} \right.$$
$$\left. \text{No } ZL \vdash \neg\bigvee\bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y}_o,\bar{z}) \right] \ ,$$

con lo que se tiene:

TH 24 Si ZL es consistente, es incompleto y $\bigvee\bar{z}\mu(\bar{x}_o,\bar{y}_o,\bar{z})$ es un ejemplo de fórmula indecidible (Rosser).