UNA APLICACION DE LAS MATRICES DE JORDAN A LA RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES EN DIFERENCIAS FINITAS

Por Martín Sánchez Marcos y Pedro Díaz Muñoz.

1- RESULTADOS PRELIMINARES

Un sistema lineal en diferencias es una expresión de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} z^1_{k+1} = a_{11}(k)z^1_k + \dots + a_{1n}(k)z^n_k + g_1(k) \\ \text{-------------------------------------} \\ z^n_{k+1} = a_{n1}(k)z^1_k + \dots + a_{nn}(k)z^n_k + g_n(k) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

donde a_{ij} y g_j son funciones definidas en el conjunto de los números naturales y con valores reales o complejos. El sitema se puede escribir también en la forma matricial:

$$(\overline{z}_{k+1})^t = A(k)(\overline{z}_k)^t + (\overline{g}_{(k)})^t \qquad (2)$$

Definición 1. Decimos que la sucesión:

$$\left\{(\overline{z}_k)\right\}_{K \in N} = \left\{(z^1{}_k, \dots, z^n_k)\right\}_{K \in N}$$

es una solución del sistema lineal en diferencias si para todo valor de k se satisface (1).

En el siguiente teorema se demuestra la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema lineal en diferencias, para una condición inicial fija.

Teorema 1. Dado el sistema lineal en diferencias (1), existe una única solución de dicho sistema que verifica las condiciones iniciales -- $\overline{z}_o = \overline{z}_{(o)}$

Demostración

Por recurrencia:

k=1 $\qquad \overline{z}_1 = A(o)\overline{z}_o + g_o$

Supuesto cierto para k = r-1. Se tendrá para r:

$$\overline{Z}_r = A(r-1)\overline{Z}_{r-1} + g\ (r-1)$$

y el vector $\overline{Z}_r$ obtenido será por tanto único para todo r.

Nota. En las ecuaciones en diferencias se podrá fijar la condición inicial en cualquier punto de la solución Z_k; sin embargo esto no siempre se puede hacer aquí ya que al tomar como condición inicial $\overline{Z}_k = \overline{Z}_{(k)}$ siendo $k \geqslant 1$, habrá que resolver el sistema de ecuaciones lineales (1) para encontrar el vector $\overline{Z}_{k-1}$ y para que dicho sistema tenga solución única será necesario y suficiente que $|A(k)| \neq o$; se tiene por tanto el siguiente corolario.

Corolario 1 Partiendo en el sistema (1) de la condición inicial $\overline{Z}_k = \overline{Z}_{(k)}$ existe una única solución si y solo si $|A(s)| \neq o\ \forall s \leqslant k$.

Y mas en general.

Corolario 1' Para que exista solución única estando dada la condición inicial para cualquier punto de N s condición necesaria y suficiente que $|A(k)| \neq o\ \ \forall k$.

Los siguientes teoremas estudian la estructura algebraica de las soluciones de un sistema lineal en diferencias.

Teorema 2 Sea el sistema lineal en diferencias homogéneo.

$$\overline{Z}_{k+1} = A(k)\overline{Z}_K \qquad (3)$$

El conjunto de sus soluciones tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n.

Demostración.-

Se sabe que el conjunto de las sucesiones de elementos de $\mathbb{R}^n$. es un espacio vectorial, habrá que ver que las soluciones de (3) forman un subespacio suyo:

Si $\{u_k\}$ y $\{v_k\}$ son soluciones de (1) y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; es claro que:

$$a_1\overline{u}_{k+1} + a_2\overline{v}_{k+1} = A(k)\ (a_1\overline{u}_k + a_2\overline{v}_k)$$

Por otra parte, para ver la dimensión, basta considerar la -

aplicación Φ que a cada condición inicial $\overline{Z}_o = \overline{Z}_{(o)}$ le asigna la única solución de (1) que se obtienen a partir de ella. Es claro que esta aplicación es biyectiva; por un razonamiento inductivo similar al del teorema 1 se tiene que es también lineal y por tanto un isomorfismo. Como la condición inicial puede ser cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ es claro que el espacio de las soluciones tiene también dimensión n.

Teorema 3. Las soluciones del sistema (2) forman un espacio afín asociado al vectorial de las soluciones de (3).

Demostración.-

Basta ver que si $\{\overline{Z}_k\}$ es solución de (3) y $\{\overline{Z}_k^*\}$ de (2) entonces $\{\overline{Z}_k + \overline{Z}_k^*\}$ es también de (2), y por otra parte que si $\{\overline{Z}_k^*\}$ y $\{\overline{Z}'_k\}$ son soluciones de (2) su diferencia lo será de (3).

Corolario 2. La solución general del sistema completo (2) se podrá escribir en la forma:

$$\{\overline{u}_k\} = \{\overline{Z}_k + \overline{Z}_k^*\}$$

siendo $\overline{Z}_k$ la solución general de (3) y $\overline{Z}_k^*$ una solución particular de (2).

2- OBTENCION DE LAS SOLUCIONES EN EL CASO DE SISTEMAS CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Consideremos ahora el caso en que la matriz A(k) es constante; el sistema completo tendrá entonces la forma:

$$\overline{Z}_{k+1} = A\overline{Z}_k + g_{(k)} \qquad (4)$$

y el homogéneo:

$$\overline{Z}_{k+1} = A\overline{Z}_k \qquad (5)$$

Teorema 4. Siendo $\overline{Z}_o = \overline{Z}_{(o)}$ una condición inicial arbitraria, la solución de (5) para esta condición inicial será:

$$\overline{Z}_k = A^k Z_o \qquad (6)$$

Demostración.

Por inducción:

para k = 1 $\qquad \overline{Z}_1 = A\overline{Z}_o$

supuesto cierto para k = s se tendrá para k = s+1:

$$\overline{Z}_{s+1} = A\overline{Z}_s = AA^s\overline{Z}_o = A^{s+1}\overline{Z}_o$$

Teorema 5.- La solución del sistema completo (4) para una condición inicial arbitraria $\overline{Z}_o = \overline{Z}_{(o)}$ es:

$$\overline{Z}_k = A^k\overline{Z}_o + \sum_{j=0}^{k-1} A^j g(k-j-1) \qquad (7)$$

Demostración.-

Es claro que basta calcular una solución particular de la ecuación completa; obtengámosla a partir de la condición inicial $\overline{Z}_o = \overline{Z}(o)$

Para k=1 $\qquad \overline{Z}_1 = \overline{g}_{(o)}$

Para k=r+1

$$\overline{Z}_{r+1} = A\overline{Z}_r + g_{(r)} = A\left(\sum_{0}^{r-1} A^j g(r-j-2)\right) + g(r) = \sum_{j=0}^{r} A^j g(r-j-1)$$

y, en virtud del teorema 3, se tiene (7).

3.- APLICACION DE LAS MATRICES DE JORDAN.

El problema principal que surge al tratar de evaluar la expresión (7) es el de calcular las matrices A^r $(1 \leq r \leq k)$. Lo resolveremos haciendo uso de las matrices de Jordan.

Se sabe que toda matriz A admite una descomposición en la forma:

$$A = P\ J\ P^{-1} \qquad (8)$$

donde P es regular y J es una matriz diagonal por cajas:

$$J = \begin{pmatrix} J_{s_1} & & & \\ & J_{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_r} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

donde la caja J_{s_i} es de dimensión s_i y tiene la forma:

$$J_{s_i} = \begin{pmatrix} a_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_i \end{pmatrix} \qquad (10)$$

En virtud de (8) es claro que:

$$A^k = PJ^kP^{-1}$$

El problema de calcular la matriz P no ofrece dificultad teórica, además se tiene:

$$J^k = \begin{pmatrix} J^k_{s_1} & & & \\ & J^k_{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^k_{s_r} \end{pmatrix}$$

y por tanto el problema de determinar A^n queda reducido al de calcular las potencias de las matrices J_{s_i}.

Tenemos que:

$$J_{s_i} = a_i I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = a_i I + L_{s_i}$$

además las matrices I y L_{s_i} conmutan y por tanto podemos aplicar la fórmula del binomio de Newton:

$$J^k_{s_i} = (a_i I + L_{s_i})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i^{k-i} L^i_{s_i}$$

como L_{s_i} es una matriz nihilpotente de orden S_i se anularán todos los $L^i_{s_i}$ para i S_i y por tanto quedará:

$$J^{s_i}_k = \sum_{i=0}^{s_i-1} \binom{k}{i} a_i^{k-i} L^i_{s_i} \qquad (11)$$

y este polinomio matricial se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} a_i^k & \binom{k}{1} a_i^{k-1} & \binom{k}{2} a_i^{k-2} & \cdots\cdots & \binom{k}{s_i-1} a_i^{k-s_i+1} \\ & a_i^k & & & \\ & & \ddots & & \binom{k}{1} a_i^{k-1} \\ & & & & a_i^k \end{pmatrix} \qquad (12)$$

En el caso en que $K < S_i$, la matriz $L^k_{s_i}$ sería de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_i^k \binom{k}{1} a_i^{k-1} & \cdots\cdots\cdots & \binom{k}{k-1} a_i & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{k}{1} a^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_i^k \end{pmatrix} \qquad (13)$$