CREATIVIDAD Y COMPLETITUD

Por J. Fernández-Prida

Introducción

En el presente trabajo se han recogido una serie de resultados, la mayoría dispersos a través de una literatura extremadamente especializada, que relacionan los conceptos de creatividad, m-completitud y 1-completitud, algunas de cuyas pruebas, sólo en parte originales, han logrado ser simplificadas al haberse dado una demostración del teorema s-m-n, básico en la teoría de la computabilidad, bajo una formulación -posiblemente nueva- notoriamente más fuerte que la original de Kleene* y que las más recientementes presentadas por Rogers** , Shoenfield*** , etc... Esta nueva versión del teorema s-m-n permite simplificar la prueba del teorema de recursión, que juega un papel fundamental en la demostración de la isomorfía de los conjuntos creativos, establecida por Myhill.

Una buena parte de las ideas en que se basan las demostraciones del presente artículo han sido tomadas de Rogers (1967), sin citarle explicitamente en cada caso.

---

* cfr. Kleene (1952), p. 342.

** cfr. Rogers (1967), p. 23.

*** cfr. Schoenfield, J.R., Degrees of Unsolvability, North-Holland Publishing Co. Amsterdam 1971, pp. 21-22.

Notación y prerrequisitos

A lo largo de todo el artículo se supone establecida una correspondencia g **biyectiva**, recursiva y fija entre las máquinas de Turing sobre un alfabeto con el único símbolo "1" y los números naturales. Una máquina M tal que $g(M) = i$ será denotada por M_i. A cada función recursiva parcial ψ (**abreviadamente** f.r.p.) con k argumentos se hará corresponder un conjunto infinito de índices: los de las máquinas de Turing que colocadas tras los argumentos de ψ se paran al cabo de un número finito de pasos si y sólo ψ converge para dichos argumentos, haciéndolo en tal caso tras el valor que para ellos toma la función. Puesto que toda máquina de Turing define para cada número natural k una f.r.p. con k argumentos, para todo x y todo k estará definida una función recursiva parcial con k argumentos que se denotará por ϕ_x^k y por W_x^k su dominio. En ocasiones se omitirán los superíndices cuando su valor se desprenda claramente del contexto o cuando k sea igual a 1. Puesto que los argumentos de las f.r.p. son números naturales e igualmente los índices y superíndices, no será preciso hacerlo constar en cada ocasión. El conjunto de los números naturales será denotado por N.

Se denotará por σ_k una cierta aplicación fija, recursiva y biyectiva de N^k en N (cfr. Hermes (1965), pp. 77-78).

Para todo subconjunto A no vacío de N se denotará por $\mu x\,[x \in A]$ al menor entero x perteneciente a A.

Se denotará por $\mu \overset{n}{\underset{o}{x}} [x \in A]$ al menor x, si existe, comprendido entre o y n, perteneciente a A.

$\mathfrak{x}$ será una abreviatura de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $\mathfrak{y}$, de $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

1 Teorema s-m-n

TH 1 Para todo m, n existe una función s con m+1 argumentos, recursiva, total e inyectiva, tal que para todo I, ξ, η se verifica:

(1.1) $$\phi_I^{m+n}(\xi.\eta) = \phi^n_{s(I,\eta)}(\xi) \quad .$$

Dem.:

Sean r y ℓ las máquinas de Turing que, colocadas en cualquier posición, dan respectivamente un paso a la derecha y a la izquierda y se paran. Sea 1 la máquina que, partiendo también de cualquier posición, imprime un 1 y se para (cfr. Hermes (1965), pp. 39-40). Puesto que M_I colocada tras $\xi.\eta$ se para tras $\phi_I(\xi.\eta)$, es claro que la máquina

$$M = r\,(1r)^{y_1+1}\,r\,(1r)^{y_2+1} \ldots r\,(1r)^{y_m+1}\,r\ell\,M_I$$

colocada tras ξ se parará igualmente tras $\phi_I(\xi.\eta)$, con lo que $\phi_{g(M)}(\xi) = \phi_I(\xi.\eta)$. Así pues, la función buscada s viene definida por la igualdad $s(I,\eta) = g(M)$, con lo que resulta ser recursiva, total e inyectiva.

2 Teorema de recursión

TH 2 Para todo n existe una función recursiva, total e inyectiva r, con n+2 argumentos, tal que para todo z, si ϕ_z^{n+1} es total, se verifica para todo ξ, y :

(2.1) $$\phi^1_{r(z,\xi,y)} = \phi^1_{\phi_z^{n+1}(r(z,\xi,y),\xi)}$$

Dem.:

Sea ψ_1 la f.r.p. definida por

(2.2) $$\psi_1(z,x,y) = \begin{cases} \phi_x(z) & \text{si } z\varepsilon W_x \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Por el teorema s-m-n existe una función recursiva, total e inyectiva f tal que

(2.3) $\phi_{f(x,y)}(z) = \psi_1(z, x, y)$,

con lo que se verifica

(2.4) $\phi_x = \phi_{f(x, y)}$

ya que ambas funciones convergen para los mismos argumentos y toman los mismos valores.

Definamos ahora la función recursiva parcial

(2.5) $$\psi_2(y, u, \mathfrak{X}) = \begin{cases} \phi_{\phi_u(u,\mathfrak{X})}(y) & \text{si } (u,\mathfrak{X}) \in W_u \text{ e } y \in W_{\phi_u(u,\mathfrak{X})} \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y sea g la función recursiva total inyectiva tal que

(2.6) $\phi_{g(u,\mathfrak{X})}(y) = \psi_2(y, u, \mathfrak{X})$.

Por ser f y g recursivas, totales e inyectivas, lo será también la función h definida mediante la igualdad

(2.7) $h(u,\mathfrak{X}) = f(g(u,\mathfrak{X}), \sigma_{n+1}(u,\mathfrak{X}))$.

Definamos ahora la f.r.p.

(2.8) $\psi_3(z, u,\mathfrak{X}) = \phi_z(h(u,\mathfrak{X}),\mathfrak{X})$

y sea v la función recursiva, total e inyectiva tal que

(2.9) $\phi_{v(z)}(u,\mathfrak{X}) = \psi_3(z, u,\mathfrak{X})$.

Demostraremos que la función r definida por

(2.10) $r(z,\mathfrak{X}, y) = h(f(v(z), y),\mathfrak{X})$,

que obviamente es recursiva, total e inyectiva, satisface la igualdad (2.1). En efecto:

$\phi_{r(z,\mathfrak{X},y)} = \phi_{h(f(v(z), y),\mathfrak{X})}$ por (2.10)

$= \phi_{f(g(f(v(z), y),\mathfrak{X}), \sigma_{n+1}(f(v(z), y),\mathfrak{X}))}$ por (2.7)

$= \phi_{g(f(v(z), y),\mathfrak{X})}$ por (2.4)

$= \phi_{\phi_{f(v(z),\, y)}}(f(v(z),\, y), \Sigma)$ por (2.5),(2.6)

$= \phi_{\phi_{v(z)}}(f(v(z),\, y), \Sigma)$ por (2.4)

$= \phi_{\phi_z}(h(f(v(z),\, y), \Sigma), \Sigma)$ por (2.8),(2.9)

$= \phi_{\phi_z}(r(z, \Sigma,\, y), \Sigma)$. por (2.10)

CRL 2 Para toda f.r. total con dos argumentos f existe una f.r. total e inyectiva r tal que para todo y

(2.11) $\phi_{r(y)} = \phi_{f(r(y),\, y)}$

Dem.:

Sea I tal que $f = \phi_I$. Por TH 2 existe una f.r. total e inyectiva $\bar{r}$ tal que

(2.12) $\phi_{\phi_I(\bar{r}(I,\, x,\, y),\, x)} = \phi_{\bar{r}(I,\, x,\, y)}$. La función r definida mediante la igualdad $r(y) = \bar{r}(I,\, y,\, y)$ satisface (2.11).

3 Productividad y creatividad

DF 1 Un conjunto A es productivo si existe una f.r.p. ψ (llamada función productiva de A) tal que para todo x, si $W_x \subset A$, entonces x pertenece al dominio de ψ y $\psi(x) \in A - W_x$.

TH 3 El conjunto $\bar{K} = \{x \,/\, \phi_x(x) \text{ diverge}\}$ es productivo.

Dem.:

$\bar{K}$ tiene como productiva la función idéntica, ya que $W_x \subset \bar{K} \Longrightarrow \forall y [y \in W_x \Longrightarrow y \in \bar{K}] \Longrightarrow [x \in W_x \Longrightarrow x \in \bar{K}] \Longrightarrow$
$[x \in W_x \Longrightarrow x \notin W_x] \Longrightarrow x \notin W_x \Longrightarrow x \in \bar{K} - W_x$.

TH 4 Para todo conjunto productivo A existe una función recursiva total que produce A.

Dem.:

Sea ψ una función productiva de A. Si ψ no es total definamos

(3.1) $$\psi_1(z, x, y) = \begin{cases} \phi_y(z) & \text{si } \psi(x) \text{ converge} \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Sea f una f.r. total tal que

(3.2) $$\phi_{f(x,y)}(z) = \psi_1(z, x, y).$$

Por el teorema de recursión existe una f.r. total r que verifica

(3.3) $$\phi_{r(y)}(z) = \phi_{f(r(y),\ y)}(z)$$

con lo que

(3.4) $$\phi_{r(y)}(z) = \begin{cases} \phi_y(z) & \text{si } \psi(r(y)) \text{ converge} \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y en consecuencia

$\psi r(y)$ divergente $\Longrightarrow W_{r(y)} = \emptyset \Longrightarrow W_{r(y)} \subset A \Longrightarrow$ $\psi r(y)$ convergente, de donde se sigue que ψr es total y, por tanto,

(3.5) $$\phi_{r(y)} = \phi_y \quad ;$$

Con esto se tiene:

$W_y \subset A \Longrightarrow W_{r(y)} \subset A \Longrightarrow \psi r(y) \in A-W_{r(y)} \Longrightarrow \psi r(y) \in A-W_y$, lo que prueba que ψr produce A.

TH 5 Para todo conjunto productivo existe una f.r. total e inyectiva que lo produce.

Dem.:

Sea A un conjunto productivo y f una f.r. total productiva de A. Definamos la f.r.p.

(3.6) $$\Psi(y, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(y) \text{ converge ó } y = f(x) \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y sea h una f.r. total tal que

(3.7) $\phi_{h(x)}(y) = \psi(y,x)$.

LEMA I Para todo x se verifica

(3.8) $W_x \subset W_{h(x)} \subset W_{hh(x)} \subset \cdots$

En efecto, de la definición de h se sigue

(3.9) $W_{h(x)} = W_x \cup \{f(x)\}$,

con lo que

(3.10) $W_{hh(x)} = W_{h(x)} \cup \{fh(x)\}$,

etcetera.

LEMA II Para todo x, si $W_x \subset A$, se verifican las relaciones

(3.11) $\{f(x),\ fh(x),\ fhh(x),\ \ldots\} \subset A - W_x$

(3.12) $W_{h(x)} \cup W_{hh(x)} \cup W_{hhh(x)} \cup \cdots \subset A$

En efecto.:

(1)	$W_x \subset A$	(hipótesis)
(2)	$f(x) \in A - W_x$	(1)
(3)	$W_{h(x)} \subset A$	(3.9)(1)(2)
(4)	$fh(x) \in A - W_{h(x)} \subset A - W_x$	(3)(3.8)
(5)	$W_{hh(x)} \subset A$	(3.10)(1)(4)
(6)	$fhh(x) \in A - W_{hh(x)} \subset A - W_x$	(5)(3.8)

....

siguiéndose (3.11) de (2), (4), (6), ... y (3.12) de (3), (5), ...

LEMA III Para todo x, si $W_x \subset A$, entonces son distintos todos los elementos del conjunto $\{f(x),\ fh(x),\ fhh(x),\ \ldots\}$.

En efecto,

$W_x \subset A \Longrightarrow W_{h(x)} \subset A$ por el Lema II

$\Longrightarrow fh(x) \notin W_{h(x)}$ pues f produce A

$\Longrightarrow fh(x) \notin W_x \cup \{f(x)\}$; (por 3.9)

análogamente,

$W_x \subset A \Longrightarrow W_{hh(x)} \subset A$ por el Lema II

$\Longrightarrow fhh(x) \notin W_{hh(x)}$ pues f produce A

$\Longrightarrow fhh(x) \notin W_x \cup \{f(x),\ fh(x)\}$; por (3.9)(3.10)

etc.

Para demostrar el teorema definamos la función g de la siguiente forma:

$g(0) = f(0)$

$$g(n+1) = \begin{cases} f\overset{k}{hh \ldots h}(n+1) & \text{donde } k = \mu_0^n j \left[f\overset{j}{hh \ldots h}(n+1) \notin \{g(0), \ldots, g(n)\} \right] \text{ si tal j existe} \\ \mu m \left[m \notin \{g(0), \ldots, g(n)\} \right] & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Obviamente la función g es recursiva, total e inyectiva. Además g produce A ya que si $W_x \subset A$ se tiene:

Caso I : $x = 0$. Entonces $g(0) = f(0) \in A-W_0$.

Caso II: $x \neq 0$. Entonces son distintos todos los elementos del conjunto $\{f(x),\ fh(x),\ \ldots\ f\overset{x}{h \ldots h}(x)\}$ (por el Lema III) con lo que existe un j comprehendido entre 0 y x, tal que $g(x) = f\overset{j}{h \ldots h}(x)$ y en consecuencia (por el Lema II) se tiene que $g(x) \in A-W_x$.

DF 2 Un conjunto es creativo si es recursivamente enumerable y su complementario es productivo.

Trivialmente se sigue de TH 3:

TH 6 El conjunto $K = \{x \mid \phi_x(x) \text{ converge}\}$ es creativo.

4 Reducibilidad y completitud

DF 3 Un conjunto A es m-reducible a un conjunto B -lo que se denotará por $A \leq_m B$ - si existe una función recursiva total f tal que para todo x se verifica

(4.1) $$x \in A \Longrightarrow f(x) \in B \ .$$

De DF 3 se sigue inmediatamente:

TH 7 A es m-reducible a B si y sólo si $\bar{A}$ es m-reducible a $\bar{B}$.
En efecto,

$$A \leq_m B \Longleftrightarrow [\exists f, \text{ f recursiva total, } f(A) \subset B \text{ y } f(\bar{A}) \subset \bar{B}]$$
$$\Longleftrightarrow \bar{A} \leq_m \bar{B} \ .$$

DF 4 Un conjunto A es 1-reducible a un conjunto B - lo que se denotará por $A \leq_1 B$ - si existe una función recursiva total inyectiva f tal que para todo x se verifica (4.1).

Paralelamente a TH 7 se tiene:

(4.2) $$A \leq_1 B \Longleftrightarrow \bar{A} \leq_1 \bar{B} \ .$$

DF 5 Dos conjuntos A, B son m-equivalentes si A es m-reducible a B y B es m-reducible a A.

DF 6 Dos conjuntos A, B son 1-equivalentes si A es 1-reducible a B y B es 1-reducible a A.

Obviamente se tiene para conjuntos cualesquiera A, B:

TH 8 Si A es 1-reducible a B, entonces A es m-reducible a B.

DF 7 Un conjunto es m-completo si es recursivamente enumerable y todo conjunto recursivamente enumerable es m-reducible a él.

DF 8 Un conjunto es 1-completo si es recursivamente enumerable y todo conjunto recursivamente enumerable es 1-reducible a él.

De DF 5, DF 6, DF 7 y DF 8 se sigue:

TH 9 Dos conjuntos m-completos (1-completos) son m-equivalentes (1-equivalentes).

TH 10 Todo conjunto 1-completo es m-completo.

DF 9 Dos conjuntos A, B son recursivamente isomorfos -lo que se denotará por $A \equiv B$- si existe una f.r. total biyectiva h tal que para todo x se verifica

(4.3) $x \varepsilon A \Longleftrightarrow h(x) \varepsilon B$

i.e.

(4.4) $h(A) = B$.

De DF 6 y DF 9 se sigue:

TH 11 Dos conjuntos rec. isomorfos son 1-equivalentes.

A continuación demostraremos -modificando la prueba original de Myhill- que también es cierta la implicación contraria.

TH 12 Dos conjuntos 1-equivalentes son rec. isomorfos.

Dem.:

Sean A, B, f, g (f y g recursivas totales e inyectivas) tales que

(4.5) $x \varepsilon A \Longleftrightarrow f(x) \varepsilon B$

(4.6) $x \varepsilon B \Longleftrightarrow g(x) \varepsilon A$.

A partir de f y g construiremos una f.r. total biyectiva h que verifique (4.3). La construcción de h se hará por pasos, definiéndose en cada paso a lo sumo un valor de h. En el paso 2k+1 (k = 0, 1, 2, ...) se asegurará que k pertenece al dominio de h y en el 2k+2 (k = 0, 1, 2, ...), que k pertenece al rango, con lo que al final de la construcción h será total y sobre. En cada paso se asegura también la inyectividad de la parte de h construída al final del mismo. La parte (finita) de h construída antes del paso s será denotada por h_s. El dominio y el rango de h_s se denotarán respectivamente por D_h^s y R_h^s .

Descripción del paso 2k+1 $(k = 0, 1, 2, \dots)$

1. Si $k \varepsilon D_h^{2k+1}$, no se definen nuevos valores de h.

2. Si $k \notin D_h^{2k+1}$, se computa f(k). Entonces:

2.1. Si $f(k) \notin R_h^{2k+1}$, se define $h(k) = f(k)$.

2.2. Si $f(k) \varepsilon R_h^{2k+1}$, se computa $fh_{2k+1}^{-1}\ f(k)$. Entonces:

2.2.1. Si $fh_{2k+1}^{-1}\ f(k) \notin R_h^{2k+1}$, se define $h(k) = fh_{2k+1}^{-1}f(k)$.

2.2.2. Si $fh_{2k+1}^{-1}\ f(k)\ \varepsilon\ R_h^{2k+1}$, se computa $fh_{2k+1}^{-1}fh_{2k+1}^{-1}f(k)\dots.$

Descripción del paso 2k+2 $(k= 0, 1, 2, \dots)$

1. Si $k \varepsilon R_h^{2k+2}$, no se definen nuevos valores de h.

2. Si $k \notin R_h^{2k+2}$, se computa g(k). Entonces:

2.1. Si $g(k) \notin D_h^{2k+2}$, se define $h(g(k)) = k$.

2.2. Si $g(k)\ \varepsilon\ D_h^{2k+2}$, se computa $gh_{2k+2}\ g(k)$, etc...

Es claro que ambos procesos tienen fin, ya que en el paso 2k+1 (y análogamente en el 2k+2) se tiene que el conjunto R_h^{2k+1} es finito y los elementos $f(k)$, $fh_{2k+1}^{-1}\ f(k)$, $fh_{2k+1}^{-1}\ fh_{2k+1}^{-1}\ f(k)$, ... son todos distintos puesto que

$$f(h_{2k+1}^{-1}f)^m(k) = f(h_{2k+1}^{-1}f)^n(k),\ m > n$$

$$\Longrightarrow (h_{2k+1}^{-1}\ f)^{m-n}\ (k) = k \quad \text{(por la inyectividad de f y } h_{2k+1}^{-1})$$

$$\Longrightarrow (fh_{2k+1}^{-1})^{m-n-1}\ f(k) = h_{2k+1}(k)$$

$$\Longrightarrow k\ \varepsilon\ D_h^{2k+1}$$, contra la hipótesis del caso 2.

La recursividad y biyectividad de h se siguen fácilmente del análisis de la cosntrucción.

Ejemplo: Sean f y g tales que

g(x)	x	f(x)
0	0	2
3	1	1
1	2	0
4	3	3
2	4	6
10	5	11
7	6	8

....

Interpretación de las flechas en el algoritmo

$\longrightarrow \; = f$

$\longleftarrow \; = g$

$\searrow \; = h$

$\swarrow \; = h^{-1}$

Paso	Algoritmo	Se define	Se asegura
1	$0 \longrightarrow 2$	h(0) = 2	$0 \varepsilon D_h^2$
2	$0 \longleftarrow 0$ $\searrow$ $1 \longleftarrow 2$	h(1) = 0	$0 \varepsilon R_h^3$
3	- - -	- - - -	$1 \varepsilon D_h^4$
4	$3 \longleftarrow 1$	h(3) = 1	$1 \varepsilon R_h^5$
5	$2 \longrightarrow 0$ $\swarrow$ $1 \longrightarrow 1$ $\swarrow$ $3 \longrightarrow 3$	h(2) = 3	$2 \varepsilon D_h^6$
6	- - -	- - - -	$2 \varepsilon R_h^7$
7	- - -	- - - -	$3 \varepsilon D_h^8$
8	- - -	- - - -	$3 \varepsilon R_h^9$
9	$4 \longrightarrow 6$	h(4) = 6	$4 \varepsilon D_h^{10}$
10	$2 \longleftarrow 4$ $\searrow$ $4 \longleftarrow 3$ $\searrow$ $7 \longleftarrow 6$	h(7) = 4	$4 \varepsilon R_h^{11}$

....

Para completar la demostración de TH 12 basta probar que h verifica (4.3), lo que se hará por inducción sobre el conjunto de los pasos de la construcción.

a) La relación (4.3) se verifica para el valor de h definido en el paso 1, ya que en dicho paso se define $h(0) = f(0)$, con lo que se tiene:

$$0 \varepsilon A \Longleftrightarrow f(0)\varepsilon B \Longleftrightarrow h(0)\varepsilon B \quad .$$

b) Supuesta cierta (4.3) para los valores de h definidos antes del paso n, también se verifica para el valor eventualmente definido en él. En efecto:

Caso I : $n = 2k+1$

Si $k \varepsilon D_h^{2k+1}$ no hay problema, al no definirse ningún valor de h en este paso. Si $k \not\varepsilon D_h^{2k+1}$, entonces se define $h(k) = (fh_{2k+1}^{-1})^m f(k)$ para un cierto m, con lo que

$$k\varepsilon A \Longleftrightarrow f(k)\varepsilon B \overset{\text{hip. ind.}}{\Longleftrightarrow} h_{2k+1}^{-1} f(k)\varepsilon A \Longleftrightarrow \quad .... \quad \Longleftrightarrow$$

$$(h_{2k+1}^{-1}\ f)^m(k)\varepsilon A \Longleftrightarrow (fh_{2k+1}^{-1})^m f(k)\varepsilon B \Longleftrightarrow h(k)\varepsilon B.$$

Caso II : $n = 2k+2$

Si $k\varepsilon R_h^{2k+2}$ no hay problema. Si $k \not\varepsilon R_h^{2k+2}$, entonces se define $h(g(h_{2k+2}\ g)^m\ (k)) = k$, con lo que

$$g(h_{2k+2}\ g)^m\ (k)\varepsilon A \Longleftrightarrow (h_{2k+2}\ g)^m\ (k)\varepsilon B \overset{\text{hip. ind.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$g(h_{2k+2}\ g)^{m-1}\ (k)\varepsilon A \Longleftrightarrow \ .... \Longleftrightarrow g(k)\varepsilon A \Longleftrightarrow k\varepsilon B \ .$$

5 Creatividad y completitud

Para conjuntos cualesquiera A, B se verifica:

TH 13 Si A es productivo y $A \underset{m}{\leqslant} B$, entonces B es productivo.

Dem.:

Sea Ψ una función productiva de A y sea f una función recursiva total que verifique

(5.1) $f(A) \subset B \quad y \quad f(\bar{A}) \subset \bar{B}$.

Sea ψ_1 la f.r.p. definida por

(5.2) $\psi_1(y, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(y) \in W_x \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}$

y sea g la f.r. total tal que

(5.3) $\phi_{g(x)}(y) = \psi_1(y, x)$

con lo que

(5.4) $W_{g(x)} = f^{-1}(W_x)$.

Se probará que $f\psi g$ produce B. En efecto,

$W_x \subset B \Longrightarrow f^{-1}(W_x) \subset f^{-1}(B) \xrightarrow{(5.4)} W_{g(x)} \subset f^{-1}(B) \xrightarrow{(5.1)}$

$W_{g(x)} \subset A \Longrightarrow \psi g(x) \in A - W_{g(x)} \Longrightarrow f\psi g(x) \in f(A) - f(W_{g(x)})$

$\Longrightarrow f\psi g(x) \in B - W_x$ (por (5.1), (5.4)).

TH 14 Todo conjunto m-completo es creativo.

Dem.:

Sea A m-completo. Según DF 7 A es recursivamente enumerable. Por otra parte, siendo recursivamente enumerable el conjunto $K = \{x / \phi_x(x) \text{ converge}\}$, será m-reducible a A, con lo que, de acuerdo con TH 7, $\bar{K} \underset{m}{\leq} \bar{A}$. Puesto que $\bar{K}$ es productivo (cfr. TH 3) se sigue por TH 13 que también lo es $\bar{A}$, lo que completa la demostración.

TH 15 Todo conjunto creativo es 1-completo.

Dem.:

Sea A creativo, h una función recursiva, total, inyectiva y productiva de $\bar{A}$ (cfr. TH 5) y B un conjunto recursivamente enumerable cualquiera. Definamos la función

(5.5) $$\psi(z, x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \varepsilon B \ \text{ y } \ h(x) = z \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}.$$

ψ es claramente recursiva parcial, ya que al ser B recursivamente enumerable existe un $I \varepsilon N$ tal que $B = W_I$, con lo que $y \varepsilon B$ equivale a que converja $\phi_I(y)$. En consecuencia existe una función recursiva total f tal que

(5.6) $$\phi_{f(x, y)}(z) = \psi(z, x, y)$$

y por CRL 2 existe una f.r. total e inyectiva r tal que

(5.7) $$\phi_{r(y)}(z) = \phi_{f(r(y), y)}(z)$$

con lo que

(5.8) $$\phi_{r(y)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \varepsilon B \ \text{ y } \ hr(y) = z \\ \text{Indefinida} & \text{en los demás casos} \end{cases}.$$

En consecuencia se tiene:

$y \varepsilon B \Longrightarrow W_{r(y)} = \{hr(y)\} \Longrightarrow hr(y) \varepsilon A$ (pues $hr(y) \varepsilon \bar{A} \Longrightarrow W_{r(y)} \subset \bar{A} \Longrightarrow hr(y) \notin W_{r(y)} \Longrightarrow hr(y) \notin \{hr(y)\}$!!).

Por otra parte,

$y \notin B \Longrightarrow W_{r(y)} = \emptyset \Longrightarrow hr(y) \varepsilon \bar{A}$,

con lo que

(5.9) $$y \varepsilon B \Longleftrightarrow hr(y) \varepsilon A,$$

relación que prueba la 1-completitud de A (al ser **h** y r inyectivas).

CRL 15.1 Un conjunto es creativo si y sólo si es 1-completo si y sólo si es m-completo.

En efecto, A creativo $\Longrightarrow$ A 1-completo (por TH 15) $\Longrightarrow$ A m-completo (por TH 10) $\Longrightarrow$ A creativo (por TH 12).

CRL 15.2 Todos los conjuntos creativos son recursivamente isomorfos (Myhill).

En efecto, dos conjuntos creativos son 1-completos por TH 15, 1-equivalentes por TH 9 y recursivamente isomorfos por TH 12.

BIBLIOGRAFIA

Adrian Carpentier, M. 1968 — Creative sequences and double sequences Notre Dame journal of logic, vol. 9, pp. 35-61.

Cleave, J.P. 1961 — Creative functions, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 7, pp. 205-212.

Dekker, J. 1955 — Productive Sets, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 78, pp. 129-149

Hermes, H. 1965. — Enumerability. Decidability. Computability. 2ª ed., Springer Verlag, Berlín.

Kleene, S.C. 1952 — Introduction to metamathematics, D. Van Norstrand Company, Inc., Princeton, N.J.

Lachlan, A.H. 1965 — Some notions of reducibility and productiveness, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 11, pp. 17-44.

Myhill, J. 1955 — Creative sets, Zeitschift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 1, pp. 97-108.

Rogers, H. 1967 — Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw-Hill, Inc. New York.