

SOBRE UNA FORMALIZACION ALGEBRAICA EN TEORIA DE GRAFOS

Por Emmanuel Lizcano

Introducción

Trataremos de formalizar algunos conceptos usuales de la teoría de grafos en términos de teoría de módulos, de modo que se puedan rigORIZAR y abreviar las extensas demostraciones tan comunes en aquélla, con objeto de ampliar esta formalización a los llamados grafos signados y aplicarla, a título de ejemplo, en la demostración de uno de los teoremas fundamentales relativos al equilibrio de un grafo.

Conceptos básicos (1)

En su acepción más general, llamaremos grafo a toda estructura formal del tipo $G = (V, X, \delta^+, \delta^-)$, donde $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto no vacío de elementos llamados "vértices", $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de elementos llamados "arcos" y δ^+ y δ^- son aplicaciones de X en V

$$\delta^+ : X \rightarrow V$$

$$\delta^- : X \rightarrow V$$

$$x_k \rightarrow \delta^+ x_k$$

$$x_k \rightarrow \delta^- x_k$$

para las que interpretaremos $\delta^+ x_k$ y $\delta^- x_k$ como el "principio" y el "final", respectivamente, del arco x_k .

Esta definición abarca tanto la posible existencia de bucles (arcos x_i tales que $\delta^+ x_i = \delta^- x_i$), como de arcos paralelos (arcos x_i y x_j tales que $\delta^+ x_i = \delta^+ x_j$ y $\delta^- x_i = \delta^- x_j$) y tampoco quedan fuera de su ámbito los grafos no orientados.

Consideremos el conjunto de combinaciones lineales formales de arcos con coeficientes enteros

$$M(Z, X) = \{x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k / \xi^k \in Z\}$$

que tiene estructura de Z -módulo para las operaciones

$$x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k, \quad \bar{x} = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}^k x_k \in M(Z, X) : x + \bar{x} = \sum_{k=1}^n (\xi^k + \bar{\xi}^k) x_k$$

$$\lambda \in Z, x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k \in M(Z, X) : \lambda \cdot x = \sum_{k=1}^n (\lambda \cdot \xi^k) x_k$$

Con ello, $(M(Z, X), +, \cdot)$ es un Z -módulo libre de tipo finito, siendo una base suya el conjunto X . A sus elementos les llamaremos vectores y cada uno de ellos, $x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k$, puede interpretarse como un recorrido, eventualmente "discontinuo", sobre los arcos del grafo G , de modo que cada arco x_k se recorre ξ^k veces en su sentido original (el determinado por δ^+ y δ^-) si $\xi^k > 0$, en sentido opuesto si $\xi^k < 0$ y no se recorre si $\xi^k = 0$.

Análogamente definiríamos el Z -módulo libre de tipo finito

$$M(Z, V) = \left\{ v = \sum_{k=1}^m \xi^k v_k \mid \xi^k \in Z \right\}$$

que tiene al conjunto V como una base.

La elección de otro anillo o de un cuerpo, en especial el de los reales, como campo de escalares dependerá de la naturaleza del problema a tratar. Si aquí utilizamos Z , se debe a su especial adecuación a numerosas áreas y en particular a la del equilibrio en grafos signados, si bien las definiciones y principales resultados que se derivan de su uso son fácilmente traducibles de unos casos a otros.

Con las anteriores definiciones, las aplicaciones $\delta^+, \delta^- : X \rightarrow V$ pueden extenderse a los Z -módulos correspondientes, definiendo una aplicación

$$\delta : M(Z, X) \rightarrow M(Z, V)$$

que para los vectores de la base vendría dada por $\delta x_k = \delta^+ x_k - \delta^- x_k$ extendiéndose de modo natural a cualquier vector $x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k$, de modo que $\delta x = \sum_{k=1}^n \xi^k \delta x_k$.

Así definida, δ es un homomorfismo de Z -módulos y son de especial interés los conjuntos:

$\mathcal{C}(v_i, v_j) = \{x \in M(Z, X) / \delta x = v_i - v_j\}$, a cuyos elementos llamaremos cadenas del vértice v_i al v_j .

$\mathcal{P}(G) = \{x \in M(Z, X) / \delta x = 0\} = \ker \delta$, a cuyos elementos llamaremos ciclos del grafo G .

Por ejemplo, en el grafo de la figura adjunta son cadenas los siguientes vectores:

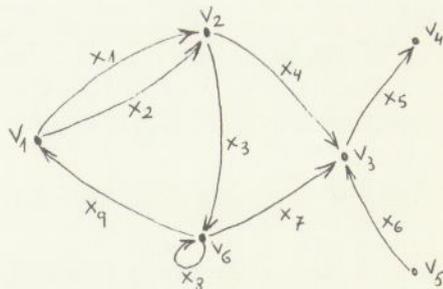
$$x = x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7, \text{ pues } \delta x = v_5 - v_4$$

$$x' = x_1 + x_4 - x_6, \text{ pues } \delta x' = v_1 - v_5$$

$$x'' = 2x_3 - x_4 + x_7 + x_9, \text{ pues } \delta x'' = v_2 - v_1$$

y son ciclos:

$$z_1 = x_8, z_2 = x_3 - x_4 + x_7, z_3 = -2x_3 + 2x_4 - 2x_7, z_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7$$



Estas definiciones se corresponden con las usuales en teoría de grafos. Así, una cadena de v_i a v_j de longitud t se definiría, según la notación aquí utilizada, como un par de sucesiones

$$(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}) \quad \text{y} \quad (\epsilon_1 x_{k_1}, \epsilon_2 x_{k_2}, \dots, \epsilon_t x_{k_t})$$

donde

$$v_{i_0} = v_i, v_{i_t} = v_j, \epsilon_i \in \{1, -1\} \quad (i=1, \dots, t)$$

y tales que

$$\delta^+ x_{k_p} = \begin{cases} v_{i_{p-1}} & \text{si } \epsilon_p = 1 \\ v_{i_p} & \text{si } \epsilon_p = -1 \end{cases}; \quad \delta^- x_{k_p} = \begin{cases} v_{i_p} & \text{si } \epsilon_p = 1 \\ v_{i_{p-1}} & \text{si } \epsilon_p = -1 \end{cases}$$

demostrándose (2) que la existencia de una cadena de v_i a v_j , en estos términos, equivale a la de un vector $x \in M(Z, X)$ verificando $\delta x = v_i - v_j$.

Análogamente, un ciclo suele definirse como una cadena cuyos extremos coinciden, es decir, $v_{i_0} = v_{i_t} = v_i$, lo que equivale a la existencia de un vector $x \in M(Z, X)$ tal que $\delta x = v_i - v_i = 0$.

Otras definiciones de interés son las siguientes:

Dado un vector $x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k$, se define su soporte positivo como $\text{sop}^+ x = \{x_k / \xi^k > 0\}$, su soporte negativo como $\text{sop}^- = \{x_k / \xi^k < 0\}$ y su soporte como $\text{sop } x = \text{sop}^+ x \cup \text{sop}^- x$.

Un subconjunto X' de X se dice que no tiene ciclos si $\nexists x \in \mathcal{P}(G), x \neq 0$, tal que $\text{sop } x \subseteq X'$.

Una cadena (en particular, un ciclo) $x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k$ se llama:

simple	si	$\xi^k \in \{1, -1, 0\}$
minimal	si	$\forall X' \notin \text{sop } x \quad X'$ no tiene ciclos
elemental	si	x es simple y minimal

y designaremos por $\mathcal{L}^s(v_i, v_j)$, $\mathcal{L}^m(v_i, v_j)$ y $\mathcal{L}^e(v_i, v_j)$ (en particular, $\mathcal{P}^s(G)$, $\mathcal{P}^m(G)$ y $\mathcal{P}^e(G)$) al conjunto de cadenas de v_i a v_j (en particular, ciclos) que sean simples, minimales y elementales, respectivamente.

Así, para el ejemplo anterior, se verifica que:

$$z_1, z_2 \in \mathcal{P}^s(G) \cap \mathcal{P}^m(G) = \mathcal{P}^e(G); \quad z_3 \in \mathcal{P}^m(G) - \mathcal{P}^s(G); \quad z_4 \in \mathcal{P}^s(G) - \mathcal{P}^m(G)$$

$$x \in \mathcal{L}^s(v_5, v_4) - \mathcal{L}^m(v_5, v_4); \quad x' \in \mathcal{L}^e(v_1, v_5); \quad x'' \notin \mathcal{L}^s(v_2, v_1) \cup \mathcal{L}^m(v_2, v_1)$$

La validez de esta formalización se extiende a los llamados grafos no orientados si adoptamos el criterio de Berge (3), en el sentido de considerar que "todo grafo está orientado, pero por razones conceptuales es a veces incómodo considerar sus arcos orientados si se está tratando un problema de naturaleza no orientada", conviniendo así en que "cada vez que se aplique un concepto orientado a un grafo no orientado, este concepto deberá considerarse aplicado al grafo orientado obtenido del anterior orientando en ambos sentidos cada arco", lo que en nuestro caso se concretaría en una definición arbitraria de las aplicaciones δ^+ y δ^- y en la consideración de cada arco, x_i , junto con su opuesto, $-x_i$, en el módulo $M(Z, X)$, o bien, si esto resulta excesivamente simplificador de cara a algún problema concreto, en la duplicación de cada arco x_i en otro x'_i tal que $\delta^+ x_i = \delta^- x'_i$, $\delta^- x_i = \delta^+ x'_i$.

Grafos signados

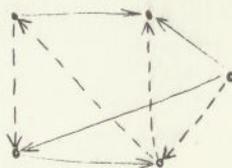
Llamaremos grafo signado, o más brevemente s-grafo, a toda estructura formal del tipo $G = (V, X, \delta^+, \delta^-, s)$ tal que $(V, X, \delta^+, \delta^-)$ es un grafo y s una aplicación

$$s : X \longrightarrow S = \{+1, -1\}$$

$$x_k \longrightarrow s(x_k)$$

La imagen de cada arco x_k , $s(x_k)$, suele nombrarse como el signo de ese arco, diciendo de él que es positivo o negativo.

Gráficamente, los arcos positivos se representan por líneas de trazo



continuo y los negativos por otras de trazo discontinuo, como muestra la figura.

Para la ley de composición interna \circ , dada por la tabla

\circ	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

(S, \circ) es un grupo abeliano, con +1 como elemento neutro y $\varepsilon^{-1} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in S$.

Definiendo además la ley de composición externa $*$, dada por la potenciación en Z , es decir,

$$Z \times S \rightarrow S$$

$$(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \lambda * \varepsilon = \varepsilon^\lambda = \begin{cases} \varepsilon \circ \varepsilon \circ \dots \circ \varepsilon & \text{si } \lambda > 0 \\ +1 & \text{si } \lambda = 0 \\ (\varepsilon^{-1}) \circ (\varepsilon^{-1}) \circ \dots \circ (\varepsilon^{-1}) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

puede comprobarse fácilmente que $(S, \circ, *)$ es un módulo sobre el anillo $(Z, +, \cdot)$.

Podemos así extender la aplicación $s: X \rightarrow S$ a los Z -módulos correspondientes:

$$(M(Z, X), +, \cdot) \xrightarrow{\bar{s}} (S, \circ, *)$$

$$\text{definiendo } x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k \longrightarrow \bar{s}(x) = \prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\xi^k|}$$

con lo que \bar{s} es un homomorfismo de Z -módulos, ya que

$$\forall x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k \in M(Z, X), \forall y = \sum_{k=1}^n \eta^k x_k \in M(Z, X), \forall \lambda \in Z$$

se verifica que:

$$\begin{aligned}\bar{s}(x+y) &= \bar{s}\left[\sum_{k=1}^n (\xi^k + \eta^k)x_k\right] = \prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\xi^k + \eta^k|} = \prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\xi^k| + |\eta^k|} = \\ &= \prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\xi^k|} \circ \prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\eta^k|} = \bar{s}(x) \circ \bar{s}(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{s}(\lambda \cdot x) &= \bar{s}\left[\sum_{k=1}^n (\lambda \cdot \xi^k)x_k\right] = \prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\lambda \cdot \xi^k|} = \prod_{k=1}^n ([s(x_k)]^{|\xi^k|})^{|\lambda|} = \\ &= \left[\prod_{k=1}^n [s(x_k)]^{|\xi^k|}\right]^{|\lambda|} = [\bar{s}(x)]^{|\lambda|} = [\bar{s}(x)]^\lambda = \lambda * \bar{s}(x)\end{aligned}$$

Conviene observar que $\bar{s}(x \cdot y) = \bar{s}(x + (-1)y) = \bar{s}(x) \circ [\bar{s}(y)]^{-1} = \bar{s}(x) \circ \bar{s}(y) = \bar{s}(x+y)$. Como $\forall x_k (k=1, \dots, n)$ es $\bar{s}(x_k) = s(x_k)$, convendremos en llamar s tanto a la aplicación s como a su extensión \bar{s} .

Teorema fundamental de equilibrio en s-grafos:

Dado un s-grafo $G = (V, X, \delta^+, \delta^-, s)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\forall v_i, v_j \in V \quad \forall x, y \in \mathcal{A}(v_i, v_j)$ es $s(x) = s(y)$
- $\forall v_i, v_j \in V \quad \forall x, y \in \mathcal{A}^e(v_i, v_j)$ es $s(x) = s(y)$
- $\forall x \in \mathcal{P}^e(G)$ es $s(x) = +1$
- $\forall x \in \mathcal{P}(G)$ es $s(x) = +1$

De un s-grafo cumpliendo cualquiera de estas condiciones se dice que está equilibrado.

Demostración del teorema:

a) \Rightarrow b). Es evidente.

b) \Rightarrow c). Sea $x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k \in \mathcal{P}^e(G)$, $x \neq 0$ (para $x=0$ ya sería

$s(x) = +1$) y sean v_i y v_j dos vértices de x . Por ejemplo, si suponemos $\text{sop}^+ x \neq \emptyset$ (lo que no supone restricción, pues si $\text{sop}^+ x = \emptyset$ será $\text{sop}^+(-x) \neq \emptyset$ y haríamos los posteriores razonamientos con $-x$, llegando al mismo resultado, ya que $s(x) = s(-x)$), sea $x_i \in \text{sop}^+ x$ (luego $\xi^i = 1$) y elegimos $v_i = \delta^+ x_i$, $v_j = \delta^- x_i$.

Entonces $\exists x^1, x^2 \in \mathcal{L}^e(v_i, v_j)$ tales que $x = x^1 - x^2$, pues basta tomar $x^1 = x_i$, $x^2 = x_i - x$, con lo que:

$$\delta x^1 = \delta^+ x_i - \delta^- x_i = v_i - v_j \Rightarrow x^1 \in \mathcal{L}(v_i, v_j)$$

$$\delta x^2 = \delta x_i - \delta x = v_i - v_j \Rightarrow x^2 \in \mathcal{L}(v_i, v_j)$$

x^1 es evidentemente simple y minimal, luego $x^1 \in \mathcal{L}^e(v_i, v_j)$

x^2 es simple, pues x lo es, y minimal, pues si $\exists X' \not\subset \text{sop } x^2$ tal que X' tuviera ciclos, como $\text{sop } x^2 = \text{sop } x - \{x_i\} \subset \text{sop } x$, x no sería minimal, en contra de la hipótesis; luego $x^2 \in \mathcal{L}^e(v_i, v_j)$.

Así, por hipótesis, $s(x^1) = s(x^2)$ y por tanto $s(x) = s(x^1)$ o $s(x^2) = +1$.

Es de observar que la demostración es válida incluso si x fuera un bucle, es decir, si $x = x_k$ y $\delta^+ x_k = \delta^- x_k$, pues bastaría considerar de modo análogo $x^1 = x_k$, $x^2 = 0$.

c) \Rightarrow d). Teniendo en cuenta los siguientes resultados previos (4):

Lema 1. Si $x \in \mathcal{P}(G)$, $x \neq 0$, $\exists x^1, \dots, x^r \in \mathcal{P}^m(G)$ tales que

$$\text{sop}^+ x^i \subset \text{sop}^+ x, \text{sop}^- x^i \subset \text{sop}^- x \quad (i = 1, \dots, r), \text{ verificando } x = x^1 + \dots + x^r.$$

Lema 2. Si $x \in \mathcal{P}^m(G)$, $x \neq 0$, $\exists \bar{x} \in \mathcal{P}^e(G)$ y $\exists \lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \lambda \cdot \bar{x}$.

Corolario. Si $x \in \mathcal{B}(G)$, $x \neq 0$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{Z} \exists x^i \in \mathcal{P}^e(G)$ ($i = 1, \dots, r$)
tales que $\text{sop}^+ x^i \subset \text{sop}^+ x$, $\text{sop}^- x^i \subset \text{sop}^- x$ ($i = 1, \dots, r$),
verificando $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_r x^r$.

sea cualquier $x \in \mathcal{B}(G)$. Como podemos poner $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i$
siendo $x^i \in \mathcal{P}^e(G)$ ($i = 1, \dots, r$), será $s(x^i) = +1$ ($i = 1, \dots, r$)
y por tanto $s(x) = [s(x^1)]^{|\lambda_1|} \circ [s(x^2)]^{|\lambda_2|} \circ \dots \circ [s(x^r)]^{|\lambda_r|} = +1$.

d) \Rightarrow a). Supongamos que $\exists v_i, v_j \in V$ y que $\exists x, y \in \mathcal{A}(v_i, v_j)$ de
modo que $s(x) \neq s(y)$.

Consideremos el vector $x-y$. Como $\delta(x-y) = \delta x - \delta y = (v_i - v_j) - (v_i - v_j) = 0$, entonces $x-y \in \mathcal{B}(G)$ y sin embargo $s(x-y) = s(x) \circ s(y) = -1$, en contra de la hipótesis.

Esta demostración del teorema, además de hacer notablemente más concisas las demostraciones al uso (5), muestra su validez para grafos con bucles o arcos paralelos, ya sean orientados o no, completos o no e incluso conexos o no, lo que amplía sus posibles dominios de interpretación.

La equivalencia entre las dos primeras (o entre las dos últimas) caracterizaciones de un grafo equilibrado, permite reducir el análisis de equilibrio al de vectores elementales y la equivalencia entre ambas parejas de caracterizaciones simplifica dicho análisis según las especiales características de cada grafo.

Notas:

- (1) En esta primera parte seguimos de cerca las ideas expuestas por Masao Iri en "Network, Flow, Transportation and Scheduling", Academic Press, New York, 1969.
- (2) Op. cit., pg. 38.
- (3) C. Berge: "Graphes et hypergraphes", Ed. Dunod, París, 1970, pgs. 5-6.
- (4) Obtenidos por Masao Iri, op. cit., el lema 1 aparece como corolario inmediato de las observaciones incluidas en pgs. 264-267 y el lema 2 no es sino el teorema 9.1.
- (5) Véase, por ejemplo, C. Flament: "Teoría de grafos y estructuras de grupo", Ed. Tecnos, Madrid, 1972, pg. 97 y ss.; F. Harary: "On the notion of balance of a signed graph", Mich. Math. J., 1954, 2, 143-146.