

ACERCA DEL FENOMENO DE LA CONSTANCIA DEL TAMAÑO Y DE LA REPRESENTACION PLANA DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES (*)

Por Horacio C. Reggini

VI. GENERACION DE IMAGENES MEDIANTE PROYECCIONES CURVAS

Se denomina proyección (Ref. 12) a la correspondencia geométrica entre los puntos de un objeto y los de una superficie de tal manera que estos últimos tengan una posición tal entre sí que los rayos o líneas de proyección que unen los puntos correspondientes se corten en otro fijo que se llama centro, vértice o foco de la proyección. En la perspectiva cónica (típica de la fotografía y de los pintores renacentistas, Ref. 13), los rayos de proyección son rectos, el centro de la proyección (punto de vista) se ubica a distancia finita del objeto y la superficie de proyección es un plano (plano del cuadro) (Fig. 6). La perspectiva paralela (también llamada axonométrica y utilizada frecuentemente por los pintores chinos antiguos, Ref. 14), es un caso particular de la perspectiva cónica, en la cual el punto de vista se ha alejado al infinito; todos los rayos de proyección resultan así paralelos a una única dirección que se denomina la dirección de la perspectiva paralela (Fig. 7).

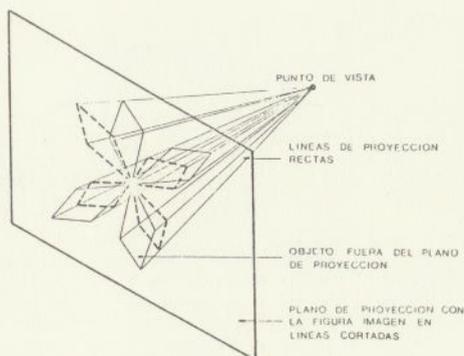


Fig. 6. Perspectiva cónica

(*) La primera parte de este artículo apareció en nuestro Boletín anterior, n° 25.

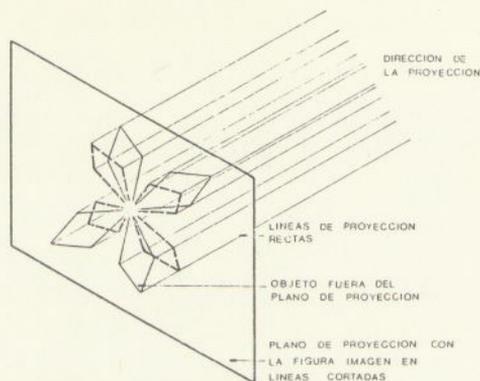


Fig. 7. Perspectiva paralela

Aceptando el modelo analítico de la constancia del tamaño descrito precedentemente, es posible definir una nueva clase de perspectiva intermedia (Fig. 8) entre la perspectiva cónica y la perspectiva paralela, sobre la base de líneas especiales de proyección curvas dependientes de un parámetro que es el índice de regresión ya definido. Esos rayos especiales de proyección son precisamente las curvas de tamaños reales para tamaño aparente constante; por su significado, las curvas citadas indicarían la trayectoria hipotética ficticia de un rayo de proyección curvo ya que sus diversos puntos definen igual tamaño aparente o imagen.

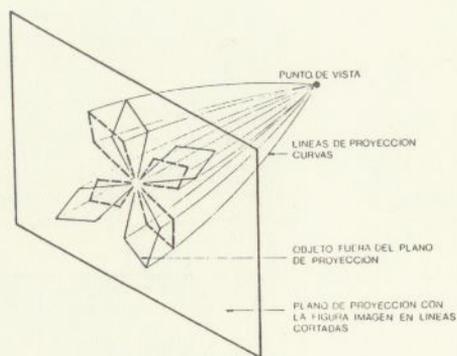


Fig. 8. Perspectiva intermedia

Las ecuaciones representativas de la perspectiva intermedia propuesta se deducen inmediatamente a partir de las reglas de la geometría analítica. En la Fig. 9, P indica un punto genérico del objeto, a representar en perspectiva, de coordenadas (u, v, w) con respecto a una terna principal de referencia X-Y-Z; V, el punto de vista de coordenadas (a, b, c) ; C, el punto de interés o centro de atención de coordenadas (x', y', z') del objeto. La recta VC, que une el punto de vista con el centro de atención define el rayo de proyección principal. El plano de proyección, se supone en la figura, pasante por C y perpendicular al rayo principal. Los cosenos directores de una normal, a ese plano son entonces proporcionales a los valores:

$$\begin{aligned} a' &= a - x' \\ b' &= b - y' \\ c' &= c - z' \end{aligned} \quad (\text{Ec. 7})$$

La distancia del punto de vista al plano de proyección, donde se formará la imagen, vale:

$$VC = t = (a'^2 + b'^2 + c'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ec. 8})$$

Indicando con Q el pie de la perpendicular desde el punto genérico P al rayo principal, la distancia de V a P, medida normalmente al plano de proyección, vale:

$$VQ = d = (a' \cdot (a - u) + b' \cdot (b - v) + c' \cdot (c - w)) / t \quad (\text{Ec. 9})$$

En la misma Fig.9, se designa \underline{r} al segmento QP, y \underline{p} al segmento CI. Para una proyección curva de índice \underline{i} o perspectiva intermedia de índice \underline{i} , el punto imagen I del punto real P, surge como punto intersección con el plano de proyección, del rayo de proyección curvo de índice \underline{i} , saliente de V y pasante por P. El valor \underline{p} que determina la posición de I sobre el plano de la imagen se deduce a partir de la Ec. 4, reemplazando simplemente los respectivos valores. Así resultan las coordenadas siguientes (X, Y, Z) del punto I, referidas a la terna principal:

$$\begin{aligned}
 X &= x' + (t/d)^{1-i} \cdot (u - a + (d/t) \cdot a') \\
 Y &= y' + (t/d)^{1-i} \cdot (v - b + (d/t) \cdot b') \\
 Z &= z' + (t/d)^{1-i} \cdot (w - c + (d/t) \cdot c')
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10}$$

Con respecto a una terna local de referencia de ejes x - y - z con centro en C , con el eje z normal al plano de proyección, y el eje x horizontal, las coordenadas respectivas del punto I , en el plano $(x - y)$ de la imagen valen:

$$x = (t/d)^{1-i} \cdot (-b'(u - a) + a'(v - b)) / (a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{2}}
 \tag{Ec. 11}$$

$$y = (t/d)^{1-i} \cdot (-a'c'(u - a) - b'c'(v - b) + (a'^2 + b'^2)(w - c)) / t / (a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Para el caso $i = 0$, las ecuaciones anteriores proporcionan la perspectiva cónica (Ref. 15):

$$\begin{aligned}
 X &= a + (t/d) \cdot (u - a) \\
 Y &= b + (t/d) \cdot (v - b) \\
 Z &= c + (t/d) \cdot (w - c)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 12}$$

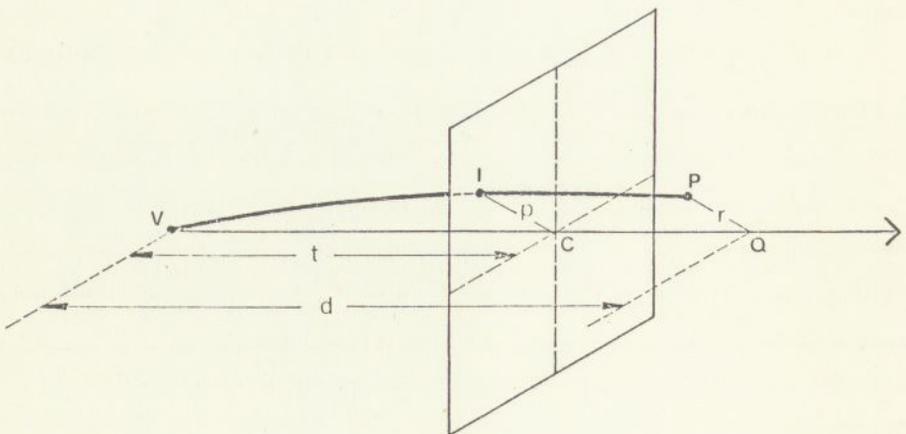


Fig. 9. Hipótesis de generación de imágenes

Las coordenadas locales valen:

$$x = (t/d) \cdot (-b'(u - a) + a'(v - b)) / (a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ec. 13})$$

$$y = (t/d) \cdot (-a'c'(u - a) - b'c'(v - b) + (a'^2 + b'^2)(w - c)) / t / (a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Para el caso $i = 1$, resultan las ecuaciones correspondientes a la perspectiva paralela (Ref. 15):

$$\begin{aligned} X &= u + a' \cdot (d/t - 1) \\ Y &= v + b' \cdot (d/t - 1) \\ Z &= w + c' \cdot (d/t - 1) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 14})$$

Las coordenadas locales respectivas en el plano de proyección son:

$$\begin{aligned} x &= (-b'(u - a) + a'(v - b)) / (a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{2}} \\ y &= (-a'c'(u - a) - b'c'(v - b) + (a'^2 + b'^2)(w - c)) / t / (a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 15})$$

Las imágenes logradas con las leyes de la perspectiva intermedia o perspectiva generalizada tienen las propiedades siguientes:

1. Un objeto plano contenido en un plano perpendicular al rayo principal (plano frontal) produce una figura imagen enteramente semejante. Consecuentemente, las imágenes de objetos tridimensionales cualesquiera obtenidas en planos frontales distintos son semejantes.
2. Las imágenes obtenidas desde un punto de vista dado se parecen a las imágenes correspondientes a perspectivas cónicas obtenidas desde un punto de vista ubicado más atrás y situado en la recta del rayo principal. Esta circunstancia surge de la propiedad siguiente de los rayos de proyección curvos o curvas de tamaños reales deducidas anteriormente. Las tan-

gentes a la familia de curvas para un valor fijo de x ($x = t$), concurren todas a un mismo punto sobre el eje x distante $t \cdot (i/(1 - i))$ a la izquierda del origen (Fig. 10); el segmento subtangente es constante e igual a $t/(1 - i)$. Resulta en consecuencia, que si la distancia entre el punto de vista y el centro de atención es t , la imagen resultante se parece a la que resultaría para una perspectiva cónica en la que el punto de vista hubiese retrocedido $t \cdot (i/(1 - i))$, es decir, como si la distancia entre el punto de vista y el centro de atención fuese $t/(1 - i)$. El punto citado puede considerarse como un pseudo-punto-de-vista para la perspectiva curva.

3. Las rectas en el objeto a representar en perspectiva, contenidas en planos frontales y las que cortan al rayo principal, dan como resultado rectas en sus respectivas imágenes.
4. La curvatura de los rayos de proyección hace curvar, en general, las líneas imágenes correspondientes a líneas rectas del objeto. Ese efecto, sin embargo, es casi imperceptible cuando el punto de vista no se halla muy cerca del

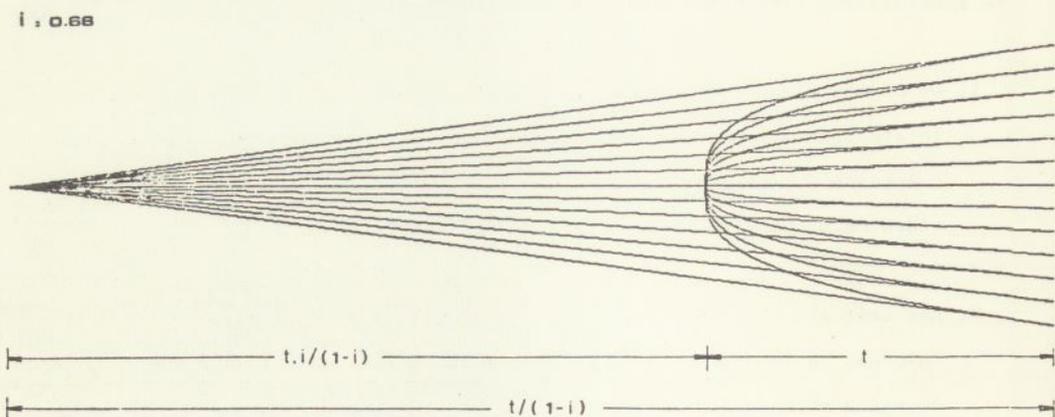


Fig. 10. Propiedad de los rayos de proyección curvos

objeto y para ángulos subtendidos no muy grandes. La curvatura de las líneas de proyección se hace infinito en el origen si \underline{i} es menor que 0.5 y cero si \underline{i} es mayor. Para puntos alejados del origen la curvatura tiende a cero para cualquier índice \underline{i} .

5. Para el valor del índice \underline{i} igual a 0.5, las curvas de proyección resultan ser haces de parábolas tangentes en sus vértices al eje vertical en el origen.
6. Con respecto a los rayos de proyección rectos de la perspectiva cónica ($i = 0$), los rayos curvos empujeñecen las dimensiones o partes cercanas y agrandan las dimensiones o partes lejanas, introduciendo de esa manera la tendencia hacia la constancia del tamaño de los objetos percibidos. Es sencillo deducir que la tangente a una curva de proyección trazada a una distancia \underline{y} del rayo principal, corta a su tangente vertical en el origen, a una distancia \underline{i} .y de él.

VII. EL PROGRAMA IMAGEN Y EJEMPLOS

Sobre la base de las ecuaciones descriptas el autor ha preparado un programa general de computadora denominado IMAGEN (Ref. 16) que permite la realización de perspectivas intermedias con índices variables \underline{i} de objetos tridimensionales cualesquiera (Fig. 11). Las Figs. 12 y 13 ilustran para índices distintos las figuras correspondientes a un cubo desde dos puntos de vista. En el primer caso, el punto de vista PV se halla a una distancia DI muy próxima al centro de atención CA, y el ángulo subtendido por los rayos rectos en la proyección cónica respectiva es grande. Como consecuencia aparecen curvos algunos lados del cubo para las imágenes correspondientes a valores in-

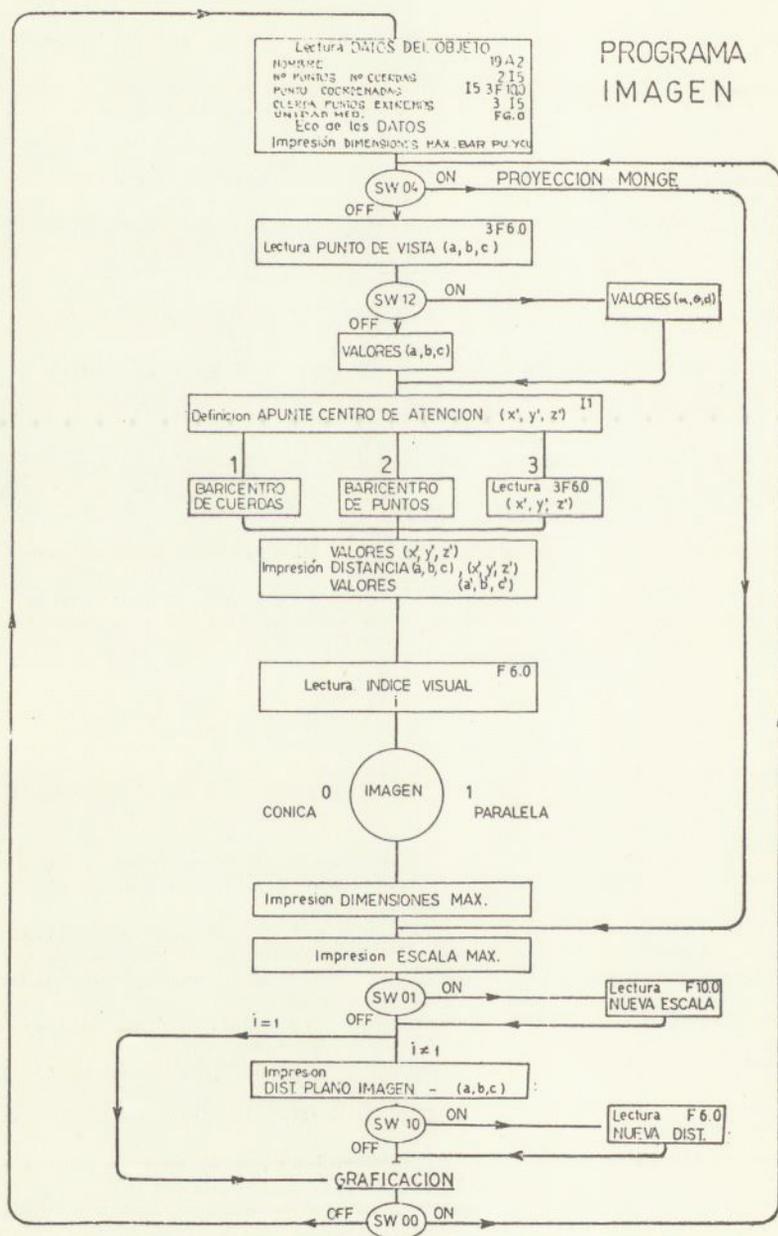


Fig. 11. Esquema operativo del programa IMAGEN

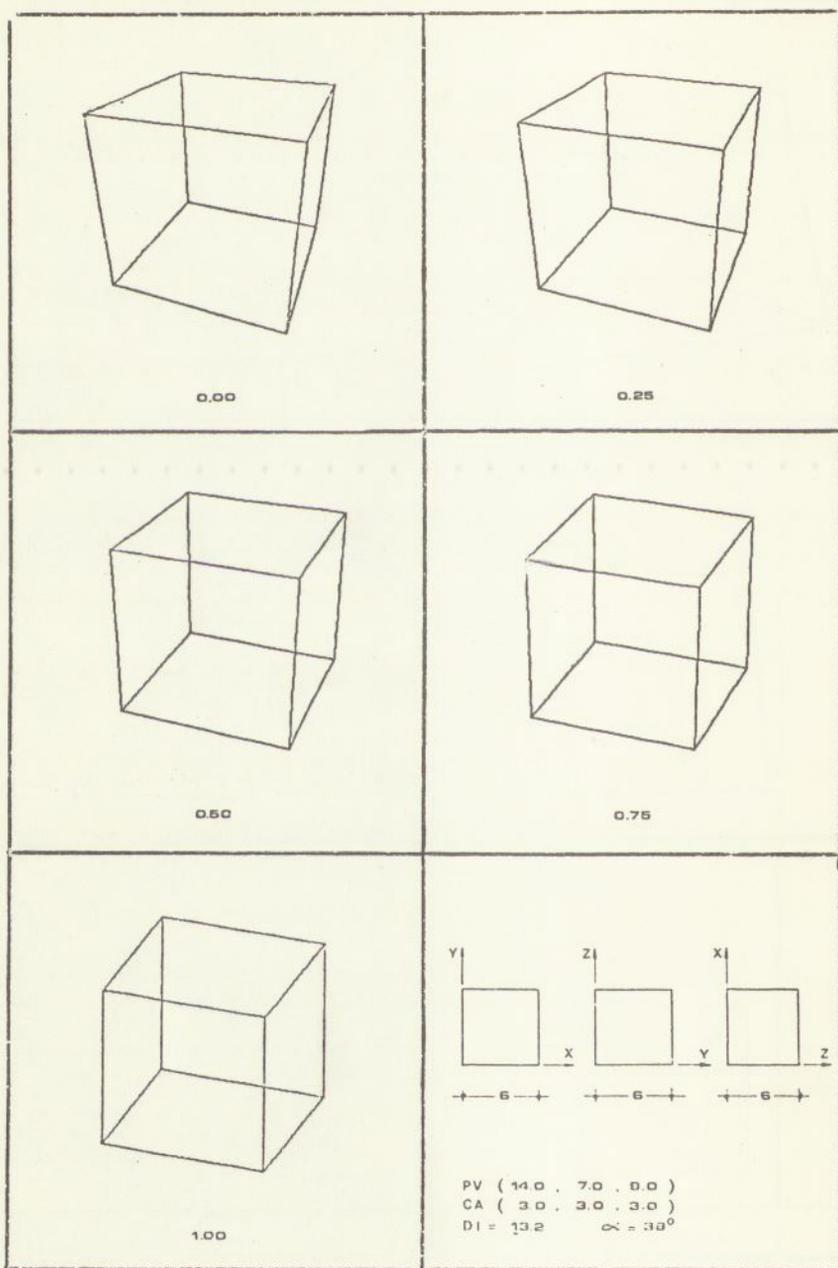


Fig. 13. Figura de cubo (2)

termedios de i . Para el segundo caso, en el cual la distancia es mayor, y por ende, el ángulo menor, la curvatura es poco perceptible. Consideraciones similares se aplican a las Figs. 14 y 15 que muestran, análogamente, las imágenes correspondientes a un esquema simplificado de mesa.

VIII. CONCLUSIONES

Las perspectivas obtenidas con el procedimiento propuesto configuran una nueva representación plana de objetos tridimensionales, sólo en poca magnitud distinta de la representación plana que se logra con las reglas de la perspectiva cónica rectilínea, para las distancias y los ángulos habituales de observación de los objetos. Las imágenes respectivas no pretenden en absoluto simular la percepción visual; en términos simples, en el procedimiento presentado, los objetos lejanos no aparecen tan disminuidos en sus tamaños como en la perspectiva cónica, e inversamente, los próximos, no aparecen tan aumentados. El grado de apartamiento lo mide un índice que se ha correlacionado con el índice de regresión fenomenológica. Thouless estudió experimentalmente los índices de diferentes clases de sujetos (Ref. 17) y alentó el desarrollo de nuevas convenciones para la representación plana de objetos.

La manera como las personas perciben los objetos varía significativamente, y depende, en particular, de la escala de los tamaños observados (Ref. 18). Es indudable entonces la variabilidad espacial y temporal del índice de regresión. No obstante, el autor considera que la posibilidad de seleccionar a voluntad un dado valor del índice, a los efectos de la representación plana de un objeto o escena, agrega una nueva característica a la generación de imágenes. En ese sentido, cabría pensar la factibilidad de la fabricación de un nuevo tipo de cámara fotográfica que pudiese producir imágenes de acuerdo con las leyes presentadas de la perspectiva intermedia. Tal cámara debería contar con

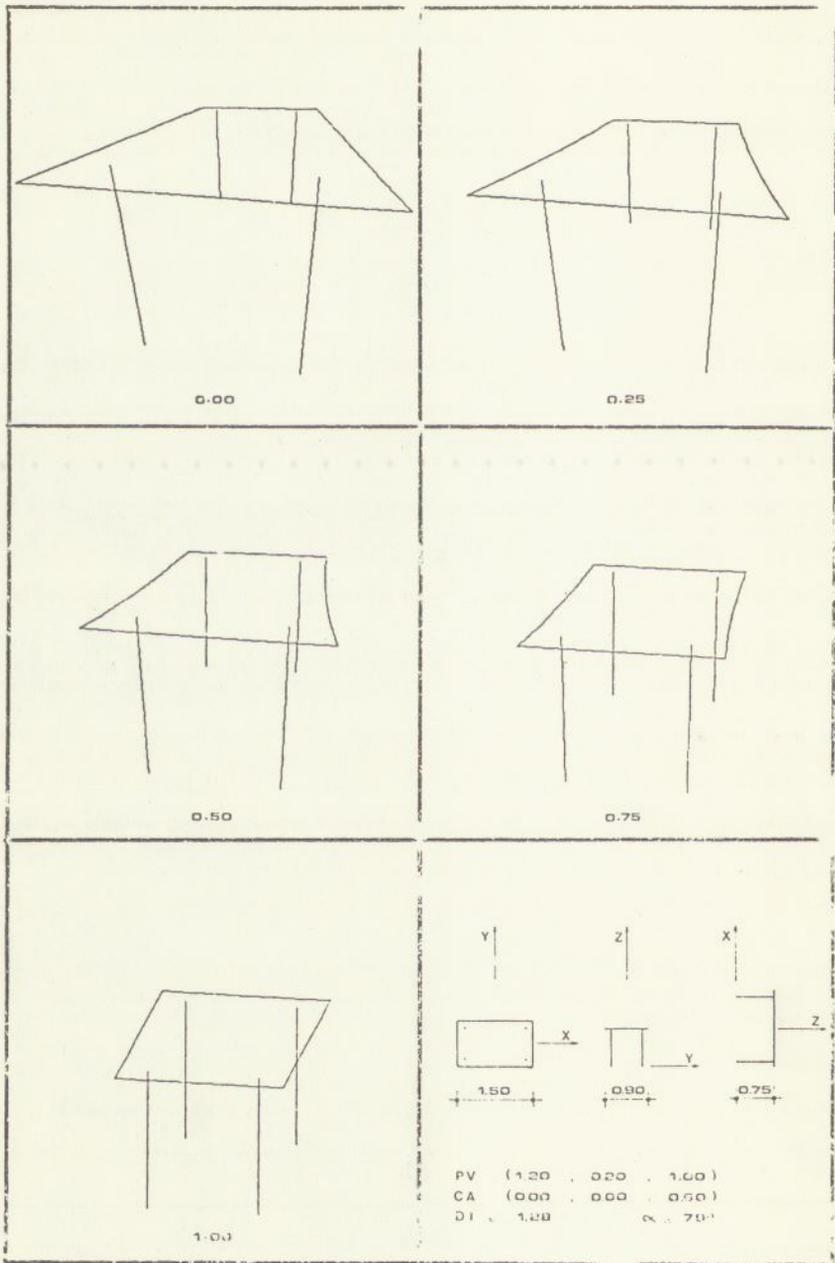


Fig. 14. Figura de mesa (1)

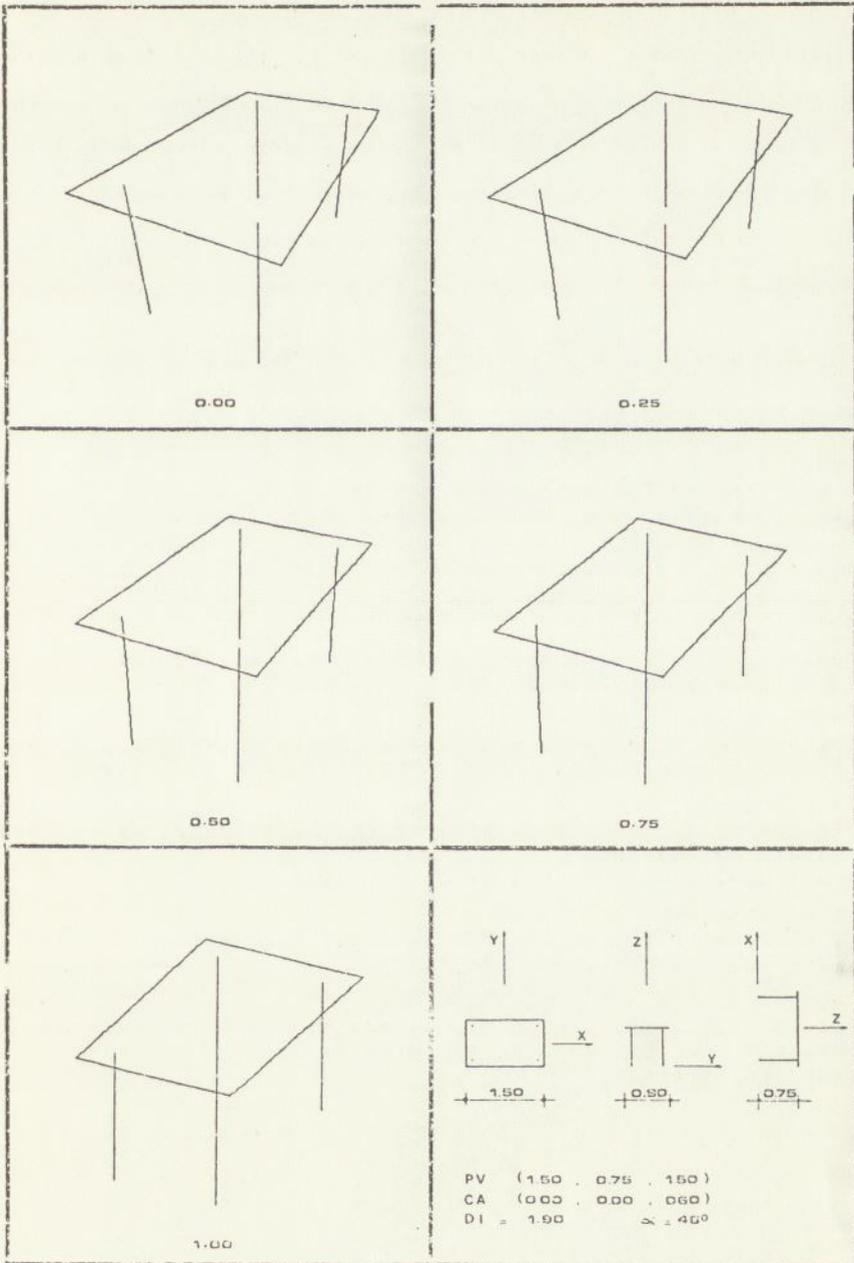


Fig. 15. Figura de mesa (2)

una palanca o perilla que permitiese elegir a voluntad el índice deseado, de manera similar a como actualmente se selecciona la velocidad de obturación, la abertura del diafragma o la distancia focal en las máquinas que poseen zoom. La realización tecnológica de tal cámara requiere el reconocimiento de las distancias a que se encuentran los diversos puntos de la escena u objeto a captar, o la posibilidad de poder curvar convenientemente, según la Ec. 1, a los rayos de proyección desde los puntos reales hasta los puntos imágenes.

Referencias bibliográficas

12. H.C. Reggini
Perspectivas mediante computadoras
La Ingeniería 1026, Buenos Aires, 1973.
13. Leonardo da Vinci
Tratado de la pintura
Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires, 1947.
14. J. Needham
Science and Civilization in China, Vol. 4, Pt. III
Cambridge Univ. Press, 1971.
15. H.C. Reggini
Simulación en computadora de una cámara fotográfica
Segundas Jorn. Latin. Comp., UTN, Buenos Aires, 1974.
16. H.C. Reggini
Perspectivas que incluyen el efecto psicológico de la constancia del tamaño
La Ingeniería 1032, Buenos Aires, 1974.
17. R.H. Thouless
Individual Differences in Phenomenal Regression
Brit. J. Psychol., 22, 216, 1932.
18. A.M. Battro
The possible metrics in visual space. Some experimental evidence for the lacking elliptic geometry
(por publicarse).