COMUNICACIONES

EL PROBLEMA DE DECISION DEL CALCULO DE PREDICADOS (*)

Por José F. Prida

§ 1 PRELIMINARES

El conjunto de los números naturales será denotado por N.

Para todo conjunto $A \subset N$, $A \neq \emptyset$, se denotará por $\mu x[x \varepsilon A]$ al menor elemento de A.

DF 1 Un **conjunto** $A \subset N$ se llamará **recursivamente enumerable** si y sólo si es vacío o existe una función recursiva f tal que $A = f(N)$.

TH 1 Para todo conjunto recursivamente enumerable $A \subset N$ existe un conjunto recursivo $B \subset N \times N$ tal que para todo x se verifica: $x \varepsilon A \Longleftrightarrow \exists y \langle x,y \rangle \varepsilon B$.

Dem.:

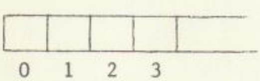
Si $A = \emptyset$, entonces $x \varepsilon A \Longleftrightarrow \exists y \langle x,y \rangle \varepsilon \emptyset$

Si $A = f(N)$, f recursiva, entonces $x \varepsilon A \Longleftrightarrow \exists y \, (f(x) = y)$, siendo obviamente recursivo el conjunto $B = \{\langle x,y \rangle \, / f(x) = y\}$.

Observación: si la función f es conocida, entonces la construcción de f es efectiva.

En lo sucesivo se considerarán máquinas de Turing con una cinta potencialmente infinita sólo por el lado derecho.

FIG 1



Cuando el campo de trabajo es el primero de la cinta y el output es dar un paso a la izquierda, la máquina se para. Unicamente se considerarán máquinas cuyo alfabeto consta del

(*) Este artículo resume un ciclo de conferencias dadas por el autor en la Universidad de Salerno (Italia) durante el mes de septiembre de 1974, invitado por el Profesor de Teoría de la Computabilidad E. Börger.

único simbolo "|" , siendo denotado indistintamente por "*" o por "0" un campo vacío. El número natural k será representado por $\underbrace{||\ldots|}_{k\,+\,1}$. Si en un determinado momento la inscripción sobre la cinta es $a_o\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots$ y el campo de trabajo es el de lugar k y el estado es q, la correspondiente configuración (descripción instantanea) será representada por $a_o \ldots a_k^q \ldots$

Se denotarán respectivamente por *, |, r, 1 las máquinas

$$\begin{vmatrix} 0 & * & s & 0 \\ 0 & | & * & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & * & | & 0 \\ 0 & | & s & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & * & r & 1 \\ 0 & | & r & 1 \\ 1 & * & s & 1 \\ 1 & | & s & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & * & 1 & 1 \\ 0 & | & 1 & 1 \\ 1 & * & s & 1 \\ 1 & | & s & 1 \end{vmatrix}$$

donde los outputs r, 1, s significan respectivamente desplazar el campo un lugar a la derecha, un lugar a la izquierda y pararse.

TH 2 Para toda función recursiva f con n argumentos, existe una máquina de Turing M_f tal que para toda n-pla de argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realiza el programa:

$$*\underbrace{||\ldots|}_{x_1+1}* \ldots *\underbrace{||\ldots|}_{x_n+1}\underline{*} \Longrightarrow *\underbrace{||\ldots|}_{x_1+1}* \ldots *\underbrace{||\ldots|}_{x_n+1}*\underbrace{||\ldots\ldots|}_{f(x_1..x_n)+1}\underline{*}$$

donde la marca "-" sirve para denotar el campo de trabajo.

Dem.: Cfr. Hermes (1965), pp. 98 ss.

TH 3 Para todo conjunto recursivamente enumerable $A \subset N$ existe una máquina de Turing M_A tal que para todo x, M_A colocada tras x se para al cabo de un cierto número de pasos si y sólo si $x \in A$.

Dem.:

Sea B tal que $x \in A \Longleftrightarrow \exists y \langle x, y \rangle \in B$ y sea M_g la máquina que calcula la función característica de B

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ si } x \notin B \end{cases} .$$

La máquina $M_A = r|r\,M_g\,1{*}1$ cumple la condición requerida.

Observación: si es conocida una función recursiva f tal que $A = f(N)$, la construcción de M_A es efectiva.

TH 4 Puede encontrarse una aplicación biyectiva y efectivamente computable del conjunto de los números naturales en el de las máquinas de Turing.

Dem.: Cfr. Hermes 1965, pp. 105 ss.

Observación: TH 4 permite identificar una máquina de Turing con su correspondiente número natural.

TH 5 El conjunto STOP = {x / la máquina x colocada sobre la cinta vacía no se para jamás} no es recursivo.

Dem.: cfr. Hermes 1965, pp. 144-5.

§ 2 CALCULO DE PREDICADOS

En el presente apartado se construirá un cálculo de predicados K basado en un lenguaje L sin símbolos para denotar constantes y con un sólo símbolo de función.

2.1. Alfabeto

El lenguaje que va a definirse se basa en un alfabeto S que consta de una infinidad numerable de símbolos distribuídos en las siguientes categorías:

1) Un conjunto infinito Ω de símbolos x, y, z, x_1, x_2, ... denomonados **variables individuales**.

2) Un conjunto Φ formado por el único símbolo f que denota una **función** con un argumento.

3) Un conjunto Π con infinitos símbolos P, Q, R, P_1, P_2... denominados **variables predicativas** con k argumentos (k = 1, 2, ..) Para cada símbolo está determinado el correspondiente k.

4) Un conjunto Λ de símbolos, denominados **símbolos lógicos** compuesto por los elementos $\neg$ (negación), $\vee$ (disjunción), $\bigvee$ (cuantificador existencial).

DF 2 El **alfabeto** S es la reunión de los conjuntos Ω, Φ, Π, Λ.

2.2. Términos

DF 3 El conjunto T de los **términos** es el menor conjunto de sucesiones finitas de elementos de S que verifica:

1) Todo elemento de Ω pertenece a T.

2) Si τ pertenece a T, entonces $f\tau$ también pertenece a T.

2.3. Fórmulas

DF 4 El conjunto F de **fórmulas** es el menor conjunto de sucesiones finitas de elementos de S que verifica:

1) Todo símbolo de predicado con k argumentos seguido de k términos pertenece a F.

2) Si $\alpha \varepsilon F$, entonces $\neg\alpha \varepsilon F$.

3) Si α, $\beta \varepsilon F$, entonces $\vee\alpha\beta \varepsilon F$.

4) Para todo $x \varepsilon \Omega$, si $\alpha \varepsilon F$, entonces $\bigvee x\alpha \varepsilon F$.

Abreviaturas:

$(\neg\alpha) \equiv \neg\alpha$
$(\alpha \vee \beta) \equiv \vee\alpha\beta$
$(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)$
$(\alpha \Rightarrow \beta) \quad (\neg\alpha\vee\beta)$
$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$
$\bigwedge x\alpha \equiv \neg\bigvee x\neg\alpha$
$x' \equiv fx$

DF 5 Una **aparición** de una variable **x** en una fórmula α es **libre** si y sólo si x no pertenece a ninguna parte de α de la forma $\bigvee x\beta$.

DF 6 Una **variable** x es **libre** en una fórmula α si y sólo si α contiene alguna aparición libre de **x**.

2.4. Lenguaje

DF 7 Se denominará **lenguaje** L al triple <S, T, F> .

2.5. Semántica

DF 8 Una valoración del lenguaje L en un conjunto $\omega \neq \emptyset$ es una aplicación v del conjunto Ω de las variables individuales de L en ω, i.e., un elemento $v \varepsilon \omega^{\Omega}$.

DF 9 Una **interpretación** del lenguaje L en un conjunto $\omega \neq \emptyset$ es una aplicación I definida en la reunión de los conjuntos Φ (funciones) y Π (predicados) tal que:

(1) $I(f)$ es una aplicación f_I de ω en ω.

(2) Para todo predicado P con k argumentos $I(P)$ es una aplicación P_I de ω^k en el conjunto $\{0,1\}$ (falso y verdadero).

DF 10 El **valor de un término** τ en una interpretación I del lenguaje L en un conjunto $\omega \neq \emptyset$ para una valoración v es el elemento $\tau_I(v)$ de ω definido de la siguiente forma:

Para toda variable x, si $\tau \equiv x$, entonces $\tau_I(v) = v(x)$;

Si $\tau \equiv f\tau_1$, entonces $\tau_I(v) = f_I(\tau_{1_I}(v))$.

DF 11 El **valor de una fórmula** α en una interpretación I para una valoración v es un elemento $\alpha_I(v)$ del conjunto $\{0,1\}$ definido de la siguiente forma:

Si $\alpha \equiv P\tau_1 \ldots \tau_n$, entonces $\alpha_I(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } P_I\ \tau_{1_I}(v)\ldots\ \tau_{n_I}(v) \\ 0 \text{ si } \overline{P_I\ \tau_{1_I}(v)\ldots\ \tau_{n_I}(v)} \end{cases}$

Si $\alpha \equiv \neg\beta$, entonces $\alpha_I(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta_I(v) = 0 \\ 0 \text{ si } \beta_I(v) = 1 \end{cases}$

Si $\alpha \equiv (\beta \vee \gamma)$, entonces $\alpha_I(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta_I(v) = 1 \text{ ó } \gamma_I(v) = 1 \\ 0 \text{ si } \beta_I(v) = 0 \text{ y } \gamma_I(v) = 0 \end{cases}$

Si $\alpha \equiv \bigvee x\beta$, sea v_j la siguiente valoración de Ω en ω:

$v_j(x) = j\varepsilon\omega$; $v_j(y) = v(y)$ para todo $y\varepsilon\Omega$, $y \neq x$.

Entonces $\alpha_I(v) = 1$ si para algún $j\varepsilon\omega$ se verifica $\beta_I(v_j) = 1$; y $\alpha_I(v) = 0$ en caso contrario.

Consecuencias:

Si $\alpha \equiv (\beta \wedge \gamma)$, entonces $\alpha_I(v) = 1$ si y sólo si $\beta_I(v) = 1$ y $\gamma_I(v) = 1$.

Si $\alpha \equiv \bigwedge x\beta$, entonces $\alpha_I(v) = 1$ si y sólo si $\beta_I(v_j) = 1$ para todo $j\varepsilon\omega$.

2.6. Validez y satisfactibilidad

DF 12 Una **fórmula** α es **válida en una interpretación** I en un conjunto ω si para toda valoración $v \in \omega^{\mathfrak{R}}$ se verifica $\alpha_I(v) = 1$.

DF 13 Una **fórmula** es **válida en un conjunto** ω si es válida en toda interpretación en ω.

DF 14 Una **fórmula es universalmente válida** (o una tautología) si es válida en todo conjunto.

DF 15 Una **fórmula** es **satisfactible** si es válida en alguna interpretación.

DF 16 Un **modelo** de una fórmula es una interpretación en la que esa fórmula es válida.

De DF 14, DF 15 y DF 11 se sigue inmediatamente:

TH 6 Para toda fórmula α se verifica: α es satisfactible si y sólo si $\neg\alpha$ no es universalmente válida.

DF 18 Una **fórmula prénex** es una fórmula con todos los cuantificadores al principio.

TH 7 · Para toda fórmula α puede encontrarse efectivamente otra fórmula prenex β tal que $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ es una tautología.

Dem.:

TH 7 puede probarse fácilmente por inducción a partir de la validez universal de las fórmulas:

$(\bigvee x\alpha \Leftrightarrow \bigvee y\alpha(y/x))$, donde y es una variable que no aparece en α y donde $\alpha(y/x)$ es el resultado de sustituir en α cada aparición de x por y.

$((\bigvee x\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \bigvee x(\alpha \vee \beta))$, supuesto que x no aparece en β.

$(\neg \bigvee x\alpha \Leftrightarrow \bigwedge x \neg\alpha)$

Ejemplo: $(\bigwedge x \bigvee y Pxy \Rightarrow \bigvee y \bigwedge x Qyx)$ eq. $(\bigwedge t \bigvee z Ptz \Rightarrow \bigvee y \bigwedge x Qyx)$ eq. $(\neg \bigwedge t \bigvee z\ Ptz \vee \bigvee y \bigwedge x Qyx)$ eq. $(\bigvee t \bigwedge z \neg Ptz \vee \bigvee y \bigwedge x Qyx)$ eq. $\bigvee t \bigwedge z \bigvee y \bigwedge x (Ptz \Rightarrow Qyx)$.

Sea $\alpha \equiv \bigwedge x \bigwedge y \beta(x,x',y)$, donde β es una fórmula sin cuantificadores con las únicas variables libres x, y, en la que la función ' aparece sólamente afectando a la variable x; y sea $\alpha^* \equiv \bigwedge x \bigvee z \bigwedge y \beta(x,z,y)$.

TH 8 Para todo conjunto $\omega \neq \emptyset$ se verifica: α es satisfactible en ω si y sólo si lo es α^*.

Dem.:

Si la interpretación I del lenguaje L en el conjunto $\omega \neq \emptyset$ es un modelo de α, para todo $a,b \varepsilon \omega$ y todo $v \varepsilon \omega^{\Omega}$ tal que $v(x) = a$, $v(y) = b$ se verifica

(*) $$\beta(x,x',y)_I(v) = 1 .$$

Sea $c = v(x') = f_I(v(x)) \varepsilon \omega$ y sea w una valoración cualquiera de Ω en ω tal que $w(x) = a$, $w(y) = b$, $w(z) = c$. Puesto que $w(x) = v(x)$, $w(y) = v(y)$, $w(z) = v(x')$, se sigue de (*) que $\beta(x,y,z)_I(v) = 1$, lo que implica que I es un modelo de $\bigwedge x \bigvee z \bigwedge y \beta(x,z,y)$.

Recíprocamente, supuesto que una interpretación I del lenguaje L en el conjunto $\omega \neq \emptyset$ es un modelo de α^*, para todo $a \varepsilon \omega$ existe un $c \varepsilon \omega$ tal que para todo $b \varepsilon \omega$ y toda valoración v tal que $v(x) = a$, $v(z) = c$, $v(y) = b$ se verifica

(**) $$\beta(x,z,y)_I(v) = 1.$$

Sea $\underline{f}$ una función con un argumento definida en ω tal que para todo $m \varepsilon \omega$ se verifica $\underline{f}(m) = c$, y sea I' la interpretación de L en ω tal que $f_{I'} = \underline{f}$ y $P_{I'} = P_I$ para toda variable predicativa P. Puesto que f no aparece en α^*, I' es un modelo de α^* y se verifica

(***) $$\beta(x,z,y)_{I'}(v) = 1.$$

Puesto que

(****) $$z_{I'}(v) = v(z) = c = \underline{f}(a) = f_{I'}(v(x)) = (fx)_{I'}(v) = x'_{I'}(v),$$

se sigue de (***) y $\binom{**}{**}$ que $\beta(x,x',y)_{I'}(v) = 1$, lo que prueba que I' es un modelo de $\bigwedge x \bigwedge y \beta(x,x',y)$.

DF 19 El **grado** de una fórmula prénex es el número de cuantificadores universales que preceden a algún cuantificador existencial.

DF 20 Una **fórmula normal de Skolem** es una fórmula prénex de grado cero.

TH 9 Para toda fórmula α puede construirse efectivamente una fórmula normal de Skolem α' tal que α y α' son válidas en los mismos dominios.

Dem.:

Sea α^* una fórmula prénex equivalente a α (i.e., tal que la fórmula $(\alpha \Leftrightarrow \alpha^*)$ es universalmente válida). Puede suponerse que α^* comienza con un cuantificador existencial, ya que de lo contrario se elegiría la fórmula equivalente $\bigvee x(\alpha^* \wedge (Gx \vee \neg Gx))$, donde los símbolos x y G no aparecen en α^*. Si α^* es de grado cero no hay nada que probar. En caso contrario será de la forma

(*) $$\bigvee x_1 \bigvee x_2 \ldots \bigvee x_n \bigwedge y\ \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n, y).$$

Sea respectivamente H y z una variable predicativa con n+1 argumentos y una variable individual que no aparecen en α^* Probaremos que α^* y

(**) $$\bigvee x_1 \ldots \bigvee x_n \bigvee z((\beta(x_1, \ldots, x_n, z) \wedge \neg Hx_1 \ldots x_n z) \vee \bigwedge y Hx_1 \ldots x_n y)$$

son válidas en los mismos conjuntos. En efecto, sea I una interpretación cualquiera del lenguaje L en un conjunto $\omega \neq \emptyset$. Entre los elementos de ω se definirá la siguiente relación con n+1 argumentos: para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \omega$

(1) $$Aa_1 a_2 \ldots a_n b = 1 \Longleftrightarrow \beta(x_1, \ldots, x_n, y)_I(w) = 1,$$

donde w es una valoración de Ω en ω tal que $w(x_1) = a_1, \ldots,$ $w(x_n) = a_n$, $w(y) = b$. Supongamos que (**) es válida en ω. Sea I' una interpretación de L en ω tal que $H_{I'} = A$ y para todo predicado $P \neq H$, $P_{I'} = P_I$. De la validez de (**) en ω se sigue que existen elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$, c de ω tales que para todo $v \varepsilon \omega^\Omega$ tal que $v(x_1) = a_1, \dots, v(x_n) = a_n$, $v(z) = c$ se verifica

(2) $$(\beta(x_1,\dots,x_n,z)_{I'}(v) \wedge \overline{(Hx_1\dots x_n z)_{I'}(v)}) \vee (\bigwedge y Hx_1\dots x_n y)_{I'}(v) = 1$$

Puesto que

(3) $$\beta(x_1,\dots,x_n,z)_{I'}(v) = \beta(x_1,\dots,z)_I(v) = Av(x_1)\dots v(x_n)v(z) = (Hx_1\dots x_n z)_{I'}(v)$$

se sigue de (2)

(4) $$(\bigwedge y Hx_1\dots x_n y)_{I'}(v) = 1 .$$

Así pues, para todo elemento $j \varepsilon \omega$ y toda valoración $w \varepsilon \omega^\Omega$ tal que $w(x_1) = a_1, \dots, w(x_n) = a_n$, $w(z) = c$, $w(y) = j$ se verifica

(5) $$(Hx_1\dots x_n y)_{I'}(w) = 1$$

y en consecuencia, por (3),

(6) $$\beta(x_1, \dots, x_n, y)_{I'}(w) = 1,$$

lo que implica que I', y por tanto I, es un modelo de (*). Así pues, (*) es también válida en ω.

Recíprocamente, supongamos que (*) es válida en un cierto conjunto ω. Sea I una interpretación de L en ω. Para todo $v \varepsilon \omega^\Omega$ se verificará:

(7) $$(\bigvee x_1 \dots \bigvee x_n \bigwedge y \beta(x_1, \dots, x_n, y))_I(v) = 1$$

y por tanto existen elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ de ω tales que para todo $b \varepsilon \omega$ y toda valoración w de Ω en ω tal que $w(x_1) = a_1, \dots, w(x_n) = a_n$, $w(y) = b$ se verifica

(8) $$\beta(x_1, \dots, x_n, y)_I(w) = 1.$$

Entonces se tiene:

Si $(\bigwedge y Hx_1\dots x_n y)_I(w) = 1$, (**) es válida en ω.

Si $(\bigwedge y Hx_1\dots x_n y)_I(w) = 0$, existe un $c \varepsilon \omega$ tal que para toda valoración w' tal que $w'(x_1) = a_1, \dots, w'(x_n) = a_n$, $w'(y) = c$ se verifica

(9) $$(Hx_1\dots x_n y)_I(w') = 0,$$

es decir,

(10) $(\neg H x_1 \ldots x_n y)_I(w') = 1$,

siguiendose de (10) y (8) (elijiendo b = c) que (**) es válida en la interpretación I y, en consecuencia, válida en ω.

Por otra parte tenemos que (**) será equivalente a otra fórmula prénex, que puede ser escogida de forma que comience con $\bigvee x_1 \ldots \bigvee x_n \bigvee z$, continúe con los cuantificadores de $\beta(x_1, \ldots, x_n, z)$ en su mismo orden y termine con $\bigwedge y$. Obviamente el grado de esta fórmula es una unidad inferior al de (**), con lo que, iterando el procedimiento, se llega a una fórmula prénex de grado 0 válida en los mismos dominios que (*). q.e.d.

De TH 9 se sigue inmediatamente:

CRL 9a Para toda fórmula con un prefijo del tipo $\bigvee\bigwedge\bigvee$ puede encontrase efectivamente otra fórmula con un prefijo del tipo $\bigvee\bigvee\bigvee\bigwedge$ de manera que una es universalmente válida si y sólo si lo es la otra.

CRL 9b Para toda fórmula con un prefijo del tipo $\bigwedge\bigvee\bigwedge$ puede encontrarse efectivamente otra con un prefijo del tipo $\bigwedge\bigwedge\bigwedge\bigvee$ de manera que una es satisfactible si y sólo si lo es la otra.

2.7. Teorema de completitud

TH 10 Se puede definir inductivamente una aplicación g efectivamente computable y biyectiva del conjunto N de los números naturales en el conjunto F de las fórmulas .

Dem.:

Obviamente puede establecerse de forma efectiva una correspondencia uno a uno entre los símbolos del alfabeto S de L y los números naturales mayores que cero. Sea $\bar{s}$ el número asignado al símbolo s. Entonces a la fórmula $\alpha \equiv s_1 s_2 \ldots s_k$ se hará corresponder el número natural

$$h(\alpha) = p(1)^{\bar{s}_1} \ldots p(k)^{\bar{s}_k}$$

donde p(n) es el enésimo número primo (i.e.: p(1) = 2, etc.)

A partir de h puede definirse una aplicación g de N en F biyectiva y efectivamente computable de la siguiente forma:

$g(0) = h^{-1}(\mu x[x \varepsilon h(F)]$

$g(n+1) = h^{-1}(\mu x[x \varepsilon h(F)-\{g(0), g(1), \ldots, g(n)\}])$

Observación: TH 10 permite identificar un número natural x con su correspondiente fórmula g(x).

TH 11 El conjunto TAUT de las fórmulas universalmente válidas es recursivamente enumerable. Se puede encontrar efectivamente una función recursiva total F tal que F(N) = TAUT (Gödel,1930).

Dem.: Ver Hermes (1973), pp.122-ss. Una demostración algebraica del teorema de completitud puede encontrarse en F.Prida (1973), pp. 1-43.

Sea SATIS el conjunto de las fórmulas satisfactibles y sea STOP el conjunto de las máquinas de Turing que, colocadas sobre la cinta vacía, se paran al cabo de un cierto número de pasos.

TH 12 Para toda fórmula x puede construirse efectivamente una máquina de Turing M^x tal que $M^x \varepsilon \overline{STOP}$ si y sólo si $x \varepsilon SATIS$.

Dem.:

Sea n(x) la negación de x (i.e.: $n(x) = g^{-1}(\neg g(x))$). Por TH 3, TH 6 y TH 11 se verifican las equivalencias:

$x \varepsilon SATIS$

$n(x) \not\varepsilon TAUT$

M_{TAUT} colocada tras n(x) no se para nunca.

Obviamente la última proposición es equivalente a

$M^x \varepsilon \overline{STOP}$,

donde M^x es la máquina $(|r)^{n(x)+1} M_{TAUT}$, q.e.d.

§ 3 UN PROBLEMA DE DOMINO EN RELACION CON LA CLASE $\wedge\vee\wedge$(*)

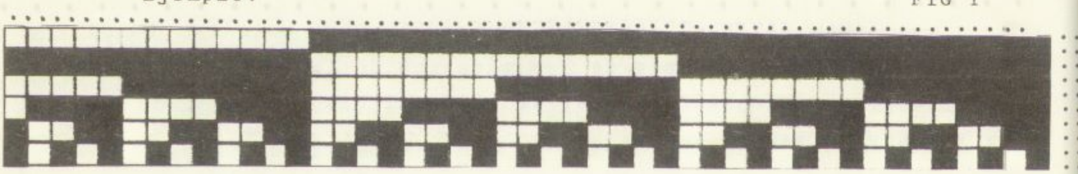
3.1. Dominós

DF 21 Un **mosaico** es una partición del conjunto U de los cuadrados unitarios del primer cuadrante del plano en negros y blancos (i.e.: una aplicación de U en {0,1}), que verifica:

i) Los cuadrados de la primera fila tienen colores alternados.

ii) Para cada cuadrupla de cuadrados A_1. A_2, A_3, A_4 tales que A_2 está situado inmediatamente a la derecha de A_1, A_4 inmediatamente a la derecha de A_3 y A_3 inmediatamente encima de A_1 se verifica: los colores de A_3 y A_4 son distintos si y sólo si A_1 es negro y A_2 es blanco.

Ejemplo: FIG 1

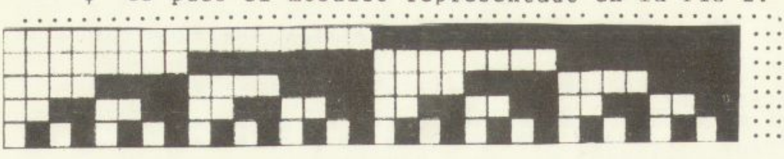


DF 22 De denotará por ϕ^* el mosaico que verifica:

iii) Todo los cuadrados de la primera columna de U son blancos.

ϕ^* es pues el mosaico representado en la FIG 2.

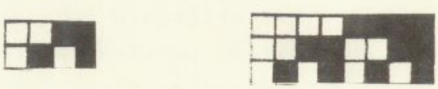
FIG 2



DF 23 Un n-mosaico es una partición de los cuadrados unitarios de un rectángulo de dimensiones $2^{n+2} \times (n+2)$ $(n = 0, 1,...)$ en blancos y negros que verifica i)-iii).

Así pues, para n = 0, 1 los correspondientes n-mosaicos son

FIG 3



(*) Un problema de dominó, ideado por Hao Wang en 1961, condujo en 1962 a Kahr, Moore y Wang a la demostración de la indecidibilidad (relativa a satisfactibilidad) de la clase $\wedge\vee\wedge$. En el coloquio de lógica matemática de la Universidad de Manchester de agosto de 1969, Hermes presentó una prueba notablemente simplificada del mismo resultado a partir de un problema de dominó más sofisticado. En la presente exposición se sigue la demostración de Hermes con leves modificaciones.

Fácilmente puede probarse (ver FIG 1 y 3):

TH 1.3 Para cualquier $n \in N$, todo mosaico contiene un n-mosaico.

DF 2.4 Un **dominó** es un triple $D = \{D^*, D', D''\}$, donde D^* es un conjunto de fichas cuadradas de dimensiones 1×1, cada una de cuyas aristas tiene un cierto color, eventualmente repetidos, y donde D' y D'' son subconjuntos de D^* (formalmente una ficha es una cuadrupla $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$).

Sea un dominó D, un mosaico ϕ y un recubrimiento F del conjunto U con fichas de D^* (i.e.: una aplicación de U en D^*).

DF 2.5 El **recubrimiento** F es **D-ϕ coherente** si y sólo si se verifica:

a) Sobre cada cuadrado blanco de la primera fila de U está una ficha de D'.

b) Sobre cada cuadrado negro está una ficha de D".

c) Para cada par de cuadrados A_1, A_2 tales que A_2 está inmediatamente a la derecha de A_1 y A_1 es blanco, las fichas sobre A_1 y A_2 tienen los mismos colores adyacentes (coherencia horizontal).

d) Para cada par de cuadrados A_1, A_2 tales que A_2 está inmediatamente encima de A_1 y A_2 es blanco, las fichas sobre A_1 y A_2 tienen los mismos colores adyacentes (coherencia vertical).

Ejemplo:

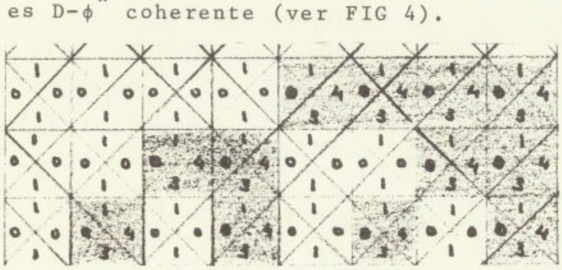
Sea d_1 = , d_2 = , $D^* = \{d_1, d_2\}$, $D' = \{d_1\}$, $D'' = \{d_2\}$.

El recubrimiento F

$$F(A) = \begin{cases} d_1 & \text{si } \phi^*(A) = 0 \text{ (blanco)} \\ d_2 & \text{si } \phi^*(A) = 1 \text{ (negro)} \end{cases}$$

es D-ϕ^* coherente (ver FIG 4).

FIG 4



DF 26 Un **dominó** D se llamará **coherente** si y sólo si existe un mosaico ϕ y un recubrimiento F tal que F es D-ϕ coherente.

3.2. Dominó asociado a una máquina de Turing

Sea M una máquina de Turing basada en el alfabeto $\{|\}$, al que se añade el símbolo impropio "0" para denotar un campo vacío, y sea $\{q_0, q_1, \ldots, q_s\}$ el conjunto de los estados de M.

DF 27 De denominara **dominó asociado a la máquina M** al triple $D_M = \{D^*_M, D'_M, D''_M\}$, donde:

1) D_M es el conjunto formado por las las cuatro fichas (W) (B), (C), (C') y las seis clases de fichas (a), (qar), (qal), [qa], [qar], [qal] , donde q y a varían respectivamente sobre los conjuntos $\{q_0, q_1, \ldots, q_s\}$ y $\{0, |\}$.

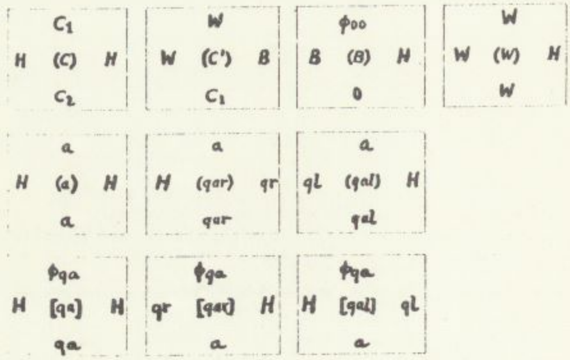
2) D'_M consta únicamente de la ficha (C).

3) D''_M consta únicamente de la ficha (0).

En las fichas de D^*_M aparecen los colores C_1, C_2 (corner), B (beginning), H (horizontal), W (west), S (stop) y las clases de colores a, qa, qr, ql, qar, qal, donde a y q varían como en DF 27 1).

Los colores de las fichas vienen descritos por el siguiente diagrama

FIG 5



donde ϕ es la siguiente aplicación: para todo $q\varepsilon\{q_o, \ldots, q_s\}$ y todo $a\varepsilon\{|, 0\}$

$$\phi_{qa} = \begin{cases} q'a' & \text{si } qaa'q' \varepsilon M \\ q'ar & \text{si } qarq' \varepsilon M \\ q'al & \text{si } qalq' \varepsilon M \\ S & \text{si } qasq' \varepsilon M \end{cases} .$$

TH 14 Si la máquina de Turing M colocada sobre la cinta vacía no se para nunca (i.e., si $M\varepsilon\overline{STOP}$), entonces el dominó D_M es coherente.

Dem.:

Colocada sobre la cinta vacía, la máquina M irá pasando por una serie infinita de configuraciones c_0, c_1, c_2, ..., cada una de las cuales servirá para definir un recubrimiento de una fila del primer cuadrante U con fichas de D_M^*. La construcción conduce a un recubrimiento F de U, que resultará ser D_M-ϕ^* coherente.

Definición de F:

1) La fila inferior S_{-1} de U se recubrirá por repetición indefinida del bloque B_{-1} de dos fichas (C), (0).

2) La segunda fila S_0 de U se recubrirá por repetición indefinida del bloque B_0 de cuatro fichas (C'), (B), (0), (0).

3) Sea $c_j = a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}\, a_n^q\, a_{n+1} \ldots$ y sean B_j^d, B_j^r, B_j^l los siguientes bloques de 2^{j+2} fichas:

B_j^d = (W), (a_0), ..., (a_{n-1}) , $[qa_n]$, (a_{n+1}) , ..., $(a_{2^{j+2}-2})$

B_j^r = (W), (a_0), ..., $(qa_{n-1}r)$, $[qa_nr]$, (a_{n+1}) , ..., $(a_{2^{j+2}-2})$

B_j^l = (W), (a_0), ..., (a_{n-1}) , $[qa_nl]$, $(qa_{n+1}l)$, ..., $(a_{2^{j+2}-2})$.

La fila S_j (j = 1, 2, ...) se recubrirá por repetición indefinida del bloque B_j de 2^{j+2} fichas, donde B_j es respectivamente B_j^d, B_j^r, B_j^l, según que la fila de la máquina M responsable del paso de la configuración c_{j-1} a la c_j sea del tipo $\bar{q}aa_nq$ (imprimir), $\bar{q}a_{n-1}rq$ (derecha), $\bar{q}a_{n+1}lq$ (izquierda).

Ejemplo:

Sea M la máquina $r = \begin{vmatrix} 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & | & r & 0 \end{vmatrix}$, con lo que

$\phi_{00} = 00r$

$\phi_{0|} = 0|r$

$c_0 = 0^0 0000\ldots$

$c_1 = 00^0 000\ldots$

$c_2 = 000^0 00\ldots$

F viene definida por el diagrama

FIG 6

(w)	(0)	(00r)	[00r]	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(W)	(00r)	[00r]	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(W)
(c')	(B)	(0)	(0)	(C')	(B)	(0)	(0)	(c')
(c)	(0)	(c)	(0)	(C)	(0)	(C)	(0)	(C)

Volviendo al caso general, probaremos que F es D_M-ϕ^* coherente al verificarse los apartados a) - d) de DF 25.

ad a) Se sigue inmediatamente de la definición de S_{-1}.

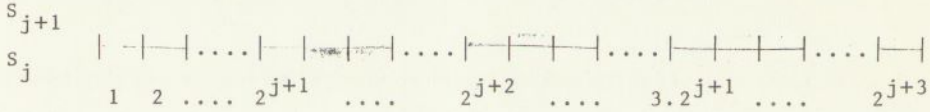
ad b) Trivialmente se cumple en S_{-1} y S_0. Para $j \geq 1$, si $c_j = a_0 \ldots a_n^q \ldots$ se tiene que S_j está recubierta mediante repetición indefinida de un bloque cuyas últimas fichas son (a_{n+2}), (a_{n+3}), ..., $(a_{2^{j+2}})$. Puesto que claramente j debe ser igual o mayor que n y puesto que ($j \geq 1$ y $j \geq n$) implica ($2^{j+1} \geq j+2 \geq n+2$), cada bloque de 2^{j+1} cuadrados negros de la fila S_j estará recubierto por el bloque de fichas $(a_{2^{j+1}-1})$, $(a_{2^{j+1}})$, ..., $(a_{2^{j+2}-2})$. Puesto que $a_j = a_{j+1} = \ldots = 0$, se sigue finalmente de $2^{j+1} - 1 \geq j$, que $(a_{2^{j+1}-1}) = (a_{2^{j+1}}) = \ldots = (a_{2^{j+2}-2}) = (0)$, q,e,d.

ad c) Para S_{-1} no hay nada que demostrar. Para S_0 es trivial. Para S_j ($j = 1, 2, \ldots$) c) es consecuencia de ser horizontalmente coherentes los bloques B_j^d, B_j^r y B_j^1.

ad d) Trivialmente S_{-1} es verticalmente coherente con S_0. Para demostrar la coherencia vertical de S_j con S_{j+1} cuando $j = 0, 1, 2, \ldots$, bastará probar -ver FIG 7- que si O_j es la sucesión de los 2^{j+2} colores superiores del bloque B_j y U_{j+1} es la sucesión de los 2^{j+2} primeros colores inferiores del bloque B_{j+1}, se verifica:

(1) $$O_j = U_{j+1} \; .$$

FIG 7



Para ello, observemos ante todo que para todo $j \geqslant 1$ se sigue del apartado 3) de la definición de F: Si $c_j = a_0 \ldots a_n^q \ldots$, entonces

(2) $$O_j = W, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \phi_{qa_n}, a_{n+1}, \ldots, a_{2^{j+2}-2} \; .$$

Esta igualdad también se cumple para $j=0$, ya que $c_0 = 0^0000\ldots$ y, de acuerdo con 2), $O_0 = W, \phi_{00}, 0, 0$.

Para probar la igualdad (1) distinguiremos tres casos.

Caso I: $qa_n a'q' \in M$

En tal caso obtenemos sucesivamente:

$$c_{j+1} = a_0 \ldots a_{n-1} \, a'^{q'} \, a_{n+1} \ldots ,$$

$$B_{j+1} = (W), (a_0) \ldots, (a_{n-1}), \left[q'a'\right], (a_{n+1}), \ldots, (a_{2^{j+3}-2}),$$

(3) $$U_{j+1} = W, a_0, a_{n-1}, q'a', a_{n+1}, \ldots a_{2^{j+2}-2} ,$$

siguiendose (1) de (2), (3) y de $\phi_{qa_n} = q'a'$.

Caso II: $qa_n rq' \in M$

En tal caso obtenemos sucesivamente:

$$c_{j+1} = a_0 \ldots a_n \, a_{n+1}^{q'}, a_{n+2}, \ldots ,$$

$$B_{j+1} = (W), (a_0), \ldots, (q'a_n r), \left[q'a_{n+1} r\right], (a_{n+2}), \ldots, (a_{2^{j+3}-2}),$$

(4) $$U_{j+1} = W, a_0, \ldots, q'a_n r, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2^{j+2}-2} ,$$

siguiendose (1) de (2), (4) y de $\phi_{qa_n} = q'a_n r$.

Caso III: $qa_n 1q' \in M$

En tal caso obtenemos sucesivamente:

$c_{j+1} = a_0 \ldots a_{n-1}^{q'}\ a_n\ \ldots,$

$B_{j+1} = (W),\ (a_0), \ldots,\ \left[q'a_{n-1}1\right],\ (q'a_n 1),\ (a_{n+1}), \ldots,\ (a_{2^{j+3}-2})$

(5) $U_{j+1} = W,\ a_0,\ \ldots,\ a_{n-1},\ q'a_n 1,\ a_{n+1}\ \ldots,\ a_{2^{j+2}-2}$,

siguiendose (1) de (2), (5) y de $\phi_{qa_n} = q'a_n 1$.

TH 15 Si el dominó D_M es coherente, entonces la máquina de Turing M colocada sobre la cinta vacía no se para nunca.

Dem.:

Por hipótesis existen un mosaico ϕ y un recubrimiento F tales que F es D_M-ϕ coherente. Por TH 13, para cada número natural n, ϕ contiene un n-mosaico. Así pues, para cada $n \varepsilon N$ existe un recubrimiento de un n-mosaico que verifica los apartados a) - d) de DF 25. A partir de este hecho, se demostrará por inducción simultanea : Para todo $j \varepsilon N$

(1) La máquina M colocada sobre la cinta vacía da al menos j pasos.

(2) Si $c_j = a_0 \ldots a_n^q \ldots$, entonces

$0^* = W,\ a_0,\ \ldots,\ a_{n-1},\ \phi_{qa_n},\ a_{n+1},\ \ldots,\ a_{2^{j+2}-2}$

donde 0^*_j es la sucesión de colores superiores de las fichas colocadas sobre la última fila de un j-mosaico.

El teorema se seguirá de (1).

Para j = 0, (1) es trivial y también se verifica (2), ya que el único recubrimiento posible de un 0-mosaico que verifica los apartados a) - d) de DF 25 es el representado en la FIG 8, con lo que $0^* = W,\ \phi_{00},\ 0,\ 0$. Puesto que $c_0 = 0^0 000\ldots$ se sigue (2).

FIG 8

(c')	(B)	(0)	(0)
(c)	(0)	(c)	(0)

Supuestos ciertos (1) y (2) para $n = 0, 1, 2, \ldots, j$, probaremos que se verifican también para $n = j+1$.

ad (1)

Sea $C_j = a_0 \ldots a_n^q \ldots$; (1) podría ser falsa por dos razones:

(a) Porque $n = 0$ y $qa_0 1q' \in M$.

(b) Porque $qa_n sq' \in M$.

Demostraremos que tanto de (a) como de (b) se sigue una contradicción. En efecto:

(a) implica $c_j = a_0^q a_1 \ldots$, de donde se sigue

$0_j^* = W, \phi_{qa_0}, a_1, a_2, \ldots = W, q'a_0 1, a_1, a_2, \ldots$, con lo que no podría recubrirse la fila S_{j+1} verificandose las condiciones de coherencia, ya que las únicas fichas que tienen W y $q'a_0 1$ como colores inferiores son respectivamente (W) y $(q'a_0 1)$, que no son horizontalmente coherentes. Esto contradice la hipótesis de ser D_M coherente.

(b) implica $\phi_{qa_n} = S$ y por tanto $0_j^* = W, a_0, \ldots, a_{n-1}, S, \ldots$ con lo que, al no haber ninguna ficha con S como color inferior, no podría recubrirse la fila S_{j+1} verificando la condición de coherencia vertical, en contradicción con ser D_M coherente.

ad (2)

Sea $c_j = a_0 \ldots a_n^q \ldots$; distinguiremos tres casos:

Caso I: $qa_n q'a' \in M$

En tal caso $\phi_{qa_n} = q'a'$, con lo que

$0_j^* = W, a_0, \ldots, a_{n-1}, q'a', a_{n+1}, \ldots, a_{2^{j+2}-2}$ y en consecuencia la última fila de un j+1 mosaico deberá estar necesariamente recubierta por el bloque (único que verifica las condiciones de coherencia)

$(W), (a_0), \ldots, [q'a'], (a_{n+1}), \ldots, (a_{2^{j+2}-2}), (0), \ldots, (0)$

y por tanto

(*) $0_{j+1}^* = W, a_0, \ldots, a_{n-1}, \phi_{q'a'}, a_{n+1}, \ldots, a_{2^{j+2}-2}, 0, \ldots, 0$.

Puesto que $j < 2^{j+2}-2$ se verificará

(**) $a_{2^{j+2}-1} = a_{2^{j+2}} = \dots = a_{2^{j+3}-2} = 0,$

siguiendose (2) de (*), (**) y de $c_{j+1} = a_0 \dots a_{n-1} a'^{q'} a_{n+1} \dots$

Caso II: $qa_n rq' \in M$

En tal caso $\phi_{qa_n} = q'a_n r$, con lo que

$0^*_j = W, a_0, \dots, a_{n-1}, q'a_n r, a_{n+1}, \dots, a_{2^{j+2}-2}$ y en consecuencia la última fila de un j+1-mosaico deberá estar necesariamente recubierta por el bloque (único que verifica las condiciónes de coherencia)

$(W), (a_0), \dots, (a_{n-1}), (q'a_n r), [q'a_{n+1} r], (a_{n+2}), \dots,$
$(a_{2^{j+2}-2}), (0), \dots, (0).$

y por tanto

(***) $0^*_{j+1} = W, a_0, \dots, a_n, \phi_{q'a_{n+1}}, a_{n+2}, \dots, a_{2^{j+2}-2}, 0, \dots, 0,$

verificandose también (**) por idénticas razones que en caso anterior. De (***), (**) y de $c_{j+1} = a_0 \dots a_n a^{q'}_{n+1} \dots$ se sigue finalmente (2).

Caso III: $qa_n lq' \in M$

Demostración completamente similar a la del caso II.

3.2. Fórmula asociada a un dominó

En el presente apartado se definirá para cada dominó D una fórmula α'_D del cálculo de predicados de primer orden en la que aparecerá una única función unitaria (que posteriormente se eliminará) y que verificará:

(*) α'_D es satisfactible si y sólo si D es coherente.

La construcción de α'_D se realizará describiendo un mosaico ϕ y un recubrimiento D-ϕ coherente.

Sea $D = \{D^*, D', D''\}$, donde $D^* = \{d_1, d_2, \dots, d_s\}$ y

$D' = \{d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_p}\}$, $D'' = \{d_{j_1}, d_{j_2}, \ldots, d_{j_q}\}$,
$D' \subset D^*$, $D'' \subset D^*$, apareciendo en las fichas de D^* los colores $c_1, c_2, \ldots, c_t$ y donde los colores de cada una de las fichas d_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ vienen descritos por el diagrama

FIG 9

	$c_{h_1(i)}$	
$c_{h_4(i)}$		$c_{h_2(i)}$
	$c_{h_3(i)}$	

La descripción de un mosaico ϕ y de un recubrimiento F D-ϕ coherente se hará mediante la función f (breviadamente ') y los predicados B, $D_1, \ldots, D_s$, $C_1^1, \ldots, C_1^4, \ldots, C_t^4$ que servirán para simbolizar:

fx $(= x')$: sucesor de x;

Bxy : el cuadrado de coordenadas (x,y) es blanco;

$D_j xy$: el cuadrado de coordenadas (x,y) está recubierto por la ficha d_j.

$C_j^1 xy$ (respectivamente $C_j^2 xy$, $C_j^3 xy$, $C_j^4 xy$) : la ficha que recubre el cuadrado de coordenadas (x,y) tiene c_j como color superior (derecho, inferior, izquierdo).

Por razones de tipo técnico, el recubrimiento que va a describirse supone la siguiente numeración de los cuadrados unitarios del primer cuadrante:

FIG 10

(2,0)	(3,1)	(4,2)	...
(1,0)	(2,1)	(3,2)	...
(0,0)	(1,1)	(2,2)	...

(x',y)	(x", y')
(x, y)	(x', y')

Abreviatura: Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\bar{p}}$ un conjunto determinado de fórmulas. Se denotará por (exun p)α_p la fórmula

$(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_{\bar{p}}) \wedge \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \ldots \wedge \neg(\alpha_{\bar{p}-1} \wedge \alpha_{\bar{p}})$, que obviamente es válida cuando es válida una y sólo una de las fórmulas del conjunto.

α'_D será la conjunción de las siguientes fórmulas:

(1) $\bigwedge x(Bxx \Longleftrightarrow \neg Bx'x')$
(describe la primera fila de un mosaico)

(2) $\bigwedge x \bigwedge y(((Bx'y \wedge \neg Bx''y') \vee (\neg Bx'y \wedge Bx''y')) \Longleftrightarrow (\neg Bxy \wedge Bx'y'))$
(describe las restantes filas de un mosaico)

(3) $\bigwedge x \bigwedge y(\text{exun } p)D_p xy$
(sobre cada cuadrado una ficha y sólo una)

(4) $\bigwedge x \bigwedge y((\text{exun } p)\ C^1_p xy \wedge (\text{exun } p)\ C^2_p xy \wedge \ldots \wedge (\text{exun } p)\ C^4_p xy)$
(un color y sólo uno en cada una de las partes de cada cuadrado)

(5) $\bigwedge x \bigwedge y(D_j xy \Rightarrow (C^1_{h_1(j)} \wedge \ldots \wedge C^4_{h_4(j)})$ $(j = 1, \ldots, s)$ |s fórmulas|
(relación entre fichas y colores)

(6) $\bigwedge x(Bxx \Rightarrow (D_{i_1} xx \vee \ldots \vee D_{i_p} xx))$
(sobre cada cuadrado blanco de la primera fila hay una ficha de D')

(7) $\bigwedge x \bigwedge y(\neg Bxy \Rightarrow (D_{j_1} xy \vee \ldots \vee D_{j_q} xy))$
(sobre cada cuadrado negro hay una ficha de D")

(8) $\bigwedge x \bigwedge y(Bxy \Rightarrow (C^2_j xy \Rightarrow C^4_j x'y'))$ $(j = 1, \ldots, t)$ |t fórmulas|
(coherencia horizontal)

(9) $\bigwedge x \bigwedge y((Bx'y \Rightarrow (C^1_j xy \Rightarrow C^3_j x'y))$ $(j = 1, \ldots, t)$ |t fórmulas|
(coherencia vertical)

TH 16 Si D es coherente, α'_D es satisfactible.

Dem.:

Si D es coherente, existe un mosaico ϕ y un recubrimiento F que es D-ϕ coherente. A partir de F y ϕ definimos la interpretación I del lenguaje L en el conjunto de los números naturales que ha servido para construir α'_D, i.e.: I(B) será la relación $\underline{B} \subset N^2$ tal que para elementos cualesquiera a,b de N se verifica $\underline{B}ab$ si y sólo si el cuadrado de coordenadas (a,b) es blanco. Análogamente, $I(D_i)$ es la relación $\underline{D_i}$ tal que se verifica $\underline{D_i}ab$ si y sólo si sobre (a,b) está la ficha d_i. Etcétera. Claramente α'_D es válida en la interpretación I.

17 Si α'_D es satisfactible, D es coherente.

Dem.:

Sea I un modelo de α'_D sobre un conjunto $\omega \neq \emptyset$ y sea a un elemento cualquiera de ω. A partir de I y de a se definirá un mosaico ϕ y un recubrimiento F tal que F es D-ϕ coherente.

Abreviaturas:

$f^0x = x$; $f^1x = fx$; $f^nx = \underbrace{ff\ldots f}_{n \text{ veces}}x$.

Definición de ϕ:

Para todo $m,n \in N$

$$\phi(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (Bf^mx\ f^nx)_I(v) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad (Bf^mx\ f^nx)_I(v) = 0 \end{cases}$$

donde v es una valoración tal que $v(x) = a$.

ϕ es un mosaico, ya que:

1) Se cumple el apartado i) de DF 21, puesto que

$\phi(m,m) = 1 \iff (Bf^mx\ f^mx)_I(v) = 1$

$\iff (\neg Bf^{m+1}x\ f^{m+1}x)_I(v) = 1$ (por la validez de (1))

$\iff (Bf^{m+1}x\ f^{m+1}x)_I(v) = 0$

$\iff \phi(m+1,\ m+1) = 0.$

2) Se cumple el apartado ii) de DF 21, puesto que

$\phi(m+1,\ n) \neq \phi(m+2,\ n+1)$

$\iff (Bf^{m+1}x\ f^nx)_I(v) \neq (Bf^{m+2}x\ f^{n+1}x)_I(v)$

$\iff ((Bf^{m+1}x\ f^nx \wedge \neg Bf^{m+2}x\ f^{n+1}x) \vee (\neg Bf^{m+1}x\ f^nx \wedge Bf^{m+2}x\ f^{n+1}x))_I(v) = 1$

$\iff (\neg Bf^mx\ f^nx \wedge Bf^{m+1}x\ f^{n+1}x)_I(v) = 1$ (por la validez de (2))

$\iff (Bf^mx\ f^nx)_I(v) = 0$ y $(Bf^{m+1}x\ f^{n+1}x)_I(v) = 1$

$\iff \phi(m,\ n) = 0$ y $\phi(m+1,\ n+1) = 1$.

Definición de F:

Para todo $m,\ n \in N$, $m \geq n$,

$F(m,n) = d_i \iff (D_if^mx\ f^nx)_I(v) = 1$, siendo v una valoración tal que $v(x) = a$.

De la validez de (3) se sigue que F es un recubrimiento.

De la validez de (6) se sigue que F verifica el apartado a) de DF 25.

De la validez de (7) se sigue que F verifica el apartado b) de DF 25.

F verifica también el apartado c) (y análogamente el d) de esa definición, ya que si

I $\quad \phi(m, n) = 1$

II $\quad F(m, n) = d_i$

III $\quad F(m+1, n+1) = d_j$,

entonces $h_2(i) = h_4(j)$ (coherencia horizontal). En efecto, tenemos sucesivamente:

IV	$(Bf^m x\ f^n x)_I(v) = 1$	(def de ϕ),(I)
V	$(D_i f^m x\ f^n x)_I(v) = 1$	(def de F),(II)
VI	$(D_j f^{m+1} x\ f^{n+1} x)_I(v) = 1$	(def de F),(III)
VII	$(C^2_{h_2(i)}\ f^m x\ f^n x)_I(v) = 1$	(validez de (5)),(V)
VIII	$(C^4_{h_4(j)} f^{m+1} x\ f^{n+1} x)_I(v) = 1$	(validez de (5)),(VI)
IX	$(C^4_{h_2(i)} f^{m+1} x\ f^{n+1} x)_I(v) = 1$	(val. (8)),(IV),(VII)
X	$h_2(i) = h_4(j)$	(validez de (4)),(VIII),(IX)

Con esto queda probado que F es un recubrimiento D-ϕ coherente, siguiendose TH 17.

3.3. Transformación de α'_D

En α'_D aparecen los términos x'' e y' en subfórmulas de los tipos Px"y' y Qx'y'. x" se eliminará del siguiente modo: Cada subfórmula del tipo Px"y' se sustituye por P'x'y' y se añade a α'_D (como conjunción) la fórmula $\bigwedge x \bigwedge y(P'xy \Leftrightarrow Px'y)$. Con esto se obtiene una nueva fórmula α''_D equivalente a α'_D en la que aparece el término y' en subfórmulas del tipo Qx'y', que se eliminará de la siguiente forma: cada subfórmula de α''_D del tipo Qx'y' se sustituye por Q"x'y y se añade a α''_D (como conjunción) la fórmula $\bigwedge x \bigwedge y(Q''yx \Leftrightarrow Qyx')$. Mediante estas transformaciones se obtiene una fórmula α'''_D equivalente a α''_D en la que sólo aparece el término x'. Utilizando reiteradamente la tautología $((\bigwedge x \bigwedge y\alpha \wedge \bigwedge x \bigwedge y\beta) \Leftrightarrow \bigwedge x \bigwedge y(\alpha \wedge \beta)$ se puede transformar de nuevo α'''_D en otra fórmula equivalente α''''_D del tipo $\bigwedge x \bigwedge y \beta(x,x',y)$. Finalmente, de acuerdo con TH 8, puede encontrarse efectivamente una fórmula α_D de la forma $\bigwedge x \bigvee z \bigwedge y \beta(x,z,y)$, donde β es una fórmula sin cuantificadores, sin funciones y con las únicas variables x,y,z, que verifica:

α_D es satisfactible si y sólo si α''''_D es satisfactible.

Así pues, de acuerdo con TH 16 y TH 17, se tiene:

CRL 17a Para todo dominó D puede construirse efectivamente una fórmula α_D del cálculo de predicados de primer orden sin funciones, del tipo $\bigwedge\bigvee\bigwedge$ tal que

α_D es satisfactible si y sólo si D es coherente.

De TH 5, TH 14, TH 15 y CRL 17a se sigue inmediatamente:

CRL 17b El conjunto de las fórmulas satisfactibles del cálculo de predicados de primer orden sin funciones del tipo $\bigwedge\bigvee\bigwedge$ no es recursivo.

A su vez se sigue inmediatamente de CRL 17b:

CRL 17c El conjunto de las fórmulas satisfactibles del cálculo de predicados de primer orden sin funciones no es recursivo (Church, 1936).

CRL 17d El conjunto de las tautologías del cálculo de predicados de primer orden sin funciones no es recursivo (Church, 1936).

DF 28 Una clase K de fórmulas (del cálculo de predicados de primer orden sin funciones) es un **tipo de reducción relativo a satisfactibilidad** (respectivamente a **validez universal**) si y sólo si para toda fórmula α puede encontrarse efectivamente otra fórmula $\alpha' \varepsilon K$ tal que α es satisfactible (respectivamente universalmente válida) si y sólo si lo es α'.

DF 29 $\bigwedge$ (respectivamente $\bigvee$, $\bigwedge\bigvee$, $\bigvee\bigwedge$, etc...) es la clase de las fórmulas prénex del cálculo de predicados de primer orden sin funciones con un prefijo del tipo $\bigwedge x$ (respectivamente $\bigvee x$, $\bigwedge x \bigvee y$, $\bigvee x \bigwedge y$, etc...).

CRL 17e Las clases $\bigwedge\bigvee\bigwedge$ y $\bigwedge\bigwedge\bigwedge\bigvee$ (respectivamente $\bigvee\bigwedge\bigvee$ y $\bigvee\bigvee\bigvee\bigwedge$) son tipos de reducción relativos a satisfactibilidad (respectivamente a validez universal) (Kahr, Moore, Wang (1962); Gödel (1933)).

En efecto, para toda fórmula α son equivalentes las proposiciones:

α es satisfactible

$M^{\alpha} \varepsilon \overline{STOP}$ (por TH 12)

$D_{M^{\alpha}}$ es coherente (por TH 14 y TH 15)

$\alpha_{D_{M^{\alpha}}}$ es satisfactible, donde $\alpha_{D_{M^{\alpha}}} \varepsilon \bigwedge\bigvee\bigwedge$ (por CRL 17a)

de donde se sigue la primera parte del corolario. De este resultado y de CRL 9b se sigue la segunda.

Sea C el conjunto de sucesiones finitas de elementos de $\{\bigvee, \bigwedge\}$, i.e. el conjunto de clases de fórmulas prénex de acuerdo con DF 29. Entre los elementos de C se definirá la siguiente relación de orden:

DF 30 $c_1 \leqslant c_2$ si y sólo si c_2 puede obtenerse a partir de c_1 añadiendo elementos de $\{\bigvee, \bigwedge\}$ (ejemplo: $\bigvee\bigwedge\bigwedge \leqslant \bigvee\bigwedge\bigvee\bigwedge\bigwedge$).

Sea c la aplicación del conjunto de fórmulas prénex del cálculo de predicados de primer orden sin funciones en el conjunto C, que hace corresponder a cada fórmula su clase.

TH 18 Toda fórmula prénex α (del c.p.p.o. sin funciones) pertenece al menos a una de las siguientes clases:

$B = \{\alpha /\ c(\alpha) \leqslant \bigvee^{r} \bigwedge^{s}$ para algún $r, s \varepsilon N\}$

$G = \{\alpha /\ c(\alpha) \leqslant \bigvee^{r} \bigwedge^{2} \bigvee^{s}$ " " " " $\}$

$W = \{\alpha /\ c(\alpha) \geqslant \bigwedge\bigvee\bigwedge\}$

$S = \{\alpha /\ c(\alpha) \geqslant \bigwedge^{3} \bigvee\}$

Dem.:

Sean p, q, r, s numeros naturales distintos de 0.

Si $c(\alpha) = \ldots \vee^{p} \wedge^{q} \vee^{r} \wedge^{s}$, entonces $\alpha \varepsilon W$ (también quizá $\alpha \varepsilon S$).

Si $c(\alpha) = \ldots \wedge^{p} \vee^{q} \wedge^{r} \vee^{s}$, entonces $\alpha \varepsilon W$ (también quizá $\alpha \varepsilon S$).

Si $c(\alpha) = \vee^{p} \wedge^{q} \vee^{r}$, $\alpha \varepsilon G$ si $q \leqslant 2$ y $\alpha \varepsilon S$ si $q > 2$.

Si $c(\alpha) = \wedge^{p} \vee^{q} \wedge^{r}$, $\alpha \varepsilon W$ (también $\alpha \varepsilon S$ si $p > 2$).

Si $c(\alpha) = \vee^{p} \wedge^{q}$, $\alpha \varepsilon B$ (también $\alpha \varepsilon G$ si $p < 3$).

Si $c(\alpha) = \wedge^{p} \vee^{q}$, $\alpha \varepsilon G$ si $p \leqslant 2$ y $\alpha \varepsilon S$ si $p > 2$.

Si $c(\alpha) = \wedge^{p}$, $\alpha \varepsilon B$ (también $\alpha \varepsilon G$ si $p \leqslant 2$).

Si $c(\alpha) = \vee^{p}$, $\alpha \varepsilon B \cap G$.

TH 19 El conjunto de las fórmulas satisfactibles de B es recursivo (Bernays-Schönfinkel, 1928).

Dem.:

Cfr. Ackermann (1968), pp.70-71.

TH 20 El conjunto de las fórmulas satisfactibles de G es recursivo (Gödel-Kalmar-Schütte, 1932-34).

Dem.:

Cfr. Ackermann (1968), pp. 75-82.

Así pues, de acuerdo con TH 7, para toda fórmula α puede encontrarse efectivamente otra fórmula prénex α^*, que según TH 18 pertenece a $B \cup G$ o a $W \cup S$. En el primer caso, según TH 19 y TH 20, existe un procedimiento algorítmico para decidir si α^* - y por tanto α - es o no satisfactible. Sin embargo, por CRL 17e, tal procedimiento no existe cuando $\alpha^* \varepsilon W \cup S$.

A partir de TH 6 pueden obtenerse resultados duales relativos a validez universal, cambiando respectivamente B, G, W y S por B*, G*, W* y S*, donde

$B^* = \{\alpha / \ c(\alpha) \leqslant \wedge^{r} \vee^{s}$ para algún r, s $\varepsilon N\}$

$G^* = \{\alpha / \ c(\alpha) \leqslant \wedge^{r} \vee^{2} \wedge^{s}$ " " " " $\}$

$W^* = \{\alpha / \ c(\alpha) \geqslant \vee \wedge \vee\}$

$S^* = \{\alpha / \ c(\alpha) \geqslant \vee^{3} \wedge\}$.

BIBLIOGRAFIA

Ackermann, W.

1968 Solvable Cases of the Decision Problem, 2ª ed., North-Holland Publ. Co., Amsterdam.

Berger, R.

1966 The undecidability of the domino problem. Mem. Amer. Soc. no. 66.

Hermes, H.

1965 Ennumerability. Decidability. Computability, 3ª ed. Springer-Verlag, Berlin.

1970 Entscheidungsproblem und Dominospiele, in Selecta Mathematica II, Springer-Verlag, Berlin.

1971 A simplified proof for the unsolvability of the decision problem in the case $\forall\exists\forall$, in Logic Colloquium' 69, North-Holland Pub. Co. Amsterdam.

1973 Introduction to Mathematical Logic, 3ª ed., Springer-Verlag, Berlin.

Kahr, A.S., Moore, E.F., Wang, H

1962 Entscheidungsproblem reduced to the $\forall\exists\forall$ case. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48, pp. 365-377.

Prida, J.F.

1973 Una prueba algebraica de los teoremas de Skolem-Löwenheim y Gödel, Publ. del Centro de Cálculo de la Univ. Complutense, Madrid.

Robinson, R.M.

1971 Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane, Inventiones math. 12, 177-209, Springer- Verl.

Wang, H.

1961 Proving theorems by pattern recognition-II, Bell System Tech. J. 40, 1-41.

1963 Dominoes and the $\forall\exists\forall$ case of the decision problem, Mathematical theory of automata, p. 23-55. Brooklyn, N.Y.: Polytechnic Press.