ALGUNOS RESULTADOS FORMALES EN LA TEORIA DE EQUILIBRIO ESTRUCTURAL

Por Emmanuel Lizcano

Introducción

La formulación que hemos presentado* del *teorema fundamental de equilibrio* en s-grafos se completa aquí con dos caracterizaciones más del estado de equilibrio en tales estructuras, si bien una de ellas sólo es válida para s-grafos completos. Presentamos de este modo una relación exhaustiva de las distintas formulaciones, equivalentes en última instancia, que sobre dicho estado han enunciado diferentes autores.

El carácter arbitrario de tales formulaciones (al menos el de una cualquiera de ellas: la elegida como definición *a priori* de s-grafo equilibrado) no deja de encontrar su pre-texto en resultados empíricos de las llamadas ciencias humanas y a ellos se remiten en tanto que susceptibles de " interpretar " determinados fenómenos en cuyo estudio estas ciencias se vienen empeñando.

Interesa por tanto considerar, junto al interés mera

---

* Véase mi aportación *sobre una formalización matemática en teoría de s-grafos*, Boletín del C.C.U.M., n°26, pp. 43-51, 1975.

mente formal del *lema* que al final presentamos, el carácter que dicho lema puede tener como puente teórico entre las directrices iniciales de investigación en la teoría de equilibrio y sus más sofisticados tratamientos posteriores, como puede ser el mencionado teorema fundamental. Efectivamente, los primeros trabajos emprendidos por el *estructuralismo guestaltista* más estrechamente emparentados con el equilibrio, se referían a estructuras constituídas por tres elementos, prolongándose después paulatinamente a estructuras más complejas. Ambas fases pueden verse reflejadas en los dos resultados teóricos que son el objeto de este artículo. Su común formalización establecería, a nivel teórico, un nexo que diversos psicólogos pretenden rastrear experimentalmente.

Nociones previas

Con objeto de demostrar las equivalencias mencionadas es necesario completar los conceptos ya introducidos con algunos otros.

Dado un *s-grafo* $G=(V,X,\delta^+,\delta^-,s)$ - donde a los ele elementos de $V=\{v_1,\dots,v_m\}$ les llamamos *vértices*, a los de $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ *arcos*, δ^+ y δ^- son aplicaciones cualesquiera de X en V y s lo es de X en $S=\{+1,-1\}$ - y dados los Z - módulos libres de tipo finito

$$M(Z,X)=\{x=\sum_{\kappa=1}^{n} \xi^{\kappa} x_{\kappa} \ / \ \xi^{\kappa} \in Z\} \text{ y } M(Z,V)=\{v=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \ / \ \lambda_i \in Z\}$$

definimos el homomorfismo $\delta : M(Z, X) \longrightarrow M(Z, V)$ dado por $\delta x_\kappa = \delta^+ x_\kappa - \delta^- x_\kappa$, lo que permite definir el conjunto de *ciclos* de G como

$C(G) = \{ x \varepsilon M(Z, X) / \delta x = 0 \}$ y el de *cadenas-* de v_i a v_j como

$L(v_i, v_j) = \{ x \varepsilon M(Z, X) / \delta x = v_i - v_j \}$.

Asimismo extendemos la aplicación *signo*, s, a un- homomorfismo de Z-módulos

$s: (M(Z, X), +, .) \longrightarrow (S, \circ, *)$, definiendo

$$\forall \; x = \sum_{\kappa=1}^{n} \xi^\kappa x_\kappa \;\varepsilon\; M(Z, X)$$

$$s(x) = \prod_{\kappa=1}^{n} s(x_\kappa)^{|\xi^\kappa|}$$

(Las operaciones $\circ$ y $*$ en S son el producto y la potenciación usuales en Z, restringidos a S).

Consideremos ahora las aplicaciones :

$$\partial^+ : V \longrightarrow P(X)$$

y

$$\partial^- : V \longrightarrow P(X)$$

definidas por

$$\partial^{+} v_i = \{ x_\kappa \, \varepsilon X \, / \, \delta^{+} x_\kappa = v_i \}$$

y

$$\partial^{-} v_i = \{ x_\kappa \, \varepsilon X \, / \, \delta^{-} x_\kappa = v_i \}$$

Si leemos $\delta^{+} x_\kappa$ y $\delta^{-} x_\kappa$ como el " principio " y el " final " respectivos del arco x_κ , puede decirse que $\partial^{+} v_i$ es el conjunto de arcos que " salen " de v_i y $\partial^{-} v_i$ el conjunto de los que " llegan " a v_i *.

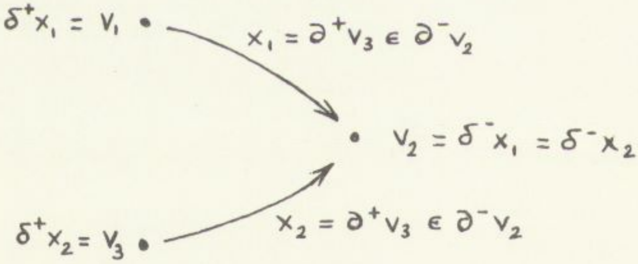

Figura 1

Podemos entonces definir un nuevo homomorfismo de Z-módulos

$$\partial : M (Z,V) \longrightarrow M (Z,X)$$

---

* Está claro que las aplicaciones δ^{+} y δ^{-} determinan las ∂^{+} y ∂^{-} , y recíprocamente. Es por ello indiferente presentar un grafo en base a unas u otras. Sobre las diferentes maneras de presentar un grafo, así como sobre los principales conceptos aquí utilizados, véase MASAO IRI, *Network Flow, Trasportation and Scheduling*, Academic Press, New York, 1969, pp. 28-74.

que para los vectores de la base $V = \{ v_1 , \ldots , v_m \}$ de $M (Z,V)$ vendría dado por

$$\partial v_i = \sum_{x_\kappa \in \delta^+ v_i} x_\kappa - \sum_{x_p \in \delta^- v_i} x_p$$

y se extendería de modo natural a $M (Z,V)$.

Diremos que un vector $x \in M (Z,X)$ es una *separación* de G si $\exists\ v \in M (Z,V)$ tal que $\partial v = x$. El conjunto de todas las separaciones de G, $S (G)$, es un submódulo de $M (Z,X)$, dado que $S (G) = \mathrm{Im}\partial$.

Igual que para los ciclos y cadenas, una separación

$$x = \sum_{\kappa = 1}^{n} \xi^\kappa x_\kappa \in S (G)$$

se dice *simple* si $\forall\ \kappa = 1,\ldots,n \quad \xi^\kappa \in \{ + 1,-1,0 \}$, *minimal* si $\forall\ X' \subsetneq \text{sop } x \quad X'$ no tiene ciclos (donde $\text{sop } x = \{ x_\kappa \in X / \xi^\kappa \neq 0 \}$ y $X' \subset X$ se dice sin ciclos si $\nexists\ x \in C (G),\ x \neq 0$, tal que $\text{sop } x \subseteq X'$) y *elemental* si es simple y minimal. A los respectivos conjuntos les designaremos por $S^s (G)$, $S^m (G)$ y $S^e (G)$.

Definiendo la matríz de incidencia (D^i_κ), $i = 1,\ldots,m$, $\kappa = 1,\ldots,n$, de un s-grafo G por

$$D^{i}_{\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v_i = {}^{+} x_{\kappa} \neq \delta^{-} x_{\kappa} \\ -1 & \text{si} \quad v_i = \delta^{-} x_{\kappa} \neq \delta^{+} x_{\kappa} \\ 0 & \text{en los restantes casos} \end{cases}$$

observamos que, para que cada κ fijo, el número de D^{i}_{κ} distintos de cero es de dos o ninguno; ninguno si x_{κ} es- un *bucle* (o sea, si $\delta^{+} x_{\kappa} = \delta^{-} x_{\kappa}$) y dos en caso contrario, existiendo entonces un par (i,j) tal que $D^{i}_{\kappa} = +1$ y $D^{j}_{\kappa} = -1$. En cualquier caso es

$$\sum_{i=1}^{m} D^{i}_{\kappa} = 0 \quad , \text{ para cada } \kappa = 1,\ldots,n.$$

Así podemos escribir

$$\delta x_{\kappa} = \sum_{i=1}^{m} D^{i}_{\kappa} \; v_i$$

$$\partial v_i = \sum_{\kappa=1}^{n} D^{i}_{\kappa} \; x_{\kappa}$$

lo que permite comprobar inmediatamente que para que una separación

$$x = \sum_{\kappa = 1}^{n} \xi^{\kappa} x_{\kappa}$$

esté definida por un vector $v = \sum_{i = 1}^{m} \lambda_i v_i \in M (Z, V)$,

es decir, para que sea $x = \partial v$, basta tomar

$$\xi^{\kappa} = \sum_{i = 1}^{m} D_{\kappa}^{i} \lambda_i$$

A título de ejemplo, consideremos el grafo de la figura 2

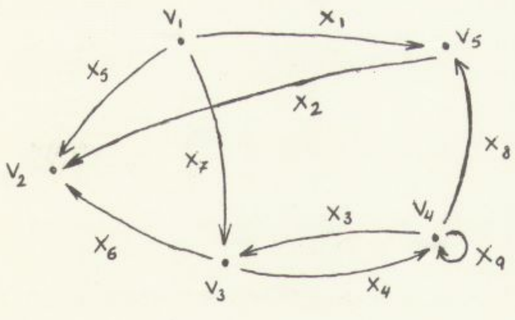

Figura 2

cuya matríz de incidencia es

$v_i \backslash x_\kappa$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
v_1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
v_2	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0
v_3	0	0	-1	1	0	1	-1	0	0
v_4	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
v_5	-1	1	0	0	0	0	0	-1	0

Se puede ilustrar la última afirmación observando cómo el vector $v = v_4 \in M(Z, V)$ define una separación

$$x = \sum_{\kappa=1}^{n} \xi^{\kappa} x_{\kappa}$$

dada, según la expresión anterior, por

$$\xi^1 = \xi^2 = \xi^5 = \xi^6 = \xi^7 = \xi^9 = 0,\ \xi^3 = \xi^8 = 1,\ \xi^4 = -1,$$

es decir, $x = x_3 - x_4 + x_8$, que no es sino $x = \partial v$.

Análogamente, $v' = 2v_3 + v_4$ define la separación $x' = -x_3 + x_4 + 2x_6 - 2x_7 + x_8$ y $v'' = v_1 + v_2$ define $x'' = x_1 - x_2 - x_6 + x_7$.

En general, para cualquier $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ la separación $x = \partial v = \sum_{\kappa=1}^{n} \xi^{\kappa} x_{\kappa}$, $x \neq 0$, es tal que la supresión de los arcos pertenecientes a sop x " separa " los vértices de sop v del resto del grafo. Más concretamente, el número de componentes conexas*

---

* Las *componentes conexas* de un grafo $G = (V, X, \delta^+, \delta^-)$ se definen como las clases del conjunto cociente V / R- inducidas por la relación $v_i \, R \, v_j$ sii $L(v_i, v_j) \neq \phi$.

del grafo original, $G = (V,X,\delta^{+},\delta^{-})$, es estrictamente menor que el de $G' = (V,X',\delta^{+} / X',\delta^{-} / X')$, siendo $X' = X$ - sop x; y ello ocurre de manera que los vértices de sop v pasan a constituir, en G', una(s) componente(s) distinta(s) de la(s) que integra(n) - V - sop v*.

Definiendo el *producto escalar* de dos vectores

$$x = \sum_{\kappa = 1}^{n} \xi^{\kappa} x_{\kappa} \in M (Z, X) , \quad y = \sum_{\kappa = 1}^{n} \zeta^{\kappa} x_{\kappa} \in M (Z, X)$$

por $x.y = \sum_{\kappa = 1}^{n} \xi^{\kappa} \zeta^{\kappa}$, es inmediato comprobar-utilizando expresiones matriciales - que $x.y = 0$ si $x \in C (G)$, $y \in S (G)$.

Resultados teóricos

Estamos ya en condiciones de proponer - y- demostrar - en términos de la formalización introducida el *teorema fundamental de equilibrio* en s-grafos. Demostraremos también un lema, válido para s-grafos *completos***

* Masao Iri, op. cit., pp. 43-45.

** Un grafo $G = (V, X, \delta^{+}, \delta^{-})$ se dice *completo* si - $v_i, v_j \in V$ se verifica que sop $\partial (v_i) \cap$ sop $\partial (v_j) \neq \phi$. Es decir, si para cada dos vértices hay un arco que los une.

que puede servir de puente para abordar el paso de las primeras experiencias empíricas a las posteriores teorizaciones del equilibrio estructural.

TEOREMA FUNDAMENTAL: Dado un s-grafo, $G = (V, X, \delta^{+}, \delta^{-}, s)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\forall v_i, v_j \varepsilon V, \quad \forall x, y \varepsilon L (v_i, v_j) \quad s (x) = s (y)$

b) $\forall v_i, v_j \varepsilon V, \quad \forall x, y \varepsilon L^{e}(v_i, v_j) \quad s (x) = s (y)$

c) $\forall x \varepsilon C^{e} (G) \quad s (x) = + 1$

d) $\forall x \varepsilon C (G) \quad s (x) = + 1$

e) $\exists x \varepsilon S^{s}(G)$ tal que $\forall \kappa = 1,...n$ " $s (x_\kappa) = - 1$ sii $x_\kappa \varepsilon$ sop x "

Demostrado ya que las cuatro primeras afirma - ciones son equivalentes*, veamos que la quinta lo es a- cualquiera de ellas, comprobando por ejemplo que e) $\Rightarrow$ c) y a) $\Rightarrow$ e).

De un s-grafo satisfaciendo una de las anterio res condiciones se dice que está *equilibrado*.

e) $\Rightarrow$ c). Sea $\quad x = \sum_{\kappa = 1}^{n} \xi^{\kappa} x_\kappa \ , \ \xi^{\kappa} \varepsilon \{ 1,0,-1 \}$

$\forall \ \kappa = 1,...,n$, la separación cuya existencia garanti za la hipótesis.

---

* Véase nuestra nota * de la página 1 de este número.

Sea $z = \sum_{\kappa = 1}^{n} \alpha^{\kappa} x_{\kappa} \varepsilon C^{e}(G)$, por tanto, $\alpha^{\kappa} \varepsilon \{1,0,-1\}$

$\forall\ \kappa = 1,\ldots,n.$

Si sop $z \cap$ sop $x = \phi$ entonces $\forall\ x_{\kappa} \varepsilon$ sop z $x_{\kappa} \notin$ sop x, luego $\forall\ x_{\kappa} \varepsilon$ sopz es $s(x_{\kappa}) = +1$ por lo que $s(z) = +1$.

Si sop $z \cap$ sop $x \neq \phi$ entonces el cardinal de sopz $\cap$ sopx es par, pues en caso contrario el número de sumandos no nulos en $z.x = \sum_{\kappa = 1}^{n} \alpha^{\kappa}.\xi^{\kappa}$ sería impar y como $\alpha^{\kappa}.\xi^{\kappa} \varepsilon \{1,0,-1\}$ $\forall\ \kappa = 1,\ldots,n$ ocurriría que $z.x \neq 0$, lo que es falso. Como además, por hipótesis, sopx $= X \cap s^{-1}(-1)$ será sopz $\cap$ sopx $=$ sopz $\cap\, s^{-1}(-1)$, cuyo número de elementos es par, por lo que $s(z) = +1$.

a)$\Rightarrow$e). Aunque la demostración que aquí presentamos tiene carácter general, la consideración, por ejemplo, del s-grafo de la figura 3 (cuya matriz de incidencia es la de la figura 2) permitirá al lector seguirla más facilmente y apreciar su desarròllo constructivo en un caso concreto.

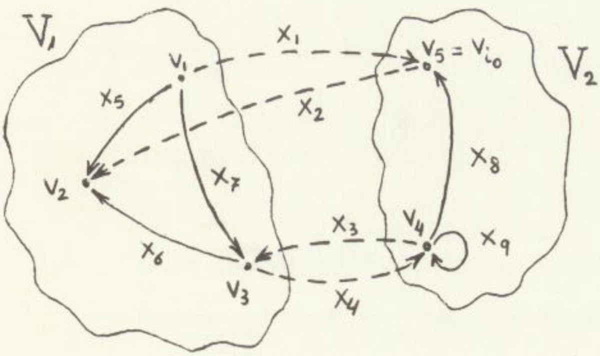

Figura 3

Supongamos, en principio, a G constituído por una sola componente conexa. Fijado arbitrariamente un- $v_{i_o} \in V$, definimos los conjuntos

$$V_1 = \{ v_j \in V / \exists x^j \in L (v_j, v_{i_o}) \text{ ,, } s (x^j) = -1 \}$$

$$V_2 = \{ v_i \in V / \forall x^i \in L (v_i, v_{i_o}) \quad s (x^i) = +1 \}$$

que, en virtud de la hipótesis, pueden expresarse también como

$$V_1 = \{ v_j \in V / \forall x^j \in L (v_j, v_{i_o}) \quad s (x^j) = -1 \}$$

$$V_2 = \{ v_i \in V / \exists x^i \in L (v_i, v_{i_o}) \text{ ,, } s (x^i) = +1 \}$$

Obsérvese que $v_{i_o} \in V_2$, pues $\bar{o} \in L (v_{i_o} , v_{i_o})$ y $s (\bar{o}) = + 1$; pero V_1 puede ser vacío. Obsérvese - asimismo que $V_2 = V - V_1$.

Sea $v = \sum_{v_i \in V_1} v_i \in M (Z, V)$, veamos que la separación $x = \sum_{\kappa = 1}^{n} \xi^\kappa x_\kappa$ definida por $x = \partial v$,- es decir, por $\xi^\kappa = \sum_{v_i \in V_1} D^i_\kappa$ (con lo cual ya será - simple), es la buscada. Si fuera $V_1 = \phi$ basta tomar - $v = \bar{o}$, con lo que la separación $x = \partial v = \bar{o}$ cumple - las condiciones exigidas. Supongamos pues $V_1 \neq \phi$. Si - siendo $V_1 \neq \phi$ es $x = \partial v = \bar{o}$, también esa separación- es válida. Supongamos pues sop $x \neq \phi$.

Sea $x_\kappa \in$ sop x. Entonces $\xi^\kappa \in \{ 1,-1 \}$. Si $\xi^\kappa = 1$ será que $\delta^+ x_\kappa \in V_1$ y $\delta^- x_\kappa \in V_2$, según se desprende de las observaciones hechas a propósito de la matriz (D^i_κ). Existe, por tanto, una cadena $x^1 \in L (\delta^+ x_\kappa , v_{i_o})$ tal que $s (x^1) = - 1$, a partir de la cual definimos otra $x^2 = x^1 - x_\kappa \in L (\delta^- x_\kappa , v_{i_o})$ que verificará $S (x^2) = + 1$, pues $\delta^- x_\kappa \in V_2$. Así $+ 1 = S (x^2) = S (x^1) \circ S (- x_\kappa) = - S (- x_\kappa) = - S (x_\kappa) \Rightarrow S (x_\kappa) = - 1$. Si fuera $\xi^\kappa = - 1$, como entonces $\delta^- x_\kappa \in V_1$ y $\delta^+ x_\kappa \in V_2$, tendríamos $\delta^+ (- x_\kappa) \in V_1$ y $\delta^- (- x_\kappa) \in V_2$, con lo que demostraríamos análogamente que $s (x_\kappa) = - 1$.

Sea $x_\kappa \notin$ sop x. Entonces $o = \xi^\kappa = \sum_{v_i \in V_1} D^i_\kappa$,

de donde o bien $D^i_\kappa = 0$ $\forall$ i tal que $v_i \in V_1$ o bien $\exists\, v_{i_1}, v_{i_2} \in V_1$ tales que $D^{i_1}_\kappa = +1$ y $D^{i_2}_\kappa = -1$.

En el primer caso, si x_κ no es un bucle (de serlo se deduce inmediatamente de la hipótesis (a) que $s (x_\kappa) = + 1$) será $\delta^+ x_\kappa \neq \delta^- x_\kappa$, perteneciendo ambos a V_2. Luego $\exists\, x^1 \in L (\delta^- x_\kappa , v_{i_o})$ tal que $s (x^1) = + 1$, por tanto $x^2 = x^1 + x_\kappa \in L (\delta^+ x_\kappa , v_{i_o})$ y $s (x^2) = + 1$, pues $\delta^+ x_\kappa \in V_2$. Así, $x_\kappa = x^2 - x^1 \Rightarrow s (x_\kappa) = s (x^2) \circ s (x^1) = + 1$.

En el otro caso, será $\delta^+ x_\kappa = v_{i_1} \in V_1$ y $\delta^- x_\kappa = v_{i_2} \in V_1$, comprobándose de igual modo que $s (x_\kappa) = + 1$.

La separación x así definida verifica efectivamente las condiciones de (e). Además es la única, salvo en su signo. Pues de haber elegido otro punto, -- $v'_{i_o} \neq v_{i_o}$, la partición de V por él inducida, $\{ V'_1, V'_2 \}$, verificaría $V'_1 = V_1$ y $V'_2 = V_2$ en el caso de que - $v'_{i_o} \in V_1$ y, por el contrario, $V'_1 = V_2$ y $V'_2 = V_1$ si- $v'_{i_o} \notin V_2$. En la primera situación, es evidente que las - separaciones definidas por ambas particiones coinciden.- En la segunda, las separaciones que definen los vectores respectivos,

$$v = \sum_{v_i \in V_1} D^i_k \quad y \quad v' = \sum_{v_i \in V'_1} D^i_k = \sum_{v_i \in V_2} D^i_k$$

son opuestas, como puede facilmente comprobarse a partir de la estructura de la matriz (D^i_κ).

Es de destacar el que la separación cuya existencia caracteriza el estado de equilibrio, si bien es simple no es necesariamente maximal, como ocurre en el s-grafo de la figura 3, para el que la citada separación es - $\pm (x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ y su soporte contiene al del ciclo $x_3 + x_4$.

De ser G no conexo, sean $G_1, G_2, \ldots, G_p$ sus componentes conexas. Para cada G_j ($j = 1, \ldots, p$) existe - una separación simple (única salvo en signo) $x^j =$

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \xi^\kappa_j x_\kappa \quad \text{tal que} \quad s(x_\kappa) = -1 \text{ sii } x_k \in \text{sop } x^j \ (\kappa = 1, \ldots n);$$

tal separación corresponde a una partición $\{ V_{j_1} , V_{j_2} \}$ de G_j y a un vector $v_j \in M (Z, V)$ tal que $x^j = \partial v^j$ $(j = 1,\ldots,p)$. Así, $x = \sum_{j=1}^{p} x^j = \sum_{\kappa=1}^{n} (\sum_{j=1}^{p} \xi_j^{\kappa}) x_\kappa$ es una separación de G, pues para

$v = \sum_{j=1}^{p} v^j$ es $x = \partial v$, y es simple pues cada x^j $(j = 1,\ldots,p)$ lo es y $\{ \text{sop } x^j \}_{j = 1,\ldots,p}$ es una partición de sop x.

Por la misma razón, también se verifica que $x_k \in \text{sop } x \iff$

$\exists\, j$ $(j = 1,\ldots p)$ tal que $x_\kappa \in \text{sop } x^j \Leftrightarrow s (x_\kappa) = -1$.

La implicación a) $\Rightarrow$ e) queda así demostrada también para grafos no conexos.

Ahora bien, en este caso tal separación no es necesariamente única, como se puede ver en el s-grafo $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ de la figura 4.

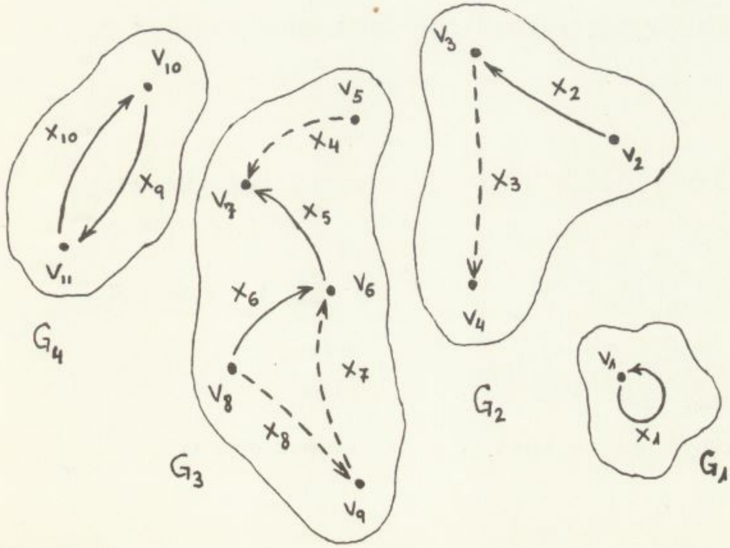

Figura 4

Cada G_i ($i = 1,\ldots,4$) es una componente conexa. Para G_1 tenemos la separación $x^1 = \bar{o}$ correspondiente al vector $v^1 = \bar{o}$ definido por la partición { V_{11}, V_{12} } de G_1 dada por $V_{11} = \phi$, $V_{12} = \{ V_1 \}$. Para G_2 , la separación $x^2 = x_3$ corresponde a $V_{21} = \{ v_2, v_3 \}$ y $V_{22} = \{ v_4 \}$, es decir, a $v^2 = v_2 + v_3$. Para G_3 , $x^3 = -x_4 - x_7 + x_8$ corresponde a $V_{31} = \{ v_6, v_7, v_8 \}$, $V_{32} = \{ v_5, v_9 \}$ y $v^3 = v_6 + v_7 + v_8$. Para G_4, $x^4 = \bar{0}$ corresponde a $V_{41} = \phi$, $V_{42} = \{ v_{10}, v_{11} \}$ y $v^4 = \bar{o}$.-

También tendríamos las separaciones opuestas a las anteriores, $-x^j$, para cada una de las componentes G_j. - Esta duplicidad de separaciones, $\pm x^j$, para cada componente induce una multiplicidad de ellas para el s-grafo G. Son separaciones de G : $x = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = x_3 - x_4 - x_7 + x_8$ (correspondiente a la separación de G dada por $V_1 = V_{11} \cup V_{21} \cup V_{31} \cup V_{41}$ y $V_2 = V_{12} \cup V_{22} \cup V_{32} \cup V_{42}$) o bien $x' = x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = x_3 + x_4 + x_7 - x_8$ (correspondiente a $V_1' = V_{11} \cup V_{21} \cup V_{32} \cup V_{41}$ y - $V_2' = V_{12} \cup V_{22} \cup V_{31} \cup V_{42}$), así como sus opuestas, $-x$ y $-x'$.

LEMA : Si un grafo G es completo*, se verifica que

$$\forall x \in C^e (G) \quad s (x) = + 1 \Leftrightarrow \forall t \in T (G) \quad s (t) = + 1$$

---

* Véase la nota ** de la página 9 de este número.

siendo T (G) el conjunto de *triángulos* de G, es decir, de ciclos para los que el cardinal de su soporte es 3.

Si la demostración en sentido directo es evidente, para el recíproco basta demostrar que $\forall\, x \in C^e(G) \quad \exists\, t_i \in T(G) \quad (i=1,\dots,q)$ tales que $x=\sum_{i=1}^{q} t_i$, pues entonces será $s(x)=\prod_{i=1}^{q} s(t_i)=+1$.

Sea cualquier $x=\sum_{\kappa=1}^{n} \xi^{\kappa} x_{\kappa} \in C^e (G)$. Por abreviar la demostración, consideremos - sin que ello suponga restricción - reordenados y reorientados los arcos de sop x de modo que el ciclo elemental $\bar{x}=\sum_{\kappa_i=1} \bar{\xi}^{\kappa_i} x_{\kappa_i}$ verifique $sop^+ \bar{x} = sop\, \bar{x} = sop\, x$ (siendo $sop^+ x = \{x_{\kappa} \in X/\xi^{\kappa}>0\}$), de modo que $\delta^- x_{\kappa_i} = \delta^+ x_{\kappa_{i+1}}$ ($i = 1,\dots,p-1$, si era p el cardinal de sop x) y $\delta^- x_{\kappa_p} = \delta^+ x_{\kappa_1}$. Será por tanto $\bar{x} = \sum_{i=1}^{p} x_{\kappa_i}$ y $s(\bar{x})=s(x)$.

Considerando los arcos x'_{κ_i} tales que $\delta x'_{\kappa_i} = \delta^- x_{\kappa_i} - \delta^+ x_{\kappa_1}$ ($i=2,\dots,p-2$), que existen pues G es completo, podemos escribir:

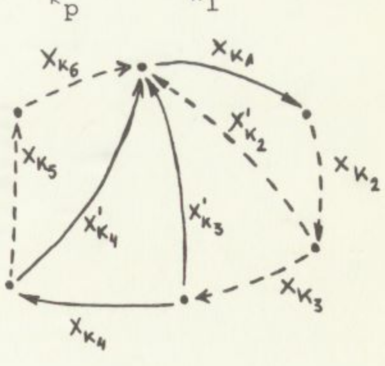

Figura 5

$$\bar{x} = (x_{\kappa_1} + x_{\kappa_2} + x'_{\kappa_2}) + (- x'_{\kappa_2} + x_{\kappa_3} + x'_{\kappa_3}) + \ldots +$$

$$(- x'_{\kappa_{p-3}} + x_{\kappa_{p-2}} + x'_{\kappa_{p-2}}) + (- x'_{\kappa_{p-2}} + x_{\kappa_{p-1}} + x_{\kappa_p}),$$

donde cada paréntesis es un triángulo; luego

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{p-2} t_i \text{ , c.q.d.}$$

(En la figura 5, que ilustra el desarrollo anterior, se han omitido los arcos no significativos - para el mismo).

Si G no es completo el lema no es cierto, como muestra el s-grafo de la figura 6, en el que siendo todos los triángulos positivos, el ciclo $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5$ es negativo.

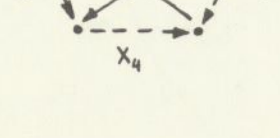

Figura 6