COMUNICACIONES

UNA FORMA CANONICA PARA AUTOMATAS FINITOS

Por J. Bondía y P. Roa *

INTRODUCCION

Definida una relación de equivalencia sobre un conjunto dado, si en cada clase de la relación podemos caracterizar un elemento, y solamente uno, de tal manera que exista un algoritmo universal (aplicable a todas las clases) que lo compute, llamaremos a tal elemento forma canónica de dicha clase y en general, diremos que en ese conjunto está definida una forma canónica. Usualmente, si un conjunto cuenta con forma canónica, el reconocimiento de la equivalencia entre dos elementos del mismo se enfoca a través del concepto de forma canónica y su solución es especialmente trivial sin más que reducir ambos elementos a sus formas respectivas y comprobar después la posible identidad de ambas; es también común el representar las clases de la relación por medio de sus formas canónicas.

Pues bien, en este trabajo consideraremos el conjunto $M(\Sigma)$ de todos los autómatas finitos (a.f.'s) sobre Σ, con la relación de equivalencia usual R (dos autómatas son equivalentes sii reconocen el mismo lenguaje) definida en él; entonces a partir del concepto de a.f.'s bien ordenados, definiremos en $M(\Sigma)$ una forma canónica, lo cual implica, según lo dicho anteriormente, la demostración de su existencia y unicidad para todo elemento de $M(\Sigma)/R$, a más de dar un algoritmo general para su obtención. Todas estas partes son abarcadas en este artículo.

* Centro de Investigación UAM-IBM

El reconocimiento de la equivalencia en M(Σ) es un problema suficientemente estudiado, ya sea desde el punto de vista algebráico o desde el del reconocimiento de lenguajes, en la literatura clásica sobre el tema, como para que la definición de una forma canónica en M(Σ) aporte especiales ventajas a su resolución. No obstante, el establecimiento de dicha forma canónica en M(Σ) puede ser de gran utilidad en R(Σ), conjunto de expresiones regulares sobre Σ, pues con unos algoritmos especiales de transformación entre M(Σ) y R(Σ) se podría llegar a definir una forma canónica en R(Σ), lo cual creemos sí tendría una gran importancia y utilidad. Todos estos aspectos se estudian bastante exhaustivamente en nuestro trabajo "Expresiones regulares. Transformaciones, equivalencias y Singularidad" (Ver referencias).

Sea $M = (K,\Sigma,\delta,q_1,F)$ un autómata finito y conexo. Sea $K = \{q_1, q_2,\ldots,q_n\}$ el conjunto de estados de M, donde suponemos que está definido un roden total $<$.; sin pérdida de generalidad, podemos representar el orden $<$ por el orden natural en los subíndices $i\epsilon I =\{1,2,\ldots,n\}$. Suponemos también que en $\Sigma= \{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m\}$ está definido otro orden total, que, como en K, vendrá representado por los subíndices $h\epsilon H = \{1,2,\ldots,m\}$. Todos los autómatas que consideramos en este trabajo tendrán, salvo especificación, las características aquí descritas para M.

I. Concepto y caracterización de Autómatas finitos bien ordenados.

Definición 1.1. "Definimos para todo autómata M la sucesión $S_M = (s_j)_{j\epsilon J=\{0,1,\ldots,nm\}}$ tal que:

$$s_o = q_1$$

$$\forall j\epsilon J, j\neq 0, s_j = \delta(q_{\alpha(j)},\sigma_{\beta(j)}) \text{ donde } \begin{cases} \alpha(j)=1+ \text{Parte entera}(\frac{j-1}{m}) \\ \beta(j)=1+ \text{Resto}(\frac{j-1}{m}) \end{cases}$$

(Cuando, en virtud del contexto, no haya posibilidad de confusión, representaremos a S_M por S y a $\alpha(j)$ y $\beta(j)$ por α y β respectivamente).

Obviamente, la sucesión S_M puede también ser representada por:

$$S_M = (q_1,\delta(q_1,\sigma_1),\ldots,\delta(q_1,\sigma_m), \delta(q_2,\sigma_1),\ldots,\delta(q_n,\sigma_m))$$

Consideraremos $\forall j\epsilon J$ las subsucesiones S_j dadas por:

$$S_j = (s_i)_{0\leq i\leq j}$$

Definición 1.2. "Diremos que el autómata M está bien ordenado si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones:

1. El estado inicial q_1 de M es mínimo respecto del orden definido en K.

2. La sucesión S es tal que:

$\forall j \in J-\{0\} \quad (s_j \in S_{j-1}) \vee (s_j = (\text{máx.}(S_{j-1}))')$

donde max y ' son los operadores 'máximo' y 'sucesor' respecto del orden de K."

Ejemplo: Sea el autómata $M=(\{q_1,q_2,q_3,q_4\},\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\delta,q_1,\{q_3\})$ con la función de transición δ dada por:

$\delta(q_1,\sigma_1)=q_2 \quad \delta(q_1,\sigma_2)=q_1 \quad \delta(q_1,\sigma_3) = q_2$

$\delta(q_2,\sigma_1)=q_1 \quad \delta(q_2,\sigma_2)=q_4 \quad \delta(q_2,\sigma_3) = q_1$

$\delta(q_3,\sigma_1)=q_3 \quad \delta(q_3,\sigma_2)=q_2 \quad \delta(q_3,\sigma_3) = q_4$

$\delta(q_4,\sigma_1)=q_2 \quad \delta(q_4,\sigma_2)=q_3 \quad \delta(q_4,\sigma_3) = q_3$

M no está bien ordenado, ya que:

$s_5 = \delta(q_2,\sigma_2) = q_4 \notin S_4 = (q_1,q_2,q_1,q_2,q_1)$

y $q_4 \neq (\text{máx.}(S_4))' = q_3$

Sin embargo el autómata $M' = (\{q_1,q_2,q_3,q_4\},\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\delta',q_1,\{q_4\}$

con δ':

	σ_1	σ_2	σ_3
q_1	q_2	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3	q_1
q_3	q_2	q_4	q_4
q_4	q_4	q_2	q_3

sí está bien ordenado, comprobándose fácilmente que verifica las condiciones 1 y 2 de la def. 1.2.

Caracterizaremos, ahora, los autómatas bien ordenados mediante la sucesión S' de los n-1 primeros elementos de S distintos entre sí y distintos de q_1. Definamos formalmente S'.

Definición 1.3. "Para todo autómata M definimos la sucesión

$S' = (s_{j_i})_{1\le i\le n-1}$, $j_i \in J-\{0\}$, tal que

$\forall s_{j_i} \in S'$, $s_{j_i} \in S$, y $(j_{i-1}<j_i)\wedge(s_{j_i} \notin S_{j_i-1})$. "

Veamos que la condición necesaria y suficiente para que un autómata esté bien ordenado es que la sucesión S' sea monótona creciente. Para ello demos 3 lemas previos, que resultan casi evidentes desde las respectivas definiciones.

Lema 1.1. "Para todo autómata M y $\forall i$, $1<i\le n-1$, se verifica que:

$\text{máx.}(S_{j_{i-1}}) = \text{máx.}(S_{j_i-1})$. "

$\text{máx.}(S_{j_i-1}) = \text{máx.}(\text{máx.}(S_{j_{i-1}}),\ \text{máx.}(s_h)_{j_{i-1}<h<j_i})$

pero por definición de S':

$\forall h/j_{i-1}\le h<j_i \quad s_h \in S_{j_{i-1}}$, luego:

$\text{máx.}(s_h)_{j_{i-1}<h<j_i} \le \text{máx.}(S_{j_{i-1}})$ y por tanto:

$\text{máx.}(S_{j_i-1}) = \text{máx.}(S_{j_{i-1}})$ q.l.q.d.

Lema 1.2. "Si el autómata M está bien ordenado, se verifica que:

$s_{j_i} = \text{máx.}(S_{j_i}),\ \forall i \quad 1 \leq i \leq n-1$

$S_{j_i} = (s_o, s_1, \ldots, s_{j_i-1}, s_{j_i}) = (S_{j_i-1}, s_{j_i})$

Por definición de S': $s_{j_i} \notin S_{j_i-1}$

y por estar M bien ordenado: $s_{j_i} = (\text{máx.}(S_{j_i-1}))'$

luego:

$\text{máx.}(S_{j_i}) = \text{máx.}(\text{máx.}(S_{j_i-1}), s_{j_i}) = s_{j_i}$ q.l.q.d.

Lema 1.3. "Si la sucesión S' es monótona creciente, entonces se verifica que: $s_{j_{i-1}} = \text{máx.}(S_{j_i-1})\ \forall i/1 < i \leq n-1$"

En virtud del lema 1.1., es equivalente demostrar:

S' monótona creciente $\Longrightarrow s_{j_i} = \text{máx.}(S_{j_i})\ \forall i/1 \leq i \leq n-1$

S' m.c. $\Longrightarrow \forall i \quad s_{j_i} = \text{máx.}(S'_i)$. Ahora bien:

$\forall s_h \in S_{j_i},\ \exists s_{j_k} \in S'_i\ /s_h = s_{j_k} \Longrightarrow s_h \leq s_{j_i} \Longrightarrow s_{j_i} = \text{máx.}(S_{j_i})$

q.l.q.d.

<u>Proposición 1.1.</u> "El autómata M está bien ordenado sí y solo si la sucesión S' es monótona creciente".

Demostración

==>. M bien ordenado ====> S' monótona creciente

$\forall s_{j_i} \in S' \quad s_{j_{i-1}} \overset{(1)}{====>} s_{j_i} = (\text{máx.}(S_{j_i-1}))' \overset{(2)\wedge(3)}{======>}$

$====> s_{j_i} = (s_{j_{i-1}})' ====>$ S' monótona creciente.

(1) por definición de bien ordenado

(2) por el lema 1.1.

(3) por el lema 1.2.

<==. S' m creciente ====> M bien ordenado.

Sea $s_j \in S$ $(j \neq 0)$. Puede ocurrir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nexists j_i = j \overset{(1)}{====>} s_j \in S_{j-1} \\ \exists j_i = j \overset{(1)\wedge(2)}{======>} (s_j = s_{j_i} \notin S_{j_i-1}) \wedge (s_{j_i} = (s_{j_{i-1}})' \overset{(3)}{===>} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ldots . s_j \in S_{j-1} \\ \overset{(3)}{====>} (s_{j_i} \notin S_{j_i-1}) \wedge (s_{j_i} = (\text{máx.}(S_{j_i-1}))') \equiv \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ldots . s_j \in S_{j-1} \\ \equiv (s_j \notin S_{j-1}) \wedge (s_j = (\text{máx.}(S_{j-1}))') \end{array} \right. ====> \text{M está bien ordenado}$$

(1) Por definición de S'

(2) Por ser S' monótona creciente

(3) Por el lema 1.3. q.l.q.d.

II. Existencia y unicidad de Autómatas bien ordenados.

Nos proponemos estudiar en este apartado si para todo lenguaje regular existe un único autómata mínimo bien ordenado que lo reconozca. El problema de la minimización de autómatas está suficientemente tratado en la literatura clásica (Harrison, Gecseg) como para que aquí tratemos de hacer una exposición detallada; apuntaremos únicamente las líneas generales de su solución.

El problema se estudia en base al isomorfismo existente entre los retículos $(\Psi(\Sigma),\subset,\cup,\cap)$ (1) y $(M(\Sigma), \rightarrow, \times, \otimes)$ (2), donde $\Psi(\Sigma)$ es el conjunto de todas las relaciones de congruencia sobre Σ^* y $M(\Sigma)$ es el conjunto de todos los autómatas secuenciales (finitos y no finitos) sobre Σ. Dicho isomorfismo se establece en base a los autómatas cocientes sobre relaciones $R\in\Psi(\Sigma)$ El problema de, dado un lenguaje regular L, obtener un autómata mínimo (menor número de estados) que reconozca a L se enfoca, entonces, a partir de $\Psi(\Sigma)$ y se reduce a obtener la máxima relación de congruencia en $\Psi(\Sigma)$ que refine a L. Se demuestra que tal relación es la congruencia inducida por L, denotada por R, y definida por:

$$\forall x,y\in\Sigma^* \; xR_Ly \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall Z\in\Sigma^* \; xZ\in L \Longleftrightarrow yZ\in L).$$

Construyendo el autómata cocience $C(L,R_L)$ obtendremos un autómata mínimo entre todos los que reconocen a L. Se demuestra también que tal autómata es único salvo isomorfismo. Sin embargo, el problema de la construcción práctica de este autómata es que previamente hay que construir las clases de equivalencia de la relación R_L lo que la mayoría de las veces es dificultoso, si no es imposible. Es por esta razón por lo que, generalmente, se construye

---

(1) $\subset$ es la relación usual de inclusión de relaciones y $\cap$ y $\cup$ son las operaciones de intersección y unión sobre congruencias de Σ^*.

(2) $\rightarrow$ es la relación de homomorfismo entre autómatas.($M\rightarrow M'$ sii existe un homomorfismo de M en M'), $\times$ y $\otimes$ son, respectivamente, las operaciones de producto y suma directa sobre autómatas.

el autómata mínimo en base a congruencias sobre el conjunto de estados de la máquina que se quiere minimizar; una vez constituído se demuestra que es mínimo comprobándose que existe un isomorfismo entre él y $C(L,R_L)$, que ya se ha demostrado mínimo.

Supuesta entonces la existencia y unicidad, salvo isomorfismos, de dicho autómata, demostraremos, ahora, la existencia y unicidad de un autómata bien ordenado entre todos los autómatas isomorfos a uno dado. Para ello utilizaremos los dos siguientes lemas:

Lema 2.1. "Sea M un a.f. y conexo, entonces $\forall q_i \neq q_1$ se verifica que $q_i \leq \text{máx.} \bigcup_{q_j<q_i} \bigcup_{l=1}^{m} \{\delta(q_j,\sigma_l)\}$ o lo que es lo mismo $q_i \leq \text{máx.} S_{(i-1)m}$."

Partiremos, para su demostración, de la hipótesis de que el lema no es cierto, es decir que:

$$\exists q_i \in K \;\text{"}\; q_i > \text{máx.}(S_{(i-1)m})$$

Por ser M conexo, q_i será accesible desde un cierto estado q_k:

$$\exists q_k \in K,\ \exists \sigma \in \Sigma \;\text{"}\; q_i = \delta(q_k,\sigma)$$

Por la hipótesis de partida:

$$q_i = \delta(q_k,\sigma) \notin \bigcup_{q_j<q_i} \bigcup_{l=1}^{m} \{\delta(q_j,\sigma_l)\} \Longrightarrow q_k \geq q_i$$

Ahora bien si $q_k \geq q_i$, q_k no es accesible desde ningún estado menor que q_i, ya que si:

$$\exists q_h < q_i \text{ y } \exists \sigma \;\text{"}\; q_k = \delta(q_h,\sigma) \Longrightarrow$$

$$q_k \in \bigcup_{q_j<q_i} \bigcup_{l=1}^{m} \delta(q_j,\sigma_l) \Longrightarrow q_i > q_k$$

Por tanto, q_i solo es accesible desde algún estado mayor que él, y estos no lo son desde $q_j<q_i$, luego M no es conexo, siendo por tanto falsa la hipótesis de partida y verificándose así el lema.

q.l.q.d.

<u>Lema 2.2.</u> "La condición necesaria y suficiente para que un autómata bien ordenado M sea conexo, es que:

$$\forall q \in K \ (q \neq q_1) \quad \exists q' < q, \ \exists \sigma \in \Sigma \quad " \quad q = \delta(q',\sigma) \qquad [1] \ "$$

<u>La condición es suficiente</u>

$$[1] \Longrightarrow \forall q \in K, \ \exists x \in \Sigma^* \ " \ \delta(q_1,x) = q$$

sea $q \neq q_1$. Por hipótesis $\exists q'<q, \ \exists \sigma' \ " \ \delta(q',\sigma') = q$

Si $q' = q_1$, entonces $x=\sigma'$ y q será accesible

Si $q' \neq q_1$, $\exists q''<q', \ \exists \sigma'' \ " \ \delta(q'',\sigma'') = q'$

Igualmente si $q''=q_1$, entonces $x=\sigma''\sigma'$ y q será accesible. Sino, repitiendo el proceso, necesariamente llegaremos a q_1, con lo que q, en cualquier caso, será accesible.

<u>La condición es necesaria</u>

M bien ordenado y conexo $\Longrightarrow$ [1]

Supongamos que [1] no se verifica. Entonces:

$$\exists q \neq q_1 \ " \ \forall q'<q, \ \forall \sigma \quad q \neq \delta(q',\sigma) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow q \notin \bigcup_{q_j<q} \bigcup_{l=1}^{M} \{\delta(q_j,\sigma_l)\} \qquad [2]$$

Por el lema 2.1.:

$$\exists q_k \in \bigcup_{q_l<q} \bigcup_{l=1}^{m} \{\delta(q_j,\sigma_l)\} \quad " \quad q_k>q$$

q_k será tal que: $q_k=\delta(q_j,\sigma_1) = s_{(j-1)m+1} = s_h$.

Ahora bien:

$$\left.\begin{array}{l} q<q_k\in S_h \\ \\ [2] \quad q\notin S_h \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{M no está bien ordenado.}$$

luego se verifica [1]. q.l.q.d.

Teorema 2.1. "Entre todos los autómatas isomorfos a uno dado M (conexo) existe únicamente uno bien ordenado".

Demostración de la existencia

Sea M un a.f. y conexo. Demostremos, constructivamente, la existencia de un autómata $M^{(p)}$ isomorfo a M y bien ordenado.
Suponemos que M no está bien ordenado,(pero sí que q_1 es mínimo en K), entonces existirá al menos un $s_{j_h}\in S'_M$ tal que:

$$(s_{j_{h-1}})' \neq s_{j_h} \quad \text{(si h=1 consideraremos } s_{j_o} = q_1\text{)}.$$

Mediante la aplicación π_1: K → K definida por:

$$\forall q\in K \quad \pi_1(q) = \begin{cases} s_{j_h} & \text{si } q=(s_{j_{h-1}})' \\ (s_{j_{h-1}})' & \text{si } q=s_{j_h} \\ q & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

podemos construir el autómata:

$$\pi_1(M) = M^{(1)} = (K,\delta^{(1)},q_1,F^{(1)} = \pi_1(F))$$

donde $\delta^{(1)}$ está definida mediante:

$$\delta^{(1)}(\pi_1(q),\sigma) = \pi_1(\delta(q,\sigma)) \quad \forall q,\forall\sigma$$

Obviamente $M^{(1)}$ es isomorfo a M

Comprobemos que la sucesión $S_{M^{(1)}} = S^{(1)} = (s_j^{(1)})_{j\in J}$ es tal que:

$$\forall j\leq j_h - 1 \quad s_j^{(1)} = s_j \qquad [1]$$

Sea $s_j = \delta(q_\alpha, \sigma_\beta)$. Mediante π_1 obtenemos:

$$\pi_1(s_j) = \delta^{(1)}(\pi_1(q_\alpha), \sigma_\beta)$$

Si demostramos que $s_j, q_\alpha \neq \begin{cases} s_{j_h} \\ (s_{j_{h-1}})' \end{cases}$ entonces $\begin{cases} \pi(s_j) = s_j \\ \pi(q_\alpha) = q_\alpha \end{cases}$

con lo que demostraremos [1].

$s_j \neq s_{j_h}$ ya que por definición de S' $s_{j_h} \notin S_{j_h - 1}$

$s_j \neq (s_{j_{h-1}})'$ ya que $(s_{j_{h-1}})' \notin S_{j_h - 1}$ por ser

$s_{j_{h-1}} = \text{máx.}\ (S_{j_h - 1})$ pues por hipótesis $S'_{j_{h-a}}$ es monótona creciente.

Por otra parte, por el lema 2.1.:

$$q_\alpha \leq \text{máx.} \bigcup_{q<q_\alpha} \bigcup_{l=1}^{m} \{\delta(q, \sigma_l)\} \leq \text{máx.}\ (S_{j_h - 1}) = s_{j_{h-1}} \qquad [2]$$

luego $q_\alpha \neq \begin{cases} s_{j_h} \\ (s_{j_{h-1}})' \end{cases}$ ya que $s_{j_{h-1}} < \begin{cases} s_{j_h} \\ (s_{j_{h-1}})' \end{cases}$

Por tanto, $s^{(1)}_{j_h-1} = s_{j_h-1}$, con lo que si S'_{h-1} era monótona creciente, lo será $S'^{(1)}_{h-1}$.

Veamos ahora que $s^{(1)}_{j_h} = (s_{j_{h-1}})'$ con lo que la sucesión $S'^{(1)}_{h}$ será también monótona creciente.

$$s_{j_h} = \delta(q_{\alpha(j_h)}, \sigma_{\beta(j_h)}) \Longrightarrow \pi_1(s_{j_h}) = \delta^{(1)}(\pi_1(q_{\alpha(j_h)}), \sigma_{\beta(j_h)}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (s_{j_{h-1}})' = \delta^{(1)}(q_{\alpha(j_h)}, \sigma_{\beta(j_h)}) \quad \text{ya que}$$

$\pi(q_{\alpha(j_h)}) = q_{\alpha(j_h)}$ pues por [2] $q_{\alpha(j_h)} \leq s_{j_{h-1}}$.

Hemos obtenido un autómata $M^{(1)}$, isomorfo a M, con un estado más ordenado. Si la sucesión $S'^{(1)}$ siguiese sin ser monótona creciente volveríamos a repetir el proceso hasta obtener un autómata $M^{(p)}$, para el cual $S'^{(p)}$ si fuese m.c.. El proceso, es indudable tiene fin, ya que el número de estados es finito. Es también indudable que $M^{(p)}$ es isomorfo a M, siendo el isomorfismo $\pi: M \to M^{(p)}$ el producto de los isomorfismos $\pi_1, \ldots, \pi_p$ es decir $\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_p$

Demostración de la unicidad.

Supongamos que existen dos autómatas $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$, ambos bien ordenados, y tal que existe un isomorfismo π definido entre ellos: $\pi: M^{(1)} \to M^{(2)}$
Al estar $M^{(2)}$ bien ordenado necesariamente ha de ser:

$$\pi(q_1) = q_1$$

Sea q_i el primer estado que es cambiado de nombre mediante π, es decir:

$$\forall q_k < q_i \quad \pi(q_k) = q_k \text{ y } \pi(q_i) = q_j \neq q_i \qquad [3]$$

Por tanto $q_j > q_i$

Sea $s_{j_h}^{(1)} \in S'^{(1)}$ " $q_i = s_{j_h}$

Es evidente por [2] y [3] que $S_{j_h-1}^{(1)} = S_{j_h-1}^{(2)}$

Ahora bien, $s_{j_h}^{(2)} = \pi\ (s_{j_h}^{(1)}) = q_j > s_{j_h}^{(1)}$ luego

$$s_{j_h}^{(2)} \neq (\text{máx.}(S_{j_h-1}^{(2)}))' = s_{j_h}^{(1)}$$

Por tanto $M^{(2)}$ no está bien ordenado.

Es decir, π tiene que ser el isomorfismo unidad con lo que $M^{(1)}$ y $M^{(2)}$ son idénticos.

q.l.q.d.

III. Una forma canónica para autómatas finitos.

Hasta ahora los órdenes definidos en K y Σ podían ser cualesquiera. Pues bien, si ordenamos a Σ lexicográficamente, representamos los estados de K por números naturales y asumimos en ellos el orden usual de N, llamaremos a un autómata bien ordenado con estas características, autómata bien numerado.

Estamos ya en condiciones de definir una forma canónica para los autómatas finitos.

Definición 3.1. "Diremos que un autómata M está en forma canónica sii es mínimo y está bien numerado."

En virtud del teorema 2.1. podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.1. "Existe una única forma canónica para cada autómata finito M".

Demostración.

El teorema es una consecuencia directa de la proposición citada, pues, por una parte, sabemos según apuntábamos al inicio del apartado II, como minimizar a M y, por otra parte, que todos los posibles autómatas mínimos equivalentes a M son isomorfos entre sí, luego, según el teorema 2.1., existirá únicamente uno bien ordenado (bien numerado en este caso) que será la forma canónica de M.

q.l.q.d.

Ejemplo: Sea el autómata $M=(K,\Sigma,\sigma,1,\{2,3\})$ con $K=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\Sigma = \{a,b\}$ y σ:

	a	b
1	6	5
2	3	5
·3	6	4
4	3	2
5	3	5
6	6	4

Obviamente, M no está bien numerado. Obtenemos un nuevo autómata $M^{(1)}$ isomorfo a M mediante la aplicación π_1 dada por:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$M^{(1)} = (K,\Sigma,\delta^{(1)},1,\{6,3\})$

$\delta^{(1)}$:

	a	b
1	2	5
2	2	4
3	2	4
4	3	6
5	3	5
6	3	5

$M^{(1)}$ sigue sin estar bien numerado ya que:

$S'^{(1)} = (2,5,4,3,6)$

no es monótona creciente.

Sometiendo a $M^{(1)}$ a la aplicación π_2 :

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el autómata $M^{(2)} = (K,\Sigma,\delta^{(2)},1,\{5,6\})$ con

$\delta^{(2)}$:

	a	b
1	2	3
2	2	4
3	5	3
4	5	6
5	2	4
6	5	3

que ya está bien numerado. Mediante la aplicación

$$\pi = \pi_1 \pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

habríamos obtenido directamente el autómata bien numerado $M^{(2)}$.

En este ejemplo M es mínimo por lo que $M^{(2)}$ es la forma canónica de M y en general de todos los autómatas que reconocen a T(M).

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

- M.A. ARBIB
  Algebraic theory of Machines, languages and Semigroups.
  Academic Press - 1968

- J. Bondía & P.Roa.
  Expresiones regulares. Transformaciones, equivalencias y Singulari dad. Publicaciones Centro de Investigación UAM-IBM. PCI 12.74

- J.A. Brzozowski
  Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events.
  Symposium on Mathematical theory of automata
  April 1962.

- F. Gécseg and I. Peak
  Algebraic theory of automata.
  Akademiai Kiadó - Budapest 1972

- A. Ginzburg
  Algebraic theory of automata
  Academic Press - 1968

- M. A. Harrison
  Introduction to swictching and automata theory
  Mcgraw-Hill 1965.