COMUNICACIONES

CLASES DE FORMULAS ARITMETICAS EN LA 1-REDUCIBILIDAD

Por José F. Prida y Fernando Orejas

INTRODUCCION

En el presente trabajo se analiza el grado en la 1-reducibilidad de siete clases de sentencias aritméticas: la verdaderas en la interpretación "standard", las falsas, las derivables en cualquier axiomatización que cumpla unos requisitos mínimos, las refutables, las indecidibles , las indecidibles verdaderas y las indecidibles falsas.

Sobre los resultados relativos a las tres clases de sentencias indecidibles, los autores no han encontrado ninguna referencia en la literatura consultada. De los otros, bien conocidos, se han dado pruebas simplificadas, al haberse partido de una nueva definición de recursividad relativa, equivalente a cualquiera de las habituales, pero, en nuestra opinión, con indudables ventajas sobre todas ellas. Tal definición ha sido sugerida por la de Davis (cfr. Davis (1958), pp. 22-23) y, sobre todo, por la de Rogers (cfr. Rogers (1967), pp. 130-132), que ha sido simplificada eliminando:

1) La noción de cuádrupla consistente.
2) La noción de cuadruplas compatibles.

3) La noción de conjunto regular.

4) La introducción de una función recursiva f tal que:

dom (ϕ_x) = rango $(\phi_{f(x)})$

dom $(\phi_x) \neq \emptyset \Longrightarrow \phi_{f(x)}$ es total

5) La introducción de una función recursiva ρ tal que para todo z:

dom$(\phi_{\rho(z)})$ es regular

Si dom (ϕ_z) es regular, entonces dom (ϕ_z) = dom $(\phi_{\rho(z)})$.

Por lo demás, nuestra definición de recursividad relativa formaliza de forma mucho más convincente que la de Rogers la noción intuitiva de máquina de Turing con oráculo, que en último término es lo que se pretende. Ello permite en ocasiones dar pruebas informales sencillas - que podrían traducirse en demostraciones formales- evitando tediosas y rutinarias manipulaciones de símbolos, que nada aportan a la intelección de la entraña del problema que se pretende resolver.

El lector experto podrá apreciar la considerable simplificación que nuestra definición de recursividad relativa lleva consigo, comparando, por ejemplo, nuestras demostraciones de TH 17 y TH 22 con los correspondientes teoremas 8-VIII y 13-I(d) de Rogers, así como la originalidad de las pruebas de TH 30, TH 38 y TH 39.

Como queda indicado, existe un claro paralelismo entre algunos de los resultados aquí presentados y los correspondientes de Rogers (1967), de donde se ha tomado un considerable número de ideas, sin hacer en cada caso referencia explícita.

RECURSIVIDAD RELATIVA

Sea N el conjunto de los números naturales.

DF 1 El conjunto finito no vacío $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset N$, donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, será denotado por D_u, siendo

$$u = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \ldots + 2^{x_n} .$$

El conjunto vacío será denotado por D_0.

La noción de máquina de Turing concebida como conjun- de cuádruplas q i o q' (estado, "input", "output", nuevo estado) será modificada en la siguiente forma:

1) El alfabeto consta de los simbolos "1" y "#", a los que se añade el símbolo impropio "*" para denotar campos vacíos. El símbolo "#" será utilizado para separar conjuntos. Los números naturales serán representados por los bloques "1", "11", "111", etc.

2) La cinta de la máquina es infinita solo por el lado derecho.

3) Al comienzo de la computación están escritos sobre la cinta tres conjuntos de números naturales D_u, D_v , $\{x_1, x_2 \ldots$ $\ldots x_n\}$, de fórma que los elementos de un conjunto están separados por el símbolo "*" y los conjuntos por el símbolo "#". El campo de trabajo inicial es el inmediato a la dere-

cha del último campo marcado (señalado en la figura con una flecha).

1 1 1 * 1 1 1 1 # 1 * 1 1 1 # 1 1 * 1 1 * 1 * 1 1 1 1 *

Zona I, u = 12   Zona II, v = 5   Zona III, {1, 1, 0, 3}

4) La máquina admite cuádruplas del tipo q i q' q" que se interpretan como el siguiente conjunto de instrucciones:

"Cuando el estado es q y el "input" (símbolo escrito sobre el campo de trabajo) es i, buscar el último número escrito en la Zona III de la cinta y a la derecha del campo de trabajo (proceso finito). Entonces:

a) Si tal número no existe, seguir en el estado q (ciclo);

b) si tal número existe y pertenece a D_u, pasar al estado q';

c) si no pertenece a D_u y pertenece a D_v, pasar a q";

d) si no pertenece a $D_u \cup D_v$, seguir en q (ciclo)".

5) Para todo estado q y toda fila que comienza por q # el "output" es el símbolo de parada.

Por un procedimiento cualquiera (por ejemplo el descrito en Hermes (1965), pp. 105-107) puede hacerse corresponder de forma efectiva a cada máquina un número natural de forma que:

a) A máquinas distintas corresponden números distintos.

b) Es recursivo el predicado T tal que

$Tz \Longleftrightarrow$ z es el número de una máquina.

c) Para todo z tal que Tz puede construirse efectivamente la máquina de número z.

DF 2 Si z es el número de una máquina, esta será denotada por M_z.

Abreviatura: $\mathfrak{X}$ denotará $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

DF 3 Para todo n y todo z tal que Tz, $\psi_{z,t}^{n+2}$ es el conjunto de tuplas $\mathfrak{X}$, u, v, y tales que la máquina M_z colocada en su estado inicial sobre el campo situado inmediatamente a la derecha del último campo marcado de una cinta con la inscripción $\# D_u \# D_v \# \mathfrak{X} *$ se para al cabo de menos de t+1 pasos sobre un campo vacío inmediatamente a la izquierda del cual está escrito el número y. Si $\overline{T}z$, entonces $\psi_{z,t}^{n+2} = \emptyset$ (función indefinida para toda tupla de argumentos).

DF 4 Para todo n,t,z y todo conjunto A

$$\phi_z^{n,A} = \{<\mathfrak{X}, y> / \exists u \exists v (D_u \subset A \wedge D_v \subset \overline{A} \quad <\mathfrak{X},u,v,y> \varepsilon\, \psi_{z,t}^{n+2,A})\}.$$

DF 5 Para todo n,z y todo conjunto $A \subset N$

$$\phi_z^{n,A} = \{<\mathfrak{X}, y> / \exists t <\mathfrak{X}, y> \varepsilon\, \phi_{z,t}^{n,A}\}.$$

Abreviaturas:

$\phi_{z,t}^{A} = \phi_{z,t}^{n,A}$ cuando sea obvio el valor de n.

$\phi_{z,t}^{n} = \phi_{z,t}^{n,\emptyset}$

$\phi_{z,t} = \phi_{z,t}^{1,\emptyset}$

$\phi_z^A = \phi_z^{n,A}$ cuando sea obvio el valor de n.

$\phi_z^n = \phi_z^{n,\emptyset}$

$\phi_z = \phi_z^{1,\emptyset}$

DF 6 El dominio de la función $\phi_{z,t}^{n,A}$ será denotado por $W_{z,t}^{n,A}$.

DF 7 El dominio de la función $\phi_z^{n,A}$ será denotado por $W_z^{n,A}$.

Abreviaturas para dominios: la mismas que para funciones.

DF 8 Para todo $n\in N$ y todo conjunto $A\subset N$, una aplicación de un subconjunto de N^n en N es una función recursiva parcial en A (abreviadamente f.r.p. en A) si existe un $k\in N$ tal que $\psi = \phi_k^{n,A}$.

DF 9 Una función recursiva parcial (abreviadamente f.r.p.) es una f.r.p. en el conjunto vacío.

DF 10 Un conjunto A es recursivo en otro conjunto B (lo que se denotará por $A \leq_T B$) si la función caracteristica de A es recursiva en B.

El siguiente teorema puede ser probado sin dificultad:

TH 1 Para conjuntos cualesquiera A, B, C se verifica:

a) $(A \leq_T B \wedge B \leq_T C) \Longrightarrow A \leq_T C$

b) Existe una función recursiva f tal que si $f_A = \phi_j^B$ (donde f_A es la función carácterística de A) y $f_B = \phi_k^C$, entonces $f_A = \phi_{f(j,k)}^C$.

TH 2 Para todo m, s existe una función recursiva e inyectiva con m argumentos f tal que para todo n, $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ y todo conjunto A se verifica:

$$\phi^{n,A}_{f(y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{n+m,\, A}_{s}(x_1, x_2, \ldots, y_m)\ (\dagger 1)$$

DEM.:

Por definición, $\phi^{n+m,A}_{s}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = z$

$\Longleftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subset A \wedge D_v \subset \bar{A} \wedge \langle x_1, \ldots, y_m, u, v, z\rangle \in \psi^{m+n+2}_{s}$

lo que implica que la máquina M_s colocada tras la inscripción # D_u # D_v # $x_1 \ldots y_m$ se para tras z, lo que obviamente también hará la máquina $M_{f(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$ cuando se la coloca tras la inscripción # D_u # D_v # $x_1 \ldots x_n$, siendo $M_{f(y_1, \ldots, y_m)}$ la máquina

$$r(lr)^{y_1+1} r(lr)^{y_2+1} \ldots r(lr)^{y_m+1} M_s$$

donde r y l representan las máquinas elementales que, colocadas en cualquier posición, realizan respectivamente el programa: desplazar el campo de trabajo un lugar a la derecha y pararse, escribir el símbolo "1" y pararse.

Así pues, $\phi^{n,A}_{f(y_1, \ldots, y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z$.

---

†1 TH 2 es una versión más fuerte del conocido teorema s-m-n de Kleene. El presente teorema ee más fuerte en un triple sentido:
1) Se extiende al caso de la recursividad relativa a un conjunto, siendo la función f construída independiente del mismo.
2) La función f resulta ser inyectiva (pues a máquinas distintas corresponden índices distintos).
3) En vez de formularse en la forma: " Para todo m, n, s existe un f tal que..." se hace en la obviamente más fuerte: "Para todo m,s existe un f tal que para todo n..."
La construcción de f proporciona un algoritmo para su computación.

Puesto que claramente $<x_1, x_2, \ldots, x_n> \varepsilon W^{n,A}_{f(y_1,\ldots,y_m)}$ si y solo si $<x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m> \varepsilon W^{n+m,A}_{s}$, el teorema queda probado.

DF 11 Para todo n>0 y todo conjunto A,

$$T^A_n = \{<z, \mathfrak{x}, y> / \mathfrak{x}\, \varepsilon W^{n,A}_{z,t}\} .$$

De DF 11 se sigue inmediatamente:

TH 3 Para todo $n \in N$ y todo conjunto A se verifica:

$$T^A_n \underset{T}{\leq} A .$$

TH 4 a) Para toda relación R con n+1 argumentos recursiva en A, existe un z tal que

$$\exists y R \mathfrak{x} y \Longleftrightarrow \exists y T^A_n z \mathfrak{x} y .$$

b) Existe una función recursiva f tal que si ϕ^A_I es la función característica de R se verifica:

$$\exists y R \mathfrak{x} y \Longleftrightarrow \exists y T^A_n\, f(I) \mathfrak{x} y .$$

DEM.:

La función recursiva f tal que

$$\phi^{n,A}_{f(I)}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y(\phi^{n+1,A}_I(\mathfrak{x}, y) = 1) \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

demuestra el teorema, ya que se tiene:

$$\exists y T^A_n\, f(I) \mathfrak{x}\, y \Longleftrightarrow \mathfrak{x} \in W^{n,A}_{f(I),y} \Longleftrightarrow \exists y \phi^{n+1,A}_I(\mathfrak{x}, y) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \exists y R \mathfrak{x} y .$$

TH 5 Para todo n, existen funciones recursivas $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ tales que para todo A y todo $\mathfrak{X}$ verifican:

$$\exists y T_n^A z \mathfrak{X} y \wedge \exists y T_n^A \bar{z} \mathfrak{X} y \Longleftrightarrow \exists y T_n^A g_1(z,\bar{z}) \mathfrak{X} y$$

$$\exists y T_n^A z \mathfrak{X} y \vee \exists y T_n^A \bar{z} \mathfrak{X} y \Longleftrightarrow \exists y T_n^A g_2(z,\bar{z}) \mathfrak{X} y$$

$$\exists y T_{n+1}^A z \mathfrak{X} \varphi_I(y) \varphi_j(y) \Longleftrightarrow \exists y T_n^A g_3(z,I,J) \mathfrak{X} y$$

$$\overset{u}{\underset{x=o}{\forall}} x \exists y T_{n+1}^A z \mathfrak{X} xy \Longleftrightarrow \exists y T_{n+1}^A g_4(z) \mathfrak{X} uy$$

$$\overset{u}{\underset{x=o}{\exists}} x \exists y T_{n+1}^A z \mathfrak{X} xy \Longleftrightarrow \exists y T_{n+1}^A g_5(z) \mathfrak{X} uy$$

$$\exists x \exists y T_{n+1}^A z \mathfrak{X} xy \Longleftrightarrow \exists y T_n^A g_6(z) \mathfrak{X} y \; .$$

DEM.:

El teorema es consecuencia de TH 2, que asegura la existencia de funciones recursivas g_1-g_6 tales que:

$$1) \quad \phi^{n,A}_{g_1(z,\bar{z})}(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{X} \in W_z^{n,A} \wedge \mathfrak{X} \in W_{\bar{z}}^{n,A} \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

....

$$5) \quad \phi^{n+2,A}_{g_5(z)}(\mathfrak{X},u,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overset{u}{\underset{x=o}{\exists}} x < \mathfrak{X}, x > \in W_z^{n+1,A} \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Para demostrar la última equivalencia, consideremos la biyección recursiva σ_2 de N^2 en N definida por la igualdad $\sigma_2(x,y) = 2^x(2y+1)-1$. Sean σ_{21} y σ_{22} las funciones inversas (i.e., tales que $\sigma_2(\sigma_{21}(x), \sigma_{22}(x)) = x$). Se tiene:

$$\exists x \exists y T^A_{n+1} z \xi xy \Longleftrightarrow \exists t T^A_{n+1} z \xi\, \sigma_{21}(t)\sigma_{22}(t) \Longleftrightarrow$$

$\exists t T^A_n g_6(z) \xi t$, donde g_6 es una función recursiva tal que

$$\phi^A_{g_6(z)}(\xi) = \begin{cases} 1 & \exists t < \xi,\ \sigma_{21}(t) \in W^{n+1,A}_{z,\sigma_{22}(t)} \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases} .$$

Para todo n y todo conjunto A se definirán inductivamente las clases de conjuntos Σ^A_m y Π^A_m de la siguiente forma:

DF 12 $\qquad \Sigma^A_0 = \Pi^A_0 = \{B \,/\, B \leq_T A\}$

$$\Sigma^A_{m+1} = \{ B \,/\, \exists n \exists C (B \subset N^n \wedge C \subset N^{n+1} \wedge C \in \Pi^A_m \wedge \forall \xi (\xi \in B \leftrightarrow \exists y \langle \xi, y\rangle \in C))\}$$

$$\Pi^A_{m+1} = \{ B \,/\, \exists n \exists C (B \subset N^n \wedge C \subset N^{n+1} \wedge C \in \Sigma^A_m \wedge \forall \xi (\xi \in B \leftrightarrow \forall y \langle \xi, y\rangle \in C))\}$$

Abreviatura: $\eta = y_1, y_2, \ldots, y_m$

TH 6 Para todo A, B, m, n tales que $m>0$ y $B \subset N^n$ se verifica:

a) $B \in \Sigma^A_m \Longleftrightarrow \exists z \forall \xi (\xi \in B \Longleftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \cdots T^A_{n+m-1} z \xi \eta)$,

donde el predicado T^A_{n+m-1} va precedido del símbolo de negación si m es par.

b) $B \in \Pi^A_m \Longleftrightarrow \exists z \forall \xi (\xi \in B \Longleftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \cdots T^A_{n+m-1} z \xi \eta)$,

donde el predicado T^A_{n+m-1} va precedido del símbolo de negación si m es impar.

DEM.:

La implicación de derecha a izquierda es trivial.

De izquierda a derecha:

Para n = 1 se tiene

$B \varepsilon \Sigma_1^A$ implica que existe $C \varepsilon \Pi_0^A$ tal que para todo ξ

$\xi \varepsilon B \Longleftrightarrow \exists y \langle \xi, y \rangle \varepsilon C$, siguiendose el teorema por TH 4.

$B \varepsilon \Pi_1^A$ implica que existe un $C \varepsilon \Sigma_0^A$ tal que para todo

$\xi \varepsilon B \Longleftrightarrow \forall y \langle \xi, y \rangle \varepsilon C$, con lo que $\xi \varepsilon \overline{B} \Longleftrightarrow \exists y \langle \xi, y \rangle \varepsilon \overline{C}$

Puesto que $\overline{C} \varepsilon \Pi_0^A$ se tiene que existirá un z tal que

$\xi \varepsilon B \Longleftrightarrow \xi \not\varepsilon \overline{B} \Longleftrightarrow \neg \exists\, y T_n^A z \xi y \Longleftrightarrow \forall\, y \neg T_n^A z \xi y$.

Supuesta la validez del teorema para n = m, se sigue inmediatamente que es también cierto para n = m+1.

DF 13 z es un Σ_m^A-índice de B si para todo ξ se verifica:

$$\xi \varepsilon B \Longleftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots T_{n+m-1}^A z \xi \eta ,$$

donde el predicado T_{n+m-1}^A va precedido del símbolo de negación si m es par.

DF 14 z es un Π_m^A-índice de B si para todo ξ se verifica:

$$\xi \varepsilon B \Longleftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots T_{n+m-1}^A z \xi \eta ,$$

donde el predicado T_{n+m-1}^A va precedido del símbolo de negación si m es impar.

TH 7 Para todo m, z, A, B se verifica:

z es un Σ_m^A-indice de B si y sólo si es un Π_m^A-indice de $\overline{B}$.

DEM.: Inmediata.

TH 8 Para todo $m \in N$ y todo conjunto $A \subset N$ se verifica:

a) $\Sigma_m^A \cup \Pi_m^A \subset \Sigma_{m+1}^A \cap \Pi_{m+1}^A$

b) Existen funciones recursivas g_1 y g_2 tales que para todo n y todo $B \subset N^n$ se verifica:

b1) Si z es un Σ_m^A-índice de B, $g_1(z)$ es un Π_{m+1}^A-índice de B.

b2) Si z es un Σ_m^A-índice de B, $g_2(z)$ es un Σ_{m+1}^A-índice de B.

b3) Si z es un Π_m^A-índice de B, $g_1(z)$ es un Σ_{m+1}^A-índice de B.

b4) Si z es un Π_m^A-índice de B, $g_2(z)$ es un Π_{m+1}^A-indice de B.

DEM.:

a) Inmediato, añadiendo cuantificadores superfluos.

b1) Sea g_1 tal que

$$\phi^A_{g_1(z)}(\mathfrak{x}, y_0, \ldots, y_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \mathfrak{x}, y_1, \ldots, y_m \rangle \in W_z^A \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Se tiene:

$$\mathfrak{x} \in B \Longleftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \ldots T^A_{m+n-1} z \Longleftrightarrow$$

$$\exists y_1 \forall y_2 \ldots T^A_{m+n} g_{1(z)} \mathfrak{x}\, y_0\, \mathfrak{y} \Longleftrightarrow \forall y_0 \exists y_1 \ldots T^A_{m+n} g_1(z) \mathfrak{x}\, y_0\, \mathfrak{y}\,.$$

b2) Sea g_2 tal que

$$\phi^A_{g_2(z)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \mathfrak{x}, y_1, \ldots, y_{m-1} \rangle \notin W^A_{z, y_m} \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Caso I: m es par. Se tiene:

$$\exists y_{m+1} T^A_{m+n} g_2(z) \mathfrak{x}\, \mathfrak{y}\, y_{m+1} \Longleftrightarrow \neg\, T^A_{m+n-1} z\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{y}$$ y, por tanto,

$$\mathfrak{x} \in B \Longleftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m \neg T^A_{m+n-1} z\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{y} \Longleftrightarrow$$

$$\exists y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_m \exists y_{m+1} T^A_{m+n} g_2(z) \xi \eta\, y_{m+1} \,,$$

con lo que $g_2(z)$ es un Σ^A_{m+1}-índice de B.

Caso II: m es impar. Se tiene:

$$\forall y_{m+1} \neg T^A_{m+n} g_2(z) \xi \eta\, y_{m+1} \Longleftrightarrow T^A_{m+n-1} z \xi \eta$$

y por tanto

$$\xi \in B \Longleftrightarrow \exists y_1 \cdots \exists y_m T^A_{m+n-1} z \xi \eta \Longleftrightarrow$$

$$\exists y_1 \cdots \exists y_m \forall y_{m+1} \neg T^A_{m+n} g_2(z) \xi \eta\, y_{m+1} \,,$$

con lo que $g_2(z)$ es un Σ^A_{m+1}-índice de B.

b3): inmediato a partir de b1) y TH 7.

b4): inmediato a partir de b2) y TH 7.

A partir de TH 5 puede probarse fácilmente:

TH 9 Para todo m y conjuntos cualesquiera A, B, C se verifica:

a.1.1. $(B \in \Sigma^A_m \wedge C \in \Sigma^A_m) \Longrightarrow B \cap C \in \Sigma^A_m$

a.1.2. Dual para la unión.

a.1.3. $(B \in \Sigma^A_m \wedge \forall \xi\, (\xi \in C \Longleftrightarrow \langle \phi^A_{i_1}(\xi), \ldots, \phi^A_{i_n}(\xi) \rangle \in B)$
$\Longrightarrow C \in \Sigma^A_m$

a.1.4. La cuantificación existencial limitada de un conjunto de la clase Σ^A_m pertenece a dicha clase.

a.1.5. Dual para la cuantificación universal limitada.

a.1.6. La cuantificación existencial de un conjunto de la clase Σ^A_m pertenece a dicha clase.

a.2.1.- a.2.6. : Duales para la clase Π^A_m .

b.1.1.-b.2.6.: existencia de funciones recursivas que permiten obtener índices de modo uniforme,

TH 10 Para todo A, B se verifica:

a) $B \varepsilon \Sigma_1^A \Longleftrightarrow \exists z (B = W_z^A)$

b) z es un Σ_1^A-índice de B si y sólo si $B = W_z^A$.

DEM.: Trivial a partir de la equivalencia

$\exists y T_n^A z \mathfrak{X} y \Longleftrightarrow \mathfrak{X} \varepsilon W_z^A$.

El siguiente teorema, bien conocido, puede probarse sin dificultad:

TH 11 Para conjuntos cualesquiera A, B, C se verifica:

a) $((A \varepsilon \Sigma_1^B \text{ y } B \varepsilon \Sigma_0^C) \Longrightarrow A \varepsilon \Sigma_1^C$,

b) Existe una función recursiva g tal que

$(A = W_z^B \text{ y } f_B = \phi_i^C) \Longrightarrow A = W_{g(z,i)}^C$.

TH 12 Para todo A, B y todo $m \varepsilon N$ se verifica:

a) $B \varepsilon \Sigma_{m+1}^A \Longleftrightarrow \exists C (C \varepsilon \Sigma_m^A \text{ y } B \varepsilon \Sigma_1^C)$

b) Existe una función recursiva r tal que si j es un Σ_m^A-índice de C y z es un Σ_1^C-índice de B, entonces r(z,j) es un Σ_{m+1}^A-índice de B.

c) Existen funciones recursivas g, h tales que si k es un Σ_{m+1}^A-índice de B, entonces g(k) es un Σ_m^A-índice de un conjunto C tal que h(k) es un Σ_1^C-índice de B.

DEM.:

a)

$\Longrightarrow$: $B \in \Sigma^A_{m+1} \Longrightarrow \exists D (D \in \Pi^A_m \wedge B \in \Sigma^D_1) \Longrightarrow$

$(\bar{D} \in \Sigma^A_m \wedge B \in \Sigma^{\bar{D}}_1)$ (por TH 10) .

$\Longleftarrow$: $(C \in \Sigma^A_m \wedge B \in \Sigma^C_1) \Longrightarrow \exists z (C \in \Sigma^A_m \wedge B = W^C_z)$, con lo que se tiene para todo :

$$\xi \in B \Longleftrightarrow \xi \in W^C_z \Longleftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subset C \wedge D_v \subset \bar{C} \wedge \psi^{n+2}_z(\xi,u,v)\downarrow).$$

Por ser C un conjunto de la clase Σ^A_m, las relaciones $D_u \subset C$ y $D_v \subset \bar{C}$ pertenecen respectivamente a las clases Σ^A_m y Π^A_m. Puesto que $\psi^{n+2}_z(\xi,u,v)\downarrow$ es una relación de la clase $\Sigma^{\emptyset}_1$, también pertenece a Σ^A_1 (por TH 11). Así pues, por TH 8 y TH 9, $B \in \Sigma^A_{m+1}$.

b) Sea $B = W^C_z$, con lo que para todo se verifica

$$\xi \in B \Longleftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subset C \wedge D_v \subset \bar{C} \wedge \psi^{n+2}_z(\xi,u,v)\downarrow),$$

y sea f(z) un $\Sigma^{\emptyset}_1$-índice de la relación $\psi^{n+2}_z(\xi,u,v)\downarrow$ [†2].

---

†2 Puesto que la referida relación es recursivamente enumerable, puede construirse efectivamente una máquina ordinaria de Turing $M_{h(z)}$ tal que, colocada en la posición $\xi * u * v \underset{\uparrow}{*}$, verifique:
a) $M_{h(z)}$ termina parandose si y sólo si se cumple la relación;
b) A lo largo de la computación no se utiliza la parte de la cinta situada a la izquierda de la inscripción inicial.

Sea $M_{f(z)}$ la máquina obtenida a partir de $M_{h(z)}$ añadiendo para cada estado q la fila q # # q . Obviamente se tiene: $\exists t T^{\emptyset}_{n+2} f(z) \xi u v t \Longleftrightarrow \exists m \exists n (D_m \subset \emptyset \wedge D_n \subset N \wedge \psi^{n+4}_{f(z)}(\xi,u,v,m,n)\downarrow)$ $\Longleftrightarrow$ existen m, n tales que $M_{f(z)}$ termina parándose cuando parte de la posición $\# D_m \# D_n \# \xi * u * v \underset{\uparrow}{*}$ $\Longleftrightarrow$ $M_{h(z)}$ termina parándose cuando parte de la posición $\xi * u * v \underset{\uparrow}{*}$ $\Longleftrightarrow \psi^{n+2}_z(\xi,u,v)\downarrow$. La equivalencia prueba que f(z) es un $\Sigma^{\emptyset}_1$-índice de la relación en cuestión, siendo claramente f recursiva.

Por TH 11, a partir de f(z) puede calcularse efectivamente un Σ_1^A-índice de dicha relación †3. Por TH 9, a partir de j pueden encontrarse respectivamente un Σ_m^A-índice y un Π_m^A-índice de las relaciones $D_u \subset C$ y $D_v \subset \overline{C}$ (equivalentes a $\overset{u}{\underset{x=o}{\forall}} (x \notin D_u \vee x \in C)$ y $\overset{v}{\underset{x=o}{\forall}} (x \notin D_v \vee x \in \overline{C}))$ †4 . Por TH 9, pueden encontrarse efectivamente Σ_{m+1}^A-índices de las tres relaciones en cuestión. Finalmente, por TH 10.b.1.1 y b.1.6. se puede encontrar efectivamente un Σ_{m+1}^A-índice de B. Tal índice es, por definición, el valor de r(z, j).

c) Sea k un Σ_{m+1}^A-índice de B, con lo que

$\xi \in B \Longleftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \ldots T_m^A k \xi \eta y_{m+1}$. k es también un Π_m^A-índice del conjunto

$D = \{<\xi, y_1> / \forall y_2 \exists y_3 \ldots T_m^A k \xi \eta y_{m+1}\}$

y, en consecuencia (cfr. TH 7) también un Σ_m^A-índice de $\overline{D}$.

Sea z_1 tal que

$$\phi_{z_1}^M(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y <\xi, y> \in M \\ \uparrow & \text{en los demás casos ,} \end{cases}$$

con lo que $B = \{\xi / \exists y_1 <\xi, y_1> \in D\} = W_{z_1}^D$.

---

†3 De acuerdo con TH 11, basta encontrar un i tal que $f_\emptyset = \phi_i^A$. Puesto que $f_\emptyset$ es una función constante nula, habrá de verificarse $\forall x \exists u \exists v (D_u \subset A \wedge D_v \subset \overline{A} \wedge \psi_i^3(x,u,v) = 0)$. i puede, por tanto, ser elegido como el número de una máquina que contenga las filas 0 * r 1 , 1 * l 1, 1 l r 2, 2 * s 2 (donde r y s denotan los outputs "desplazar el campo de trabajo un lugar a la derecha" y "parar").

†4 Por ser $x \in D_u$ una relación recursiva, puede encontrarse efectivamente un $\Sigma_1^\emptyset$-índice de la misma y, a partir de él, un Σ_1^A-índice (ver †2 y †3).

Sea z_2 tal que $\psi_{z_2}(\Sigma,v,u) = \psi_{z_1}(\Sigma,u,v)$. Se tiene:

$$\Sigma \varepsilon B \Longleftrightarrow \Sigma \varepsilon W^{D}_{z_1} \Longleftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subset D \wedge D_v \subset \bar{D} \wedge \psi^{n+2}_{z_1}(\Sigma,u,v)\downarrow)$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \exists u (D_v \subset \bar{D} \wedge D_u \subset D \wedge \psi^{n+2}_{z_2}(\Sigma,v,u)\downarrow) \Longleftrightarrow \Sigma \varepsilon W^{\bar{D}}_{z_2} .$$

Así pues, z_2 es un $\Sigma^{\bar{D}}_1$-índice de B y k un Σ^{A}_{m}-índice de $\bar{D}$, con lo que las funciones recursivas buscadas vienen definidas por las igualdades: $g(k) = k$; $h(k) = z_2$.

EL OPERADOR 'JUMP'

Para todo $n \varepsilon N$ y todo conjunto $A \subset N$, el "jump" n-simo de A, que se denotará por $A^{n)}$, vendrá definido por las igualdades:

DF 15
$$A^{0)} = A$$
$$A^{n+1)} = \{x \,/\, x \varepsilon W^{A^{n)}}_{x}\}$$

Abreviatura: $A' = A^{1)}$.

TH 13 a) $\forall A (A' \varepsilon \Sigma^{A}_{1})$

b) $\exists z_o \forall A (A' = W^{A}_{z_o})$

DEM.:

Sea z_o tal que

$$\phi^{A}_{z_o}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi^{A}_{x}(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases} .$$

Se tiene:

$$x \varepsilon W^{A}_{z_o} \Longleftrightarrow x \varepsilon W^{A}_{x} \Longleftrightarrow x \varepsilon A' .$$

TH 14 $\forall A (A' \notin \Sigma^{A}_{0})$.

DEM.:

$$A' \varepsilon \Sigma_0^A \Longrightarrow \overline{A'} \varepsilon \Sigma_0^A \Longrightarrow \overline{A'} \varepsilon \Sigma_1^A \Longrightarrow \exists z (\overline{A'} = W_z^A),$$

de lo que se sigue la contradicción:

$$z \varepsilon A' \Longleftrightarrow z \varepsilon W_z^A \Longleftrightarrow z \varepsilon \overline{A'} \quad .$$

TH 15 Para todo A, B se verifica:

a) $B \varepsilon \Sigma_1^A \Longrightarrow B \varepsilon \Sigma_0^{A'}$

b) Existe una función recursiva h tal que para todo z_o

$$B = W_{z_o}^A \Longrightarrow f_B = \phi_{h(z_o)}^{A'} \quad (f_B = \text{función caract. de B}).$$

DEM.:

a) Sean z_o y g (g recursiva) tales que

$$B = W_{z_o}^A$$

$$\phi_{g(x)}^A(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{21}(x) \varepsilon W_{\sigma_{22}(x)}^A \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Sea además $y = \sigma_2(x, z_o)$. Se tiene:

$$g(y) \varepsilon A' \Longleftrightarrow g(y) \varepsilon W_{g(y)}^A \Longleftrightarrow z_o \varepsilon W_{g(y)}^A \Longleftrightarrow$$

$$\sigma_{21}(y) \varepsilon W_{\sigma_{22}(y)}^A \Longleftrightarrow x \varepsilon W_{z_o}^A \Longleftrightarrow x \varepsilon B \; ,$$

con lo que $x \varepsilon B \Longleftrightarrow g(\sigma_2(x, z_o)) \varepsilon A'$, lo que prueba que $B \varepsilon \Sigma_0^{A'}$.

b) Sea h una función recursiva que verifique:

$$\phi_{h(z)}^{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\sigma_2(x, z_o)) \varepsilon A' \\ 0 & \text{si } g(\sigma_2(x, z_o)) \not\varepsilon A' \end{cases} \quad .$$

Se tiene:

$x\varepsilon B \Longleftrightarrow g.\sigma_2(x,z_o)\varepsilon A' \Longleftrightarrow \phi^{A'}_{h(z_o)}(x) = 1$, lo que prueba que $f_B = \phi^{A'}_{h(z_o)}$.

CRL 15 a) $\forall A(A\varepsilon\Sigma^{A'}_0)$

b) $\exists z_1 \forall A(f_A = \phi^{A'}_{z_1})$.

DEM.:

a) es inmediato, pues $A\varepsilon\Sigma^A_1$.

b) Sea I tal que

$$\phi^A_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\varepsilon A \\ \uparrow & \text{si } x\not\varepsilon A \end{cases},$$

con lo que $A = W^A_I$. De TH 15 b se sigue que $f_A = \phi^{A'}_{h(I)}$, siendo I y h independientes de A.

TH 16 a) $\forall m \forall A(A^{m)}\varepsilon\Sigma^A_m)$

b) Existe una función recursiva g tal que, para todo $m>0$, $g(m)$ es un Σ^A_m-índice de $A^{m)}$.

DEM.:

a) $A^{0)} = A\varepsilon\Sigma^A_0$.

$A^p\varepsilon\Sigma^A_p$ (hipótesis de inducción) $\Longrightarrow A^{p+1)}\varepsilon\Sigma^A_{p+1}$ (por TH 12, pues $A^{p+1)}\varepsilon\Sigma^{A^{p)}}_1$.

b) Sea z_o el índice que verifica TH 13 b. Se tiene:

$x\varepsilon A' \Longleftrightarrow x\varepsilon W^A_x \Longleftrightarrow x\varepsilon W^A_{z_o} \Longleftrightarrow \exists t T^A_1 z_o x t$.

Así pues, $g(1) = z_o$.

Sea $g(p)$ un Σ^A_p-índice de $A^{p)}$. Puesto que $A^{p+1)} = W^{A^{p)}}_{z_o}$ $g(p+1) = r(z_o,g(p))$, donde r esla función recursiva definida en la demostración de TH 12 b.

TH 17 Para todo A, B, m se verifica:

a) $B\varepsilon\Sigma^{A}_{m+1} \Longleftrightarrow B\varepsilon\Sigma^{A^{m)}}_{1}$.

b) Existe una función recursiva f tal que para todo z, si z es un Σ^{A}_{m+1}-índice de B, entonces $B = W^{A^{m)}}_{f(z,m)}$.

c) Existe una función recursiva g tal que si $B = W^{A^{m)}}_{z}$, entonces g(z,m) es un Σ^{A}_{m+1}-índice de B †5.

DEM.:

a)

m = 0 : Trivial.

m = p>0:

$$B\varepsilon\Sigma^{A}_{p+1} \Longrightarrow \exists C(B\varepsilon\Sigma^{C}_{1} \wedge C\varepsilon\Sigma^{A}_{p}) \Longrightarrow \qquad \text{(por TH 12)}$$

$$\Longrightarrow \exists C(B\varepsilon\Sigma^{C}_{1} \wedge C\varepsilon\Sigma^{A^{p-1)}}_{1}) \qquad \text{(por la hip. ind.)}$$

$$\Longrightarrow \exists C(B\varepsilon\Sigma^{C}_{1} \wedge C\varepsilon\Sigma^{A^{p)}}_{0}) \qquad \text{(por TH 15)}$$

$$\Longrightarrow B\varepsilon\Sigma^{A^{p)}}_{1} \qquad \text{(por TH 11)}.$$

$$B\varepsilon\Sigma^{A^{p)}}_{1} \Longrightarrow \exists z_1(B = W^{A^{p)}}_{z_1}) \qquad \text{(por TH 10)}$$

$$\Longrightarrow B = \{\xi \,/\, \exists u \exists v(D_u \subset A^{p)} \wedge D_v \subset \overline{A^{p)}} \wedge \psi^{n+2}_{z_1}(\xi, u, v)\downarrow)\}$$

$$\Longrightarrow B\varepsilon\Sigma^{A}_{p+1} \qquad \text{(cfr. demostración de TH 12)}.$$

b)

m = 0 : f(z,o) = z, ya que $\exists y T^{A}_{1}zxy \Longleftrightarrow x\varepsilon W^{A}_{z}$.

---

†5 TH 17 es llamado a veces "teorema fuerte de la jerarquía". Es de notar que su demostración se apoya en los 16 teoremas previos.

$m = p>0$: Sea z un Σ^A_{p+1}-índice de B y sea $f(z,p) = z_p$.

Por la uniformidad de los teoremas TH 12, TH 15, TH 11 y TH 10 utilizados en la primera parte de la demostración de a) puede hallarse efectivamente un $\Sigma^{A^{p)}}_1$-índice de B. Tal índice es, por definición, el valor de $f(z, p+1)$.

c)

$m = 0$: $g(z,0) = z$, ya que $\exists y T^A_n z \, \Sigma \, y \Longleftrightarrow \Sigma \epsilon W^A_z$.

$m = p>0$: Sea z un $\Sigma^{A^{p)}}_1$ -índice de B. Por el teorema TH 10 $B = W^{A^{p)}}_z$. Por la hipótesis de inducción, puede calcularse efectivamente $g(z, p)$, i.e., un Σ^A_p-índice de B. Por TH 12 c, a partir de z y de $g(z, p)$ puede calcularse efectivamente un Σ^A_{p+1}-índice de B. Tal índice es, por definición, el valor de $g(z, p+1)$.

DIF 16 $A^\omega = \{ z \,/\, \sigma_{21}(z) \varepsilon A^{\sigma_{22}(z))} \}$.

TH 18 Para todo n y todo conjunto A se verifica:

a) $A^{n)} \underset{T}{\leq} A^\omega$,

b) $\neg(A^\omega \underset{T}{\leq} A^{n)})$.

DEM.:

a) Sea $z = \sigma_2(x,n)$. Se tiene:

$x \varepsilon A^{n)} \Longleftrightarrow \sigma_{21}(z) A^{\sigma_{22}(z))} \Longleftrightarrow z \varepsilon A^\omega \Longleftrightarrow \sigma_2(x,n) \varepsilon A^\omega$.

b) De $\exists A \exists n (A^\omega \underset{T}{\leq} A^{n)})$ se sigue por a) y TH 1 que $A^{n+1)} \underset{T}{\leq} A^{n)}$, en contradicción con TH 14.

DF 17 $A \underset{T}{<} B \Longleftrightarrow (A \underset{T}{\leq} B \wedge \neg(B \underset{T}{\leq} A))$.

De TH 13, TH 14 y TH 18 se sigue:

CRL 18 Para todo A se verifica:

$$A \underset{T}{<} A' \underset{T}{<} A^{2)} \underset{T}{<} \ldots\ldots \underset{T}{<} A^{\omega} .$$

REDUCIBILIDAD

Sean A, B dos subconjuntos cualesquiera de N.

DF 18 A es 1-reducible a B, lo que se denotará por $A \underset{1}{\leq} B$, si existe una función recursiva e inyectiva f que verifica:

(*) $\forall x (x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B)$.

DF 19 A es m-reducible a B, lo que se denotará por $A \underset{m}{\leq} B$, si existe una función recursiva f que verifica (*).

DF 20 $A \underset{m}{<} B \Longleftrightarrow (A \underset{m}{\leq} B \wedge \neg(B \underset{m}{\leq} A))$.

DF 21 $A \underset{1}{<} B \Longleftrightarrow (A \underset{1}{\leq} B \wedge \neg(B \underset{1}{\leq} A))$.

DF 22 Dos conjuntos A, B son T-equivalentes, lo que se denotará por $A \underset{T}{\equiv} B$, si A es recursivo en B y B es recursivo en A.

DF 23 Dos conjuntos A, B son m-equivalentes, lo que se denotará por $A \underset{m}{\equiv} B$, si A es m reducible a B y B es m-reducible a A.

DF 24 Dos conjuntos A, B son 1-equivalentes, lo que se denotará por $A \underset{1}{\equiv} B$, si A es 1-reducible a B y B es 1-reducible a A.

Trivialmente se verifica:

TH 19 Para conjuntos cualesquiera A, B

$$A \underset{1}{\leq} B \Longrightarrow A \underset{m}{\leq} B \Longrightarrow A \underset{T}{\leq} B .$$

DF 25 Dos conjuntos A, B son recursivamente isomorfos, lo que se denotará por $A \equiv B$, si existe una función recursiva y biyectiva f que verifica (*).

CRL 19 $A \equiv B \Longrightarrow A \underset{1}{\equiv} B \Longrightarrow A \underset{m}{\equiv} B \Longrightarrow A \underset{T}{\equiv} B$.

TH 20 Dos conjuntos 1-equivalentes son recursivamente isomorfos.

Una demostración de este teorema, debido a Myhill, puede verse en Rogers (1967), pp.85-86, o en Prida (1974), pp. 10-13.

DF 26 $A^* = \{x \ / \ \sigma_{21}(x) \varepsilon W^A_{\sigma_{22}(x)}\}$.

TH 21 Para todo A, los conjuntos A' y A* son recursivamente isomorfos.

DEM.:

Para todo x se tiene:

$x \varepsilon A' \Longleftrightarrow x \varepsilon W^A_x \Longleftrightarrow \sigma_{21}(\sigma_2(x,x)) \varepsilon W^A_{\sigma_{22}(\sigma_2(x,x))} \Longleftrightarrow$

$\sigma_2(x,x) \varepsilon A^*$,

lo que prueba que $A' \underset{1}{\leq} A^*$.

Sea f una función recursiva e inyectiva tal que

$$\phi^A_{f(x)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{21}(x) \varepsilon W^A_{\sigma_{22}(x)} \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases} .$$

Se tiene:

$x \varepsilon A^* \Longleftrightarrow f(x) \varepsilon W^A_{f(x)} \Longleftrightarrow f(x) \varepsilon A'$,

lo que prueba que $A^* \underset{1}{\leq} A'$. El teorema se sigue por TH 20.

TH 22 Para conjuntos cualesquiera A, B se verifica:

a) $B \in \Sigma_1^A \iff B \leq_1 A'$.

b) Existe una función recursiva h tal que para todo z, si $B = W_z^A$, entonces $B \leq_1 A'$ vía $\phi_{h(z)}$.

c) Existe una función recursiva g tal que para todo I, si $B \leq_1 A$ via ϕ_I, entonces $B = W_{g(I)}^A$.

DEM.:

a) Es consecuencia de b) y c).

b) Sea $B = W_z^A$ y sea g una f.r. inyectiva tal que

$$\phi^3_{g(w,z)}(x,u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi^3_z(w,u,v)\downarrow \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases} .$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} g(w,z)\varepsilon A' &\iff g(w,z)\varepsilon W^A_{g(w,z)} \\ &\iff \exists u\, \exists v (D_u \subset A \wedge D_v \subset \overline{A} \wedge \psi^3_{g(w,z)}(g(w,z),u,v)\downarrow) \\ &\iff \exists u\, \exists v (D_u \subset A \wedge D_v \subset \overline{A} \wedge \psi^3_z(w,u,v)\downarrow) \\ &\iff w\varepsilon W^A_z \iff w\varepsilon B, \text{ con lo que } B \leq_1 A' \text{ vía } g. \end{aligned}$$

Así pues, si h es una función recursiva que verifica $\phi_{h(z)}(x) = g(x,z)$, se cumple b).

c) Si $B \leq_1 A'$ via ϕ_I, entonces $\forall x(x\varepsilon B \iff \phi_I(x)\varepsilon A')$, con lo que, si z_o es el índice que verifica TH 13 b, se tiene:

$$\forall x(x\varepsilon B \iff \phi_I(x)\varepsilon W^A_{z_o}) .$$

Sea g una función recursiva e inyectiva tal que

$$\phi^A_{g(I)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_I(x) \in W^A_{z_o} \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases} .$$

Para todo x se tiene:

$$x \in B \iff \phi_I(x) \in W^A_{z_o} \iff x \in W^A_{g(I)} \text{ , q.e.d.}$$

CRL 22a a) $\forall A (A \leq_1 A')$

b) $\exists I \forall A (A \leq_1 A')$ vía ϕ_I.

DEM.:

a) Inmediato, pues $A \leq_T A$.

b) Sea z_1 tal que

$$\phi^A_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ \uparrow \text{ en los demás casos} \end{cases} .$$

Puesto que $A = W^A_{z_1}$, se sigue de TH 22 b que $A \leq_1 A$ vía $\phi_{h(z_1)}$, siendo h y z_1 independientes de A.

CRL 22b Para todo A se verifica:

$$A <_1 A' <_1 A^{2)} <_1 A^{3)} \ldots <_1 A^{\omega} .$$

DEM.:

Inmediato a partir de CRL 22a, TH 14, TH 19 y TH 18.

CRL 22c $A \leq_T B \Longrightarrow A' \leq_1 B'$.

DEM.:

$$A \leq_T B \Longrightarrow A' \in \Sigma^B_1 \Longrightarrow A' \leq_1 B' .$$

CRL 22d $A \leq_1 B \Longrightarrow A' \leq_1 B'$.

DEM.:

Inmediato a partir de CRL 22c y TH 19.

COMPLETITUD

DF 27 Para todo m>o, un conjunto B es Σ_m^A-completo si:

a) $B\varepsilon\Sigma_m^A$,

b) $\forall C(C\varepsilon\Sigma_m^A \Longrightarrow C\leq_1 B)$ †6 .

DF 28 Definición de conjunto Π_m^A-completo, dual de DF 27.

Abreviaturas:

Σ_m-completo en vez de $\Sigma_m^{\emptyset}$-completo.

Π_m-completo en vez de $\Pi_m^{\emptyset}$-completo.

Trivialmente se verifica:

TH 23 Para todo n, A, B

a) si B y C son Σ_n-completos, entonces $B\leq_1 C$;

b) si B y C son Π_n-completos, entonces $B\leq_1 C$.

CRL 23 Dos conjuntos Σ_n-completos o Π_n-completos son recursivamente isomorfos.

DEM.:

Inmediato a partir de TH 23 y TH 20.

TH 24 Para todo n>0 y todo conjunto A, $A^{n)}$ es Σ_n^A-completo.

DEM.:

Por TH 16, $A^{n)}\varepsilon\Sigma_n^A$. Además:

n = 1: Si $B\varepsilon\Sigma_1^A$, existe un x_o tal que $B = W_{x_o}^A$, con lo que para todo x se verifica:

$x\varepsilon B \Longleftrightarrow x\varepsilon W_{x_o}^A \Longleftrightarrow \sigma_2(x,x_o)\varepsilon A^*$. Puesto que $A^*\leq_1 A'$ (cfr. TH 21), $B\leq_1 A'$.

---

†6 Se llama aquí conjuntos Σ_n^A-completos a los que más precisamente habría que denominar conjuntos Σ_n^A-1-completos.

$n = p+1$: Si $B \varepsilon \Sigma^A_{p+1}$, por TH 12 existe un conjunto C tal que $C \varepsilon \Sigma^A_p$ y $B \varepsilon \Sigma^C_1$. Puesto que por la hipótesis de inducción C es 1-reducible $A^{p)}$, se sigue de TH 11 que $B \varepsilon \Sigma_1^{A^{p)}}$ y, por tanto, según TH 22, $B \leq_1 A^{p+1)}$.

CRL 24 Un conjunto B es Σ_m-completo si y solo si $B \equiv \emptyset^{n)}$.

CILINDROS

DF 29 $B \times C = \{ z \,/\, \sigma_{21}(z) \varepsilon B \wedge \sigma_{22}(z) \varepsilon C \}$.

DF 30 Un conjunto A es un cilindro si y sólo si existe un conjunto B tal que $A \equiv B \times N$.

TH 25 A es un cilindro si y sólo si para todo C se verifica:

$$(C \leq_m A \Longrightarrow C \leq_1 A)$$

DEM.:

$\Longrightarrow$:

(1) A es un cilindro (hipótesis)

(2) $C \leq_m A$ vía f (hipótesis)

(3) $\exists B \, \exists g (g$ biy. y rec. y $\forall x (x \varepsilon A \Longleftrightarrow \sigma_{21}.g(x) \varepsilon B))$ (1)

(4) $x \varepsilon C \Longleftrightarrow f(x) \varepsilon A \Longleftrightarrow \sigma_{21}.g.f(x) \varepsilon B$ (2),(3)

(5) Definición: $h(x) = \sigma_2(\sigma_{21}.g.f(x), x)$

(6) $\sigma_{21}.h(x) = \sigma_{21}.g.f(x)$ (5)

Con esto se tiene:

$x \varepsilon C \Longleftrightarrow \sigma_{21}.g.f(x) \varepsilon B$ por (4)

$\Longleftrightarrow \sigma_{21}.h(x) \varepsilon B$ por (6)

$\Longleftrightarrow \sigma_{21}.g.g^{-1}.h(x) \varepsilon B$

$\Longleftrightarrow g^{-1}.h(x) \varepsilon A$ por (3)

con lo que C es 1-reducible a A.

$\Longleftarrow$:

(1) $\forall B(B \leq_m A \Longrightarrow B \leq_1 A)$ (hipótesis)

(2) $A \times N \leq_m A$ (pues $z \varepsilon A \times N \Longleftrightarrow \sigma_{21}(z) \varepsilon A$)

(3) $A \times N \leq_1 A$ (1)(2)

(4) $A \leq_1 A \times N$ (pues $z \varepsilon A \Longleftrightarrow \sigma_2(z,0) \varepsilon A \times N$)

(5) $A \equiv A \times N$ (3)(4) (TH 20)

TH 26 Un conjunto A es un cilindro si y sólo si existe una función recursiva g tal que para todo x se verifica:

$(D_x \neq \emptyset \wedge D_x \subset A) \Longrightarrow g(x) \varepsilon A - D_x$

$(D_x \neq \emptyset \wedge D_x \subset \overline{A}) \Longrightarrow g(x) \varepsilon \overline{A} - D_x$

DEM.:

$\Longrightarrow$:

Sean B y f (f recursiva y biyectiva) tales que $A \equiv B \times N$ vía f, es decir:

(1) $\forall x(x \varepsilon A \Longleftrightarrow \sigma_{21}.f(x) \varepsilon B)$ (hipótesis)

Sean además:

(2) $D_u \neq \emptyset$ (hipótesis)

(3) $u_o = \mu z(z \varepsilon D_u)$ (definición)

(4) $n_o = \mu n(f^{-1}.\sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o), n) > u)$ (definición)

(obviamente existe n_o, al ser f^{-1} y σ_2 inyectivas)

Se tiene:

$D_u \subset A \Longrightarrow u_o \varepsilon A$ por (3)

$\Longrightarrow \sigma_{21}.f(u_o) \varepsilon B$ por (1)

$\Longrightarrow \sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o), n_o) \varepsilon B \times N$ por DF 29

$\Longrightarrow f^{-1}.\sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o), n_o) \varepsilon A$ pues $A = f^{-1}(B \times N)$

$\Longrightarrow f^{-1}.\sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o), n_o) \varepsilon A - D_u$. por (4)

Análogamente:

$D_u \subset \overline{A} \Longrightarrow u_o \varepsilon \overline{A}$ por (3)

$\Longrightarrow \sigma_{21}.f(u_o) \varepsilon \overline{B}$ por (1)

$\Longrightarrow \sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o),\ n_o) \varepsilon \overline{B} \times N = \overline{B \times N}$ por DF 29

$\Longrightarrow f^{-1}.\sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o),\ n_o) \varepsilon \overline{A}$ pues $\overline{A} = f^{-1}(\overline{B \times N})$

$\Longrightarrow f^{-1}.\sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o),\ n_o) \varepsilon \overline{A}-D_u$ por (4).

Así pues, la función buscada g viene definida por la igualdad

$$g(u) = f^{-1}.\ \sigma_2(\sigma_{21}.f(u_o),\ n_o).$$

$\Longleftarrow$:

Se demostrará que si existe una función recursiva g tal que para todo x verifica:

(1) $(D_x \neq \emptyset \wedge D_x \subset A) \Longrightarrow g(x) \varepsilon A-D_x$

(2) $(D_x \neq \emptyset \wedge D_x \subset \overline{A}) \Longrightarrow g(x) \varepsilon \overline{A}-D_x$,

entonces para todo C se verifica:

$C \leq_m A \Longrightarrow C \leq_1 A$,

con lo que A es un cilindro según TH 25.

En efecto, sea f tal que

(3) $C \leq_m A$ vía f.

Sea h la función:

$h(0) = f(0)$

$$h(x+1) = \begin{cases} f(x+1) & \text{si } f(x+1) \notin \{h(0),h(1),\ldots,h(x)\} \\ g(x_n) & \text{si } \begin{cases} f(x+1) \varepsilon \{h(0),h(1),\ldots,h(x)\} \text{ y} \\ D_{x_o} = \{f(x+1)\} \text{ y} \\ D_{x_{i+1}} = D_{x_i} \cup \{g(x_i)\} \text{ y} \\ n = \mu i(g(x_i) \notin \{h(0),\ldots,h(x)\}). \end{cases} \end{cases}$$

Ante todo demostraremos que h es una función total, para lo cual será suficiente probar:

(*) $\forall x \exists i (g(x_i) \notin \{h(0), h(1), \ldots, h(x)\}$.

Para ello se demostrará por inducción el siguiente

LEMA : Para todo x y todo n se verifica:

$$x+1 \varepsilon C \Longrightarrow (D_{x_n} \subset A \wedge g(x_n) \varepsilon A - D_{x_n})$$

$$x+1 \varepsilon \overline{C} \Longrightarrow (D_{x_n} \subset \overline{A} \wedge g(x_n) \varepsilon \overline{A} - D_{x_n}) \quad .$$

En efecto:

$$n = 0: \quad x+1 \varepsilon C \Longrightarrow f(x+1) \varepsilon A \Longrightarrow D_{x_o} \subset A$$

$$\Longrightarrow (D_{x_o} \subset A \wedge g(x_o) \varepsilon A - D_{x_o})$$

$$x+1 \varepsilon \overline{C} \Longrightarrow f(x+1) \varepsilon \overline{A} \Longrightarrow D_{x_o} \subset \overline{A}$$

$$\Longrightarrow (D_{x_o} \subset \overline{A} \wedge g(x_o) \varepsilon \overline{A} - D_{x_o}) \quad .$$

$$n = p+1: \quad x+1 \varepsilon C \Longrightarrow (D_{x_p} \subset A \wedge g(x_p) \varepsilon A - D_{x_p}) \text{ (hipót. induc.)}$$

$$\Longrightarrow (D_{x_{p+1}} \subset A \wedge g(x_{p+1}) \varepsilon A - D_{x_{p+1}}$$

$$x+1 \ \overline{C} \Longrightarrow (D_{x_p} \subset \overline{A} \wedge g(x_p) \varepsilon \overline{A} - D_{x_p}) \text{ (hipót. induc.)}$$

$$\Longrightarrow (D_{x_{p+1}} \subset \overline{A} \wedge g(x_{p+1}) \varepsilon \overline{A} - D_{x_{p+1}} \quad .$$

Del LEMA se sigue que

$$\forall x \, \forall n (g(x_n) \notin D_{x_n})$$

con lo que los elementos $g(x_o)$, $g(x_1)$, ... son todos distintos (pues $D_{x_n} = \{f(x+1), g(x_o), g(x_1), \ldots, g(x_{n-1})\}$), de donde se sigue (*).

A continuación se probará:

$$C \leq_1 A \text{ vía } h.$$

En efecto: De la definición de h se sigue que es recursiva e inyectiva. Para demostrar que para todo x se verifica

$$x \varepsilon C \Longleftrightarrow h(x) \varepsilon A$$

se considerarán tres casos.

a) $x = 0$

b) $x \neq 0$ y $f(x) \notin \{h(0), h(1), \ldots, h(x-1)\}$

c) $x \neq 0$ y $f(x) \varepsilon \{h(0), h(1), \ldots, h(x-1)\}$.

a) $0 \varepsilon C \Longleftrightarrow f(0) \varepsilon A \Longleftrightarrow h(0) \varepsilon A$

b) $x \varepsilon C \Longleftrightarrow f(x) \varepsilon A \Longleftrightarrow h(x) \varepsilon A$

c) $x \varepsilon C \Longrightarrow g(x_n) \varepsilon A$ (por el LEMA) $\Longrightarrow h(x) \varepsilon A$

$x \notin C \Longrightarrow g(x_n) \notin A$ (por el LEMA) $\Longrightarrow h(x) \notin A$.

TH 27 Para todo conjunto A, A^ω es un cilindro.

DEM.:

Por definición,

$$A^\omega = \{z / \ \sigma_{21}(z) \varepsilon A^{\sigma_{22}(z))} = \{z / \ \sigma_{21}(z) \varepsilon W^{A}_{\sigma_{21}(z)}{}^{\sigma_{22}(z)-1\ )} \} .$$

Para todo $n \neq 0$ se definirá: $u_o = \mu z (z \varepsilon D_u)$.

Sea h una función recursiva tal que

$$\phi^B_{h(u)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi^B_{\sigma_{21}(u_o)}(\sigma_{21}(u_o))\downarrow \\ \uparrow & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Sea M una máquina de Turing que contenga la fila $0 * * 0$ y sea $M_{g(u)} = M^u \, M_{h(u)}$, con lo que obviamente se verifica:

$\forall u (g(u) > u)$

$\forall B (\phi^B_{g(u)} = \phi^B_{h(u)})$.

Se tiene:

$$D_u \subset A^\omega \Longrightarrow u_o \varepsilon A^\omega \Longrightarrow \sigma_{21}(u_o)\, \varepsilon W^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{\sigma_{21}(u_o)} \Longrightarrow$$

$$\phi^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{h(u)} \text{ es total} \Longrightarrow \phi^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{g(u)} \text{ es total} \Longrightarrow$$

$$g(u)\, \varepsilon W^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{g(u)} \Longrightarrow g(u)\, \varepsilon A^{\sigma_{22}(u_o))} \Longrightarrow$$

$$\sigma_2(g(u),\ \sigma_{22}(u_o))\, \varepsilon A^\omega \ .$$

Además, puesto que

$$\forall x \forall y (\sigma_2(x,y) = 2^x(2y+1)-1) > x)$$

se tiene que

$$\sigma_2(g(u),\ \sigma_{22}(u_o)) > g(u) > u \ ,$$

con lo que

$$\sigma_2(g(u),\ \sigma_{22}(u_o)\, \varepsilon\, A^\omega - D_u \ .$$

Análogamente:

$$D_u \subset \overline{A^\omega} \Longrightarrow u_o \not\varepsilon A^\omega \Longrightarrow \sigma_{21}(u_o) \not\varepsilon W^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{\sigma_{21}(u_o)} \Longrightarrow$$

$$W^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{h(u)} = \emptyset \Longrightarrow \phi^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{g(u)} = \emptyset \Longrightarrow$$

$$g(u) \not\varepsilon W^{A^{\sigma_{22}(u_o)-1})}_{g(u)} \Longrightarrow g(u) \not\varepsilon A^{\sigma_{22}(u_o))} \Longrightarrow$$

$$\sigma_2(g(u),\ \sigma_{22}(u_o)) \not\varepsilon A^\omega \Longrightarrow \sigma_2(g(u),\ \sigma_{22}(u_o))\, \varepsilon\, \overline{A^\omega} - D_u \ .$$

Así pues, de acuerdo con TH 26, A^ω es un cilindro.

PRODUCTIVIDAD Y CREATIVIDAD

DF 31 Un conjunto A es productivo si existe una función recursiva parcial ψ tal que para todo x se verifica:

$$W_x \subset A \Longrightarrow (\psi(x)\downarrow \wedge \psi(x) \varepsilon A-W_x) \quad .$$

TH 28 Para conjuntos cualesquiera A, B se verifica: Si $A\varepsilon\Sigma_1$ y $A\cup B$ es productivo, entonces A es productivo.

DEM.:

Sea ψ una función productiva de $A\cup B$ y sea h una función recursiva tal que

$$W_{h(x)} = W_x \cup B \ .$$

Se tiene:

$$W_x \subset A \Longrightarrow W_{h(x)} \subset A\cup B \Longrightarrow \psi(x)\varepsilon(A\cup B)-W_{h(x)} = A\cup B-W_x\cup B= A\cap \overline{W}_x \cap \overline{B} \subset A-W_x \ .$$

DF 32 Un conjunto es creativo si pertenece a la clase Σ_1 y su complementario es productivo.

El siguiente teorema, debido a Myhill, es bien conocido:

TH 29 Un conjunto es creativo si y sólo si es Σ_1-completo.

DEM.:

Ver Prida (1974), pp. 14-15.

De TH 29 y CRL 23 se sigue inmediatamente:

CRL 29 Todos los conjuntos creativos son recursivamente isomorfos.

CLASES DE FORMULAS ARITMETICAS

El conjunto de fórmulas aritméticas se definirá a partir de un lenguaje basado en un alfabeto S con las siguientes clases de símbolos:

Variables: x, y, z, x_1, x_2, x_3, ...

Constantes: 0 (cero).

Funciones con un argumento: s (sucesor).

Funciones con dos argumentos: + (suma), . (producto).

Predicados: = (igualdad).

Simbolos lógicos: $\neg$ (negación), $\vee$ (disjunción), $\exists$(cuantificador existencial).

El conjunto T de terminos se definirá mediante las reglas:

r1 Todo símbolo de variable de S pertenece a T.

r2 $0 \varepsilon T$.

r3 Si $\tau \varepsilon T$, entonces $s\tau \varepsilon T$.

r4 Si $\tau_1 \varepsilon T$ y $\tau_2 \varepsilon T$, entonces $+\tau_1\tau_2 \varepsilon T$ y $\cdot\tau_1\tau_2 \varepsilon T$.

Abreviaturas:

$(\tau_1+\tau_2)$ es una abreviatura de $+\tau_1\tau_2$;

$(\tau_1\cdot\tau_2)$ es una abreviatura de $\cdot\tau_1\tau_2$.

A partir de T se define el conjunto F de fórmulas mediante las reglas:

r1 Si $\tau_1 \varepsilon T$ y $\tau_2 \varepsilon T$, entonces $=\tau_1\tau_2 \varepsilon F$

r2 Si $\alpha \varepsilon F$, entonces $\neg\alpha \varepsilon F$.

r3 Si $\alpha \varepsilon F$ y $\alpha \varepsilon F$, entonces $\vee\alpha\beta \varepsilon F$.

r4 Si $\alpha \varepsilon F$, entonces para toda variable x $\exists x\alpha \varepsilon F$.

Abreviaturas:

$(\tau_1 = \tau_2)$ es una abreviatura de $=\tau_1\tau_2$

$(\alpha+\beta)$ es una abreviatura de $+\alpha\beta$.

$(\alpha.\beta)$ es una abreviatura de $.\alpha\beta$.

$(\alpha \wedge \beta)$ es una abreviatura de $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

$(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$ es una abreviatura de $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$.

$\forall x\alpha$ es una abreviatura de $\neg\exists x\neg\alpha$.

Una valoración es una aplicación del conjunto de símbolos de variable de S en el conjunto de los números naturales.

Si v es una valoración, x un símbolo de variable y a un número natural, entonces v_x^a es la valoración:

$v_x^a(x) = a$

$v_x^a(y) = v(y)$ para toda variable y distinta de x.

Sean respectivamente **0**, **+**, **.** el número natural cero y las funciones suma y producto de números naturales.

El valor de un término τ en una valoración v es el número natural $v(\tau)$ definido por las igualdades:

Si $\tau \equiv 0$, entonces $v(\tau) = \mathbf{0}$.

Si $\tau \equiv x$ (x: símbolo de variable cualquiera), $v(\tau) = v(x)$.

Si $\tau \equiv s\rho$, entonces $v(\tau) = v(\rho) \mathbin{\mathbf{+}} 1$.

Si $\tau \equiv (\tau_1+\tau_2)$, entonces $v(\tau) = v(\tau_1) \mathbin{\mathbf{+}} v(\tau_2)$.

Si $\tau \equiv (\tau_1.\tau_2)$, entonces $v(\tau) = v(\tau_1) \mathbin{\mathbf{.}} v(\tau_2)$.

Sea I la interpretación "standard" del lenguaje definido (i.e.: la interpretación I tal que $I(0)$, $I(s)$, $I(+)$, $I(.)$ y $I(=)$ son respectivamente el número natural cero, las funciones sucesor, suma y producto de números naturales y el predicado de igualdad de números naturales).

El valor de una fórmula α en la interpretación "standard" I para la valoración v es el elemento $I_v(\alpha)$ del conjunto $\{v, f\}$ (verdadero, falso), definido por las igualdades:

$$\text{Si } \alpha \equiv (\tau_1 = \tau_2), \text{ entonces } I_v(\alpha) = \begin{cases} v & \text{si } v(\tau_1) = v(\tau_2) \\ f & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha \equiv \neg\beta, \text{ entonces } I_v(\alpha) = \begin{cases} v & \text{si } I_v(\beta) = f \\ f & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha \equiv (\beta \vee \gamma), \text{ entonces } I_v(\alpha) = \begin{cases} v & \text{si } I_v(\beta) = v \text{ ó } I_v(\gamma) = v \\ f & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha \equiv \exists x\beta, \text{ entonces } I_v(\alpha) = \begin{cases} v & \text{si } I_{v_x^a}(\beta) = v \text{ para algún } a \varepsilon N \\ f & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Sea C el conjunto de sentencias aritméticas (fórmulas cerradas de F). Obviamente se tiene para toda fórmula $\alpha\varepsilon C$ y para valoraciones cualesquiera v, v' que $I_v(\alpha) = I_{v'}(\alpha)$. Este valor común de una sentencia α en la interpretación "standard" I para cualquier valoración, será denotado por $I(\alpha)$.

El conjunto de sentencias aritméticas verdaderas V será definido mediante la igualdad:

DF 33 $\quad V = \{\alpha \,/ \alpha\varepsilon C \text{ y } I(\alpha) = v\}$

DF 34 $\quad F = C - V$ (conjunto de sentencias falsas)

Sea X un conjunto de axiomas de la aritmética y R un cierto conjunto de reglas de derivación. Sea $\vdash$ la relación de derivabilidad, i.e: $\vdash \alpha$ significa que la fórmula α es derivable a partir de X mediante las reglas de R.

Los conjuntos R y X se dejarán indeterminados, exigiendose únicamente la consistencia del sistema y que sean representables en él las relaciones recursivas, es decir que se verifique:

1) Para toda relación recursiva $P \subset N^n$ existe una fórmula aritmética α_P con n variables libres tal que para todo $\mathcal{E}$ se verifica:

$P\mathcal{E} \Longrightarrow \vdash \alpha_P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$\overline{P}\mathcal{E} \Longrightarrow \vdash \neg\alpha_P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$,

donde ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n son los representates formales de x_1, x_2, ..., x_n (i.e.: si $x_i = 3$, entonces ξ_i = sss0).

2) A partir de un índice de la función característica de P se puede encontrar efectivamente α_P (pueden verse detalles en Gödel (1931)).

DF 35 $D = \{\alpha / \ \alpha \varepsilon C$ y $\vdash \alpha\}$ (conjunto de sentencias derivables)

DF 36 $R = \{\alpha / \ \alpha \varepsilon C$ y $\vdash \neg\alpha\}$ (conjunto de sentencias refutables)

DF 37 $I = S - D - R$ (conjunto de sentencias indecidibles)

DF 38 $I_V = I \cap V$ (conjunto de sentencias indecidibles verd.)

DF 39 $I_F = I \cap F$ (conjunto de sentencias indecidibles falsas)

De la consistencia del sistema y del conocido teorema de incompletitud de Gödel se sigue que los conjuntos de sentencias aritméticas definidos pueden ser representados mediante el esquema:

```
<------- V ------><------- F ------->
|-------+---------+---------+-------|
<-- D --><-- Iv --><-- IF --><-- R -->
         <------- I ------->
```

Sea g una aplicación biyectiva y efectivamente computable del conjunto de las sentencias aritméticas en el de los números naturales (para detalles ver Gödel (1931)). La sentencia $g^{-1}(x)$ será denotada por α_x. En lo sucesivo se identificará un conjunto de sentencias A con el conjunto de números naturales $\{x \,/\, \alpha_x \varepsilon A\}$ y una fórmula α con $g(\alpha)$.

CLASES DE SENTENCIAS ARITMETICAS EN LA 1-REDUCIBILIDAD

TH 30 Los conjuntos V y I_V son cilindros.

DEM.:

Sea D_u el conjunto no vacío de fórmulas $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y sea f la función recursiva tal que

$$f(u) = (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$$

Obviamente se tiene:

$$D_u \subset V \Longrightarrow f(u) \varepsilon V - D_u$$

$$D_u \subset \overline{V} \Longrightarrow f(u) \varepsilon \overline{V} - D_u \ .$$

Así pues, por TH 26, V es un cilindro.

Igualmente se tiene:

$$D_u \subset I_V = I \cap V \Longrightarrow f(u) \in I \cap V = I_V \ .$$

Además, si $D_u \subset \overline{I}_V = D \cup F$ se tiene:

Caso I: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset D$. Entonces

$$f(u) = (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \varepsilon D \subset \overline{I}_V.$$

Caso II: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \not\subset D$. Entonces existe un i $(1 \leq i \leq n)$ tal que $\alpha_i \varepsilon F$, con lo que $f(u) \varepsilon F \subset \overline{I}_V$.

I_V es, pues, un cilindro.

TH 31 a) $V \equiv F$

b) $I_V \equiv I_F$

c) $D \equiv R$.

DEM.:

En los tres casos la función f tal que $f(\alpha) = \neg\alpha$ demuestra la 1-reducibilidad en ambos sentidos. El teorema se sigue de TH 20.

De TH 30 y TH 31 se sigue inmediatamente:

CRL 31 Los conjuntos F e I_F son cilindros.

El siguiente teorema es bien conocido:

TH 32 El conjunto D es $\Sigma_1^{\emptyset}$-completo.

DEM.: Ver Prida (1973). La prueba consiste en demostrar que D es creativo.

CRL 32 $D \equiv R \equiv \emptyset'$.

TH 33 El conjunto I de las fórmulas indecidibles es Π_1-completo.

DEM.:

Puesto que $D \in \Sigma_1$, $R \equiv D$ y $I = \overline{D \cup R}$, $I \in \Pi_1$.

Siendo D Σ_1-completo (cfr. TH 32) es también creativo (cfr. TH 29). Así pues (cfr. CRL 32), R es creativo y $\overline{R}$ productivo. Puesto que $\overline{R} = I \cup D$, de acuerdo con TH 28 I es productivo y, en consecuencia, $\overline{I}$ es creativo. Así pues, por TH 29, $\overline{I}$ es Σ_1-completo y, en consecuencia, I es Π_1-completo.

CRL 33 $I \equiv \overline{\emptyset'} \equiv \overline{D}$

TH 34 Para todo n y toda relación recursiva $R \subset N^n$ puede encontrarse efectivamente una fórmula aritmética con n variables libres $\alpha_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que para toda n-pla de números naturales $k_1, k_2, \ldots, k_n$ se verifica:

$$Rk_1k_2\ldots k_n \iff \alpha_R(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \varepsilon V,$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ son respectivamente los representantes formales de $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

DEM.:

Sea α_R el representante formal de R. Se tiene:

$$Rk_1\ldots k_n \Longrightarrow \vdash \alpha_R(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \Longrightarrow \alpha_R(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \varepsilon D \subset V$$

$$\overline{R}k_1\ldots k_n \Longrightarrow \vdash \neg\alpha_R(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \Longrightarrow \alpha_R(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \varepsilon R \subset \overline{V}.$$

DF 40 Una fórmula prénex es una fórmula aritmética con la forma $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\beta$, donde $Q_1, \ldots, Q_n$ son cuantificadores y β es una fórmula sin cuantificadores.

El siguiente teorema, cuya demostración es relativamente trivial, es perfectamente conocido:

TH 35 Para toda fórmula α puede construirse efectivamente una fórmula prénex con el mismo número de variables libres β tal que para todo $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ (representantes formales de números naturales) se verifica:

$$\alpha(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \varepsilon V \iff \beta(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \varepsilon V \quad .$$

TH 36 Para todo n se verifica: $\emptyset^{n)} \underset{m}{\leq} V$.

DEM.:

Por TH 16 b), para todo n puede encontrarse efectivamente un y tal que para todo x se verifica:

$$x\varepsilon\emptyset^{n)} \Longleftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \ldots T^{\emptyset}_n yxx_1 \ldots x_n \ .$$

Por la recursividad de $T^{\emptyset}_n$ puede hallarse efectivamente una fórmula α tal que para todo $y,k,k_1,k_2,\ldots,k_n$ se verifica:

$$T^{\emptyset}_n ykk_1 \ldots k_n \Longleftrightarrow \alpha(\upsilon,\ \kappa,\ \kappa_1,\ \ldots,\ \kappa_n)\varepsilon V$$

(cfr. TH 34). Así pues, para todo k se tiene:

$$k\varepsilon\emptyset^{n)} \Longleftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \ldots \alpha(\upsilon,\ \kappa,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\varepsilon V \ .$$

CRL 36 $\quad \emptyset^{\omega} \leq_{m} V$.

DEM.:

Por TH 36 para cada n puede encontrarse efectivamente una función recursiva g_n tal que $\emptyset^{n)} \leq_{m} V$ vía g_n. Sea f la función recursiva tal que para todo x

$$f(x) = g_{\sigma_{22}(x)}(\sigma_{21}(x)).$$

Se tiene:

$$x\varepsilon\emptyset^{\omega} \Longleftrightarrow \sigma_{21}(x)\varepsilon\emptyset^{\sigma_{22}(x))} \Longleftrightarrow g_{\sigma_{22}(x)}(\sigma_{21}(x))\varepsilon V \Longleftrightarrow$$

$f(x)\varepsilon V$.

TH 37 $\quad V \leq_{m} \emptyset^{\omega}$.

DEM.:

Sea α una fórmula cerrada cualquiera y sea $\beta \equiv Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\gamma$ una fórmula prénex equivalente a α (i.e., que verifique la equivalencia formulada en TH 35). Sea C el conjunto

$$\{x \ / \exists\, yQ_1x_1 \ldots Q_nx_n \exists z(\gamma \wedge x = x \wedge y = y \wedge z = z)\},$$

donde x, y, z son variables distintas de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Obviamente se tiene:

$\alpha\varepsilon V \Longrightarrow \beta\varepsilon V \Longrightarrow C\equiv N \Longrightarrow 0\varepsilon C$

$\alpha\not\varepsilon V \Longrightarrow \beta\not\varepsilon V \Longrightarrow C\equiv\emptyset \Longrightarrow 0\not\varepsilon C$.

Puesto que γ es una fórmula sin cuantificadores en la que aparecen exclusivamente las funciones recursivas +, ., s y el predicado recursivo =, puede encontrarse efectivamente un índice de la función característica de la relación ($\gamma \wedge x = x \wedge y = y \wedge z = z$) (para detalles ver Hermes (1965)) y a partir de él (por TH 4 b) un $\Sigma_1^{\emptyset}$-índice de la relación $\exists z(\gamma \wedge x = x \wedge y = y \wedge z = z)$. A partir de este índice puede encontrarse efectivamente un $\Sigma_m^{\emptyset}$-índice j de C para un determinado m (que depende de las alternancias en la sucesión de cuantificadores $\exists Q_1 Q_2 \dots Q_n \exists$ y que puede ser calculado efectivamente). A partir de j y m (por TH 17 b) puede encontrarse efectivamente un z tal que

$$C = W_z^{\emptyset^{m-1)}} .$$

Con esto se tiene:

$$\alpha\varepsilon V \Longleftrightarrow 0\varepsilon C \Longleftrightarrow 0\varepsilon W_z^{\emptyset^{m-1)}} \Longleftrightarrow \sigma_{21}(\sigma_2(0,z))\varepsilon W_{\sigma_{22}(\sigma_2(0,z))}^{\emptyset^{m-1)}}$$

$$\Longleftrightarrow \sigma_2(0,z)\varepsilon\emptyset^{m)} \Longleftrightarrow \sigma_2(\sigma_2(0,z),m)\varepsilon\emptyset^{\omega} .$$

CRL 37a $\quad V \equiv \emptyset^{\omega}$.

DEM.:

Por ser V y $\emptyset^{\omega}$ cilindros (cfr. TH 27 y TH 30), de CRL 36 y TH 37 se sigue por TH 25 que $V \underset{1}{\equiv} \emptyset^{\omega}$. El corolario se sigue por TH 20.

CRL 37b $\quad \forall n(V \not\in \Sigma_n \cup \Pi_n)$

DEM.: Inmediato, ya que lo contrario implicaría $\emptyset^{\omega} \underset{1}{\leq} V \underset{1}{\leq} \emptyset^{n+1)}$.

TH 38 $I_V \leq_1 V$.

DEM.:

Sea g una función recursiva tal que $D \leq_1 V$ vía g (la existencia de g es consecuencia de que $D \equiv \emptyset' \leq_1 \emptyset^{\omega} \equiv V$) y sea f la función recursiva $f(\alpha) = \alpha \wedge \neg g(\alpha)$. Se probará que $I_V \leq_1 V$ vía f. En efecto:

$\alpha \varepsilon I_V \Longrightarrow \alpha \varepsilon V$ y $\alpha \not\varepsilon D \Longrightarrow \alpha \varepsilon V$ y $g(\alpha) \not\varepsilon V \Longrightarrow (\alpha \wedge \neg g(\alpha)) \varepsilon V$.

$\alpha \not\varepsilon I_V \Longrightarrow \alpha \varepsilon D$ ó $\alpha \varepsilon F$;

$\alpha \varepsilon D \Longrightarrow \alpha \varepsilon V$ y $g(\alpha) \varepsilon V \Longrightarrow (\alpha \wedge \neg g(\alpha)) \varepsilon F \Longrightarrow (\alpha \wedge \neg g(\alpha)) \not\varepsilon I_V$;

$\alpha \varepsilon F \Longrightarrow \alpha \varepsilon F$ y $g(\alpha) \varepsilon F \Longrightarrow (\alpha \wedge \neg g(\alpha)) \varepsilon F \Longrightarrow (\alpha \wedge \neg g(\alpha)) \not\varepsilon I_V$.

TH 39 $V \leq_1 I_V$.

DEM.:

Sea β una fórmula indecidible verdadera fija y sea $f(\alpha) = (\alpha \wedge \beta)$. Se probará que $V \leq_1 I_V$ vía f. En efecto:

$\alpha \varepsilon V \Longrightarrow (\alpha \wedge \beta) \varepsilon V \Longrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \varepsilon D$ ó $(\alpha \wedge \beta) \varepsilon I_V) \Longrightarrow (\alpha \wedge \beta) \varepsilon I_V$ (pues $(\alpha \wedge \beta) \varepsilon D \Longrightarrow \beta \varepsilon D$, absurdo).

$\alpha \not\varepsilon V \Longrightarrow (\alpha \wedge \beta) \not\varepsilon V \Longrightarrow (\alpha \wedge \beta) \not\varepsilon I_V$.

CRL 39 $V \equiv I_V$.

Resumiendo los resultados obtenidos en TH 31, CRL 32 CRL 33, CRL 36 y CRL 39 se obtiene la siguiente

CONCLUSION:

$\emptyset^{\omega} \equiv V \equiv F \equiv I_V \equiv I_F$

$\emptyset' \equiv D \equiv R$

$\overline{\emptyset'} \equiv I$.

BIBLIOGRAFIA

Davis, M. 1958 — Computability and Unsolvability, Mc Graw Hill, New York.

Gödel, K. 1931 — Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38, pp.173-198.

Hermes, H. 1965 — Enumerability, Decidability, Computability, Springer-Verlag, Berlin.

Myhill, J. 1953 — Three contributions to recursive function theory, Actes du XIème congrés international de philosophie, Vol. XIV, North Holland Pub. Co., Bruxelles.

1955 — Creative sets, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Vol. I, pp. 97-108.

Prida, J.F. 1973 — Una prueba de los teoremas de Gödel y Rosser, Ed. por el Centro de Cálculo de la Univ. Complutense, Madrid.

1974 — Creatividad y Completitud, Ed. por el Centro de Cálculo de la Universidad Complutense, Madrid.

Rogers, H. 1967 — Theory of Recursive Functions and Effective Computability, Mc Graw Hill, New York.