BIBLIOTECA DE PROGRAMAS

PROGRAMA BMD03T PARA EL TRATAMIENTO DE SERIES TEMPORALES

Descripción General

Continuando con el tratamiento de series temporales, tan importantes en economía y otras ciencias, nos proponemos explicar en este número el programa BMDO3T; como continuación al --- BMDO2T; descrito en el número anterior de este boletín.

Este programa estima autoespectros, espectros cruzados y coherencias de series temporales estacionarias; y tiene como salida la siguiente:

1) Gráfico de la función de respuesta a la frecuencia (opcional)
2) Gráfico de la ventana de frecuencias de las estimaciones de la potencia espectral (opcional)-
3) Potencia espectral para cada serie
4) Gráfico conjunto de la potencia y frecuencia opcional
5) Gráfico conjunto del logaritmo de la potencia-- y la frecuencia (opcional)
6) Amplitud, fase y coherencia del espectro para-- cada par de series
7) Matrices del espectro cruzado en forma comleja, en formato de entrada para, su tratamiento posterior, si se desea, por el programa BMDO4T.
8) Datos filtrados (opcional)
9) UCLA Brain Research Institute (BRI) salida en-- cinta binaria para MERGE (opcional)

Procedimiento computacional

Como se sabe FILTRO es una función lineal móvil de la serie. El resultado de aplicar un filtro con pesos a_n a la serie en el tiempo viene dado por:

$$\sum_{n=-w}^{w} An\ X_{t+n}$$

siendo w la semilongitud del filtro

Paso 1.a (Construcción de un filtro de paso lento)

Si se desea un filtro de paso lento el usuario debe especificar LOW en la tarjeta PROBLEM; un radio de decimación d y posiblemente la semilongitud del filtro w sobre una tarjeta -- PREFILTER. Si w no es especificado, entonces se supone que -- w=12d. Los pesos del filtro, a_{-w}, $a_{-w+1},\ldots,$ a_w, son cons -- truídos como sigue:

$$\text{Si} \qquad K = \left[{}^{w}/d\right] - 2 \qquad \text{entonces}$$

$$a_j = \frac{1+\cos(\pi m/w)}{4w} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi(K+{}^1/2)j/w)}{\operatorname{sen}(\ j/2w)} \qquad \text{si } j \neq 0$$

$$\text{y} \qquad a_o = (K+{}^1/2)/W$$

haciendo $a_{-j} = a_j$; y siendo m, la mínima potencia de 2 que supera al número de datos en la serie N.

La lista de la función de respuesta a la frecuencia co---

mienza con:

$$f=(\left[w/d\right] -3)\ S'/2w$$

y termina en la frecuencia

$$f=\left[w/d\right]\ S'/2w$$

donde S' es el número de muestras observadas por unidad de tiempo (razón de la muestra inicial). La frecuencia de Nyquist después de la decimación es fn=S'/2d. Con w=12d, se da una lista próxima en longitud a fn/4.

Frecuencia de NYQUIST

A menudo una sucesión de observaciones y_t, está igualmente espaciada en el tiempo como una sucesión de observaciones de un proceso con parámetro continuo, por ejemplo, temperatura medida cada hora y nivel de agua medido cada día. Estas observaciones, las podemos representar por $y_t=y(kt), t=\ldots,-1,0,1,\ldots$ donde k es el intervalo de tiempo. La función de covarianza del proceso con parámetro discreto es:

$$Ey_t y_{t+h} = Ey(tk)y(tk+hk)=\sigma(hk)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda hk dF(\lambda)=$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{(2j-1)\pi/k}^{(2j+1)\pi/k}\cos\lambda hk dF(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\nu+2\pi j)h dF\left(\frac{\nu+2\pi j}{k}\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu h \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} dF\left(\frac{\nu + 2\pi j}{k}\right)\right\}$$

Si suponemos que $F(\lambda)$ es absolutamente continua con densidad $f(\lambda)$, entonces se verifica que:

$$f_k(\nu) = \frac{1}{k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu + 2\pi j}{k}\right) = \frac{1}{k} f\left(\frac{\nu}{k}\right) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{\nu + 2\pi j}{j}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{\nu - 2\pi j}{k}\right)\right] = \frac{1}{k} f\left(\frac{\nu}{k}\right) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{2\pi j + \nu}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{2\pi j - \nu}{k}\right)\right] \qquad -\pi \leq \nu \leq \pi$$

es la densidad espectral del proceso $\{y_t\}$. El peso dado a la frecuencia $\nu/2\pi$ en el proceso con parámetro de tiempo discreto, es la suma de los pesos dados a las frecuencias $\nu/2k\pi$, $(2\pi-\nu)/2k\pi$, $\frac{2\pi+\nu}{2k\pi}$

por ejemplo, supongamos que la temperatura es medida cada hora -. El período de 4 horas corresponde a la frecuencia $1/4$ y $\nu = \pi/2$. Del proceso continuo se obtienen contribuciones de las frecuencias $\frac{1}{4}$, $1-\frac{1}{4} = 5/4$, $2-\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, ..., ésto es, períodos $4, 4/_3, 4/_5, 4/_7, 4/_9, \ldots$. Este efecto es llamado doblez o frecuencia del espectro, y $1/_{2k}$ es llamado doblez o frecuencia de Nyquist.

Paso 1b (Construcción del filtro de Ormsby especificado por el usuario).

Si el usuario desea un filtro de Ormsby, entonces ha especificado ORM, en la tarjeta PROBLEM, y posiblemente un radio dedecimación d, y una semilongitud del filtro w, sobre una tarjeta PREFILTER. También en las tarjetas del eje-X y eje-Y ha especificado una sucesión de puntos $(x_1,y_1), (x_2,y_2),\ldots,(x_e,y_e)$.

Se construye un filtro infase, cuya función de respuesta a la frecuencia es una aproximación por mínimos cuadrados al camino poligonal que une los puntos $(x_1,y_1),\ldots,(x_e,y_e)$. La coordenada X denota frecuencia, y la coordenada Y denota la respuesta deseada. Si $x_1 > 0$ ó $x_e < f'_n$, entonces la respuesta deseada se supone que es cero para frecuencias inferiores a x_1 y superiores a x_e. Se usan las siguientes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{2\, f'n} \sum_{i=1}^{l-1} (y_{i+1} + y_i)\ (x_{i+1} - x_i)$$

y para $j=1,2,\ldots,w$

$$a_j = a_{-j} = \frac{1}{f'_n} (y_e \operatorname{sen}(ajx_e) - y_1 \operatorname{sen}(ajx_1))/aj +$$

$$+\frac{1}{f_n'}\sum_{i=1}^{l-1} q_i\left(\cos(aj\,x_{i+1})-\cos(aj\,x_i)\right)/a^2j^2$$

donde $a=\pi/f_n'$ y $q_i=(y_{i+1}-y_i)/(x_{i+1}-x_i)$

Si la semilongitud del filtro, w, no es especificada por-el usuario, se supone que w=50. Si no se especifica el radio de--decimación entonces se supone que

$$d=\left[f_n'/x_e\right]$$

Este es el mayor radio de decimación, que deja a la fre--cuencia de Nyquist resultante f_n, al menos tan grande como el va--lor de más alta frecuencia x_e.

Paso 1c (Grafo de la función de respuesta del filtro)

Si el usuario desea un grafo de la función de respuesta --del filtro, se forma la serie

$$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_w, 0, a_w, \ldots, a_1.$$

Se elige el número de ceros, para que la longitud total h de la serie sea la mínima potencia de dos mayor o igual que 4w. Se obtiene la transformada de Fourier finita, $\bar{a}_k$ de esta serie--y se dibuja un gráfico conjunto de los valores $\bar{a}_k$ y de las frecuencias $f_k=ks'/h$ para $k=0,\ldots,h/2$.

Paso 2 Si el usuario desea un gráfico de las estimaciones de la potencia espectral de la ventana de frecuencias, ésto se produce--obteniendo la transformada de Fourier finita de la ventana de tiempo. Los pesos w_t usados para la ventana de tiempo son dados por:

$$W_t = \begin{cases} 0'5\,(1-\cos(\pi(t-\frac{1}{2})/r) & t=1,\ldots,r \\ 1 & t=r+1,\ldots,N-r \\ 0'5\,(1-\cos(\pi(N-t+\frac{1}{2})/r)) & t=N-r+1,\ldots,N \end{cases}$$

donde $r=\left[N/10\right]$. Esta serie de pesos se completa con ceros hasta un total de m elementos, donde m es la mínima potencia de dos- mayor o igual a N.

Sea $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{m-1}$ la transformada de Fourier finita - de la serie resultante. Sea

$$W_k = C \sum_{t=-d/2}^{d/2} \left| \bar{W}_{t+k} \right|^2$$

donde $d = m/2b$

$$C = \left(s(d+1)\sum_{t=1}^{N} W_t^2\right)^{-1} \quad y \quad \sum_{t=1}^{N} W_t^2 = N - \tfrac{5}{4}r$$

Siendo b el número de bandas de frecuencias; (b es una potencia- de 2, que satisfaga $4 \le b \le m/4$)

Los valores W_k son dibujados conjuntamente con las fre cuencias $f_k=ks/m$ para $k=o,1,\ldots,3d$.

Paso 3 Si se desea el filtrado, éste se realiza al leer la serie. Cada $x_1,...,x_n$, es filtrada y decimada para producir una serie $\bar{x}_1,...,\bar{x}_n$ donde

$$\bar{X}_t = \sum_{j=-W}^{W} a_j \, X_{(t-1)d+j+W+1}$$

El número de muestras después del filtrado N; viene dado en función del número de muestras anteriores al filtrado N' por la fórmula:

$$N = \left[\frac{N' - (2W+1)}{d}\right] + 1$$

Si no se desea el filtrado, entonces es $N=N'$ y $\bar{X}_t=X_t$

Paso 4 Después del filtrado, si se desestacionariza cada serie X_t, sustrayendo su regresión lineal ésta se transforma en:

$$\bar{X}_t = X_t - \bar{X} - \beta(t-\bar{t})$$

donde

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t \qquad \bar{t} = \frac{1}{2}(N+1)$$

$$\beta = \frac{\sum_{t=1}^{N} t X_t - \frac{1}{2}N(N+1)\bar{X}}{\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{4}N(N+1)^2}$$

La serie resultante x_t es multiplicada por la ventana del tiempo w_t, definida en el paso 2 para generar una nueva serie $x_t = w_t \bar{x}_t$. Cada una de estas series se completa al final -- con ceros, hasta que cada una tiene un total de m elementos.

Las transformadas de Fourier de las series resultantes- son computadas de la forma siguiente:

Sean x_t e y_t $t=0,\dots,m-1$ dos series. La transformada- de Fourier de la serie compleja $z_t = x_t + i\ y_t$ es obtenida mediante una subrutina. Si representamos por $\bar{z}_t$ la transformada de- Fourier de z_t; y por $\bar{x}_t, \bar{y}_t$ las transformadas de x_t, y_t obtenemos:

$$2\ \bar{x}_t = \bar{z}_t + \bar{z}^*_{m-t} \qquad\qquad 2\bar{y}_t = \frac{1}{i}\left(\bar{z}_t - \bar{z}^*_{m-t}\right)$$

que son evaluadas únicamente para $t=0,1,\dots,m/_2$.
Aquí $\bar{z}^*_t$ es el complejo conjugado de $\bar{z}_t$.

<u>Paso 5</u> Sea $\bar{x}_{ti}$ la t-sima componente de la transformada de-- Fourier de la i-sima serie. Las estimaciones del espectro cruzado son obtenidas por la fórmula:

$$p_{ijk} = \frac{c}{4} \sum_{t=(k-\frac{1}{2})d}^{(k+\frac{1}{2})d} \bar{X}_{ti}\,\bar{X}^*_{tj}$$

donde $i = 1 \text{ -- } p\ ;\ j = i, \text{ -- }, p\ ;\ k = 0, \dots, b\ ;\ d = m/_{2b}$

$c = \left(S(d+1)\sum_{t=1}^{N} W_t^2\right)^{-1}$; S es la razón muestral después del filtrado y b (una potencia de 2) es el número de - bandas especificado por el usuario.

Las correspondientes frecuencias son

$$f_k = ks/2b \quad ; \quad k = 0, --, b$$

El número aproximado de grados de libertad es

$$df = N/b$$

<u>Paso 6</u> El auto-espectro de cada serie

$$p_{ik} = p_{iik}\ cal_i^2 \ , \quad i = 1 -- p \ ; \quad k = 0, --, b$$

y las correspondientes frecuencias f_k son escritas. Cal_i es el- factor de calibración para la i-sima serie. Si la tarjeta de calibración no es usada, se toma cali=1.0. Si se desea, el gráfico conjunto de la potencia y (ó) el logaritmo de la potencia con la frecuencia, éste se imprime para cada serie.

Los parámetros del espectro cruzado son:

$$\text{Amplitud} = |p_{ijk}|\ Cal_i\ Cal_j$$

$$\text{Fase} = 180 \arg(p_{ijk}) / \pi$$

$$\text{Coherencia} = |p_{ijk}| / \sqrt{p_{ik}\, p_{jk}}$$

y las correspondientes frecuencias f_k son escritas para cada $i<j$ y todo k. Si el usuario lo desea, las b+1 matrices complejas -

pxp del espectro cruzado

$$P_k = (P_{ijk})$$

son escritas fila a fila sobre una unidad de cinta FORTRAN, usando un formato 30A4. Para obtener P_{ijk} para $i > j$ se usa la relación $P_{ijk} = P^*_{ijk}$. Esta cinta, que es especificada en las columnas 51,52 de la tarjeta PROBLEM, puede ser usada como entrada del programa BMD04T.

La cinta de salida binaria UCLA BRI para MERGE; cuando es pedida en la tarjeta PARAMETER, es un duplicado de la salida impresa del espectro y del espectro cruzado con las siguientes diferencias:

Las cintas de salida en formato MERGE, tienen valores de intensidad espectral y espectro cruzado doble al de las cantidades impresas.

BIBLIOGRAFIA

1) BINGHAM, C.; GODFREY M.D. and TUKEY J.W.
Techniques of Power Spectrum Estimation. Princeton University, Institute for Advanced Studies, and Bell Telephone Laboratories.

2) ANDERSON
The statistical Analysis of Time Series. Wiley.

3) BMD
Biomedical Computer Programs.
University of California Press, 1973.

Miguel Sánchez García
Biblioteca de Programas