APLICACIONES DE LA INTERPOLACION A LA REPRESENTACION DE FUNCIONALES LINEALES SOBRE UN SUBESPACIO DE DIMENSION FINITA DE C (Q).

Por P. Diaz Muñoz y M. Sánchez Marcos.

0.- INTRODUCCION

Sea C(Q) el espacio de las funciones complejas continuas en un subconjunto compacto Q de un espacio topológico y P un subespacio vectorial n-dimensional de C(Q). Sea L una forma lineal definida sobre P. La formula de interpolación (Shapiro (1971, p. 38)) demuestra que se pueden encontrar n puntos $x_1, \ldots, x_n$, (dependientes de L), y n constantes $a_1, \ldots, a_n$ de forma que

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \; p(x_i) \qquad p \in P \tag{0.1}$$

y además

$$\|L\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \tag{0.2}$$

En este trabajo demostraremos primeramente que si P es un subespacio de Tchebicheff en Q la representación (0.1) se cumple para cualquier n-upla $x_1 \ldots x_n$ de puntos de Q. Posteriormente demostraremos que aun cuando P no sea de Tchebicheff se puede encontrar un conjunto $x_1 \ldots x_n$ independientes de L tales que se verifique la representación (0.1). Tanto en un caso como en otro se tendrá a cambio de esta mejora que

$$\|L\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \tag{0.3}$$

en lugar de la igualdad que aparece si consideramos $x_1 \ldots x_n$ dependientes de L.

Estas representaciones aparte de que permiten reducir cualquier problema general la interpolación a uno de interpolación puntual con un sistema de nodos fijo, pueden ser también útiles en el estudio de la integración numérica.

1.- Definiciones y Resultados Previos

Omitiremos demostraciones de los resultados que aparecen en esta sección, estas se podran encontrar implicita o explicitamente en Daviso (1963, p. 2).

1.1.- Interpolación (enunciado general)

Definición 1.1

Sea P un subespacio n-dimensional de C(Q), g un elemento de C(Q) y $L_1, \ldots, L_n$ funcionales lineales definidas sobre C(Q). Decimos que un elemento p de P interpola a g si se tiene:

$$L_i(g) = L_i(p) \qquad i = 1, \ldots n \qquad (1.1)$$

Teorema 1.1.- Si las restricciones de $L_1, \ldots, L_n$ a P forman una familia independiente se tiene,(a) el problema de la interpolación admite solución única para cualquier elemento de G(Q).(b) Existe una base $p_1^\circ, \ldots P_n^\circ$ de P tal que el elemento interpolador de g viene definido por la fórmula:

$$P = \sum_{i=1}^{n} L_i(g)\, P_i^\circ \qquad (1.2)$$

1.2.- Interpolación puntual

Según $x_1, \ldots, x_n$ puntos de Q si consideramos en particular los funcionales

$$L_i(f) = f\,(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n \quad f \in C(Q), \qquad (1.3)$$

la condición de que p P sea elemento interpolador de un elemento g de C(Q) se puede escribir en la forma

$$g(x_i) = p(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (1.4)$$

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema 1.1.

Teorema 1.2.- Sea $p_1, \ldots.\ p_{..}$ una base de P, el problema de interpolación puntual con respecto a los puntos $x_1, \ldots x_n$ tiene solución única para cualquier elemento de G(Q) si el determinante

$$\left| p_i(x_j) \right| \qquad (1.5)$$

es distinto de cero.

1.3.- Sistemas de Tchebicheff.

Es en general conveniente que P sea tal que el problema de interpolación puntual tenga solución única cualesquiera que sean los puntos x_1, ..., x_n. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.2 .- P_1, ..., P_n es un sistema de Tchebicheff en un subconjunto $S \subset Q$ si el determinante (1.5) es distinto de cero para cualquier n-upla de puntos distintos de S. El subespacio P generado por $P_1, \ldots, P_n$ se denomina subespacio de Tchebicheff.

Obviamente se tiene:

Teorema 1.3.- Para un subespacio de Tchebicheff el problema de interpolación puntual admite solución y única cualesquiera que sean los puntos x_1, ..., x_n de S. El siguiente resultado da una caracterización útil de los sitemas de Tchebicheff.

Teorema 1.4.- $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es un sistema de Tchebicheff en S sii no existe ningún elemento no nulo en P con n o más ceros en S.

Ejemplos (a) $\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ es un sistema de Tchebicheff en cualquier intervalo de la recta real.

(b) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es un sistema de Tchebicheff en cualquier intervalo de la recta real.

(c) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ es sistema de Tchebicheff en el intervalo $[0, 2\pi]$

2.- El Operador Interpolación

A lo largo de esta sección supondremos que el problema de interpolación tiene solución y única para cualquier elemento de C(Q).

Definimos el operador:

$$I : C(Q) \longrightarrow P$$

que a cada elemento de C(Q) asocia su elemento interpolador. Es facil ver que P es una aplicación lineal suprayectiva. Además se tiene:

Teorema 2.1.- Si L_1, ..., L_2 son continuos, el operador I también lo es.

Demostración: Sea $g \in C(Q)$, en virtud del teorema 1.1 tenemos

$$\| I(g) \| = \| \sum_{i=1}^{n} L_i(g) P_i^{\circ} \| \quad \sum_{i=1}^{n} |L_i(g)| \; \| P_i^{\circ} \| = (\sum_{i=1}^{n} \| L_i \| \; \| P_i^{\circ} \|) \; \| g \|$$

por lo tanto tenemos que P es continua y además:

$$\|I\| \quad \sum_{i=1}^{n} \|L_i\| \quad \|P_i^{\circ}\| \quad . \qquad (2.1)$$

3.- Rrepresentación de Funcionales sobre un Subespacio de Dimensión Finita de C(Q).

3.1.- Caso en que P es de Tchebicheff

Teorema 3.1.- Sea P de Tchebicheff sobre Q y sea $x_1, \ldots, x_n$ un subconjunto cualquiera de puntos de Q. Dado un funcional L definido sobre P, existen n constantes $a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$L_p = \sum_{i=o}^{n} a_i \; P(x_i) \qquad \forall\, p \varepsilon P \qquad (3.1)$$

Demostración: En virtud de la definición de sistemas de Tchebicheff se tiene que los funcionales definidos sobre P

$$L_i(P) = P(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad p \varepsilon P \qquad (3.2)$$

forman una base de P* (dual de P). Por tanto L es combinación lineal de los L_i, es decir, existen constantes $a_1, \ldots, a_n$ tales que:

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i \qquad (3.3)$$

y por tanto se tiene (3.1).

En el caso en que el subespacio P no es de Tchebicheff no se puede obtener la representación (3.1) para puntos cualesquiera. El siguiente teorema demuestra sin embargo que para cualquier subespacio de dimensión finita existe un conjunto de n puntos para los cuales tal representación es posible.

Teorema 3.2.- Sea $P_1, \ldots, P_n$ una base de P. Se tiene:
(a) Existen n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en Q tales que ningún elemento de P distinto de cero se anula en todos esos puntos a la vez.
(b) Existen n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en Q y n constantes $a_1, \ldots, a_n$ tales que para cualquier funcional L definido sobre se tiene (3.1) y además:

$$\|L\| \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad L \varepsilon P^* \qquad (3.4)$$

Demostración:

(a) Supongamos que $x_1, \ldots, x_n \; cQ$

$$\Phi \; (x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} P_1(x_1) & \ldots\ldots\ldots & P_1(x_n) \\ P_n(x_1) & \ldots\ldots\ldots & P_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

Tendremos en particular que las funciones:

$$\Phi \; x_1 \ldots x_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} P_1(x_1) & \ldots\ldots\ldots & P_1(x_{n-1}) & P_1(x) \\ P_n(x_1) & \ldots\ldots\ldots & P_n(x_{n-1}) & P_n(x) \end{vmatrix} =$$

$$= M_1 P_1(x) + \ldots + M_n P_n(x)$$

serán identicamente nulas cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n-1$. Al se los P_i linealmente independientes esto implica que:

$$M_1 = M_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = M_n = 0 \qquad x_1, \ldots, x_{n-1}$$

en particular:

$$M_n = \begin{vmatrix} P_1(x_1) & \ldots\ldots & P_1(x_{n-1}) \\ P_{n-1}(x_1) & \ldots\ldots & P_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall \, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

repitiendo el mismo procedimiento n-1 veces llegamos a:

$$P_1(x) = 0 \qquad \forall \; x \varepsilon Q$$

lo que contradice el hecho de que los P_i sean linealmente independientes.

Por tanto existen $x_1, \ldots, x_n$ puntos de Q tales que:

$$\begin{vmatrix} P_1(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & P_1(x_n) \\ P_n(x_1) & \ldots\ldots\ldots\ldots & P_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

y esto es equivalente a que no existe ningún elemento en P que se anule a la vez en todos los puntos $x_1, \ldots, x_n$

(b) Se demuestra facilmente utilizando el conjunto de puntos $x_1, \ldots, x_n$ obenidos en (a).