SUCESIONES ALEATORIAS SEGUN KOLMOGOROFF Y MARTIN LÖF.

Por Luis Fariñas

LISH, Marsella.

El problema de dar una definición matemática del azar ha sido el objeto de numerosas investigaciones después de los primerros trabajos de Von Moises, pero es recientemente cuando Kolmogoroff y Martin Lof nos dan definiciones del azar recientemente satisfactorias.

Kolmogoroff trata sucesiones binarias finitas (palabras sobre el alfabeto 0,1 y considera como aleatoria toda palabra x cuyo cálculo es de "complejidad" maximal entre todas las palabras teniendo la misma longitud que x.

Martin Lof trata las sucesiones finitas e infinitas, a las cuales aplica ciertos test. Es decir, asocia a cada sucesión finita un nivel de aceptabilidad que es el nivel de significación minimal de los tests que ella satisface, y una sucesión infinita es considerada aleatoria (no aleatoria) si la cota superior de los de aceptabilidad de sus segmentos iniciales finitos es estrictamente inferior a 1. (igual a 1).

Dichas definiciones son consideradas satisfactorias en la medida que los conceptos que ellas utilizan pueden ser definidos intrínsecamente (complejidad relativa a una función universal optimal, en los trabajos de Kolmogoroff, test universal en los de Martin Lof), sin embargo estas definiciones pueden ser criticadas. En efecto, entendiendo por "propiedad del azar" una propiedad tal que el conjunto de sucesiones que la satisfacen tienen medida 1 (para la medida producto, donde cada coordenada es igual a 1 o a cero con probabilidad 1/2), se puede demostrar que numerosas propiedades de este tipo no son satisfechas por el conjunto de sucesiones asociadas a dichas definiciones. Para ello es suficiente, como indica Martin Lof, utilizar propiedades hiperaritméticas.

I. Recursividad

1.a. *Funciones recursivas.*

Consideramos para todo $k \in \mathbb{N}$, y todo i inferior o igual a k las aplicaciones y los esquemas siguientes:

a. La aplicación sucesor, $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x)=x+1$ para todo $x \in \mathbb{N}$

b. La aplicación proyección, I_i,k: $\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$, $I_i,k(x_1,\ldots x_k)=x_i$ para todo $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{N}$

c. La aplicación cero, $c_k: \mathbb{N}^k \longrightarrow N$, $c_k(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{N}^k$

d. Esquema de recurrencia.

Sea f una aplicación, $f: \mathbb{N}^k \longrightarrow N$ y g una aplicación, $g: \mathbb{N}^{k+2} \longrightarrow \mathbb{N}$; diremos que la aplicación $h, h: \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por el esquema siguiente:

i. $h(0,x_1,\ldots\ldots,x_k)=f(x_1,\ldots\ldots x_k)$

ii. $h(y\ \ 1,x_1,\ldots\ldots,x_k)=g(y,h(y,x_1,\ldots\ldots\ldots,x_k),x_1,\ldots\ldots,x_k)$

es obtenida a partir de f y g por recurrencia.

e. Esquema de composición.

Sean $f_1,\ldots,f_m$ aplicaciones de $\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ y g una aplicación, $g: \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$; diremos que una aplicación $h, h: \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por el esquema siguiente:

i. $h(x_1,\ldots\ldots,x_m)=g(f_1(x_1,\ldots\ldots,x_k),\ldots,f_m(x_1,\ldots\ldots,x_k))$

es obtenida a partir de $f_1,\ldots,f_m$, y g por composición.

Def. 1

La función $f, f: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva primitiva, si puede ser obtenida a partir de las aplicaciones sucesor,- proyección y cero por un número finito de operaciones de recurrencia y de composición.

.b. *Funciones recursivas parciales.*

f. Esquema de minimización.

Sea f una función recursiva, $f: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$; diremos - que la función $h, h: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ obtenida por el siguiente- esquema:

i. $h(x_1,\ldots,x_k) = {}_y(f(y,x_1,\ldots,x_{k-1}))$, donde ${}_y(f(y,x_1,\ldots,x_{k-1}))$

es el más pequeño y tal que $f(y,x_1,\ldots,x_{k-1})=0$,

es obtenida a partir de f por minimización.

Def. 2

La función $f, f: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva parcial, si - puede ser obtenida a partir de las aplicaciones sucesor, proyección y cero por un número finito de operaciones de recurrencia, composición y minimización.

Def. 3

La función $f, f: \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ es universal, si para toda función $g, g: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ recursiva parcial, existe un i tal que $f(i,x_1,\ldots,x_k)=g(x_1,\ldots,x_k)$ para todo $x_1,\ldots,x_k$

Th. 1. Para todo número natural n, existe una función recursiva parcial que es universal para las funciones recursivas- parciales de $\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$.

Def. 4.

Un conjunto es recursivo, si su función característica es recursiva.

Def. 5.

Un conjunto es recursivamente enumerable si es la imagen- de una función recursiva parcial.

II. Sucesión aleatoria según Kolmogorff

Estudiaremos las palabras sobre el alfabeto $X= 0,1$ es - decir las sucesiones binarias finitas. Sea X^* el monoide - libre sobre X. Si x X^*, (x) designara la longitud de x (número de símbolos que constituyen x). Sea Λ la palabra vacía. Codificamos X^* en N de la forma siguiente:

Λ	-	0	
0	-	1	
1	-	2	
00	-	3	
01	-	4	etc...

Identificaremos cada palabra x con su código.

Complejidad según Kolmogoroff

Def. 6.

Sea h una función recursiva parcial, $h: N \quad N$. La complejidad de la palabra

$x \quad X^*$ relativa a h será:

$$K_h(x)= \begin{cases} \min l(p) & : \quad h(p)=x \\ \infty & , \text{ si } \forall \; p \in X^*, \; h(p) \neq x \end{cases}$$

De igual forma se introduce la noción de complejidad condicional.

Def. 7.

Sea h una función recursiva parcial, $h: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$. La complejidad de la palabra x condiciona a una palabra y dada, y relativa a h será:

$$K_h(x/y) = \begin{cases} \min\ l(p) & : h(p,y)=x \\ \infty & \text{si } \forall\ p \in X^*,\ h(p,y) \neq x \end{cases}$$

Th. 2.

Existe una función g, recursiva parcial, tal que para toda función recursiva parcial h, $K_g(x/y)\ \ K_h(x/y)+\lambda,\ \forall x \in X^*$, donde la constante λ depende de h y de g pero no de x, ni de y.

Dem.

Sea r, $r: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una biyección recursiva, Π_1 y Π_2 las funciones coordenadas (recursivas), $r(\Pi_1(z),\Pi_2(z))= z, \forall z \in \mathbb{N}$.

Sea $f(i,p,y)$ una función universal para las funciones recursivas parciales de dos argumentos.

Definimos $g(z,y)=f(\Pi_1(z),\Pi_2(z),y)$. Sea h una - función recursiva parcial con dos argumentos e índice i, $h(p,y)=f(i,p,y)\ \forall\ p,\ y \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $K_h(x/y)=p_i$, donde p_i es un programa tal que $h(p_i,i)=x$, y $\ell(p_i)= \ell i$.

Hacemos $z=r(i,p_i)$, luego:

$$g(z,y)=g(r(i.p_i),y)=f(\Pi_1(i,p_i),\ \Pi_2(i,p_i),z)$$

$g(z,y)=f(i,p_i,y)=h(p_i,y)=x$

De lo cual deducimos:

$$K_g(x/y) \leq \ell(z) \leq \ell(r(i,p_i)) \leq \ell(i)+\ell(p_i) \leq \ell(i)+\ell_i$$

$$K_g(x/y) \leq K_h(x/y)+\ell(i) \leq K_h(x/y)+\lambda$$

donde λ es independiente de x y de y.

III. Sucesiones aleatorias según Martin Lof.

Inspirándose en consideraciones estadísticas Martin Lof se propone evaluar el carácter aleatorio de una sucesión binaria $x \in X^*$ por medio de una serie de tests V_i con niveles de significación α_i, decrecientes, operando sobre los segmentos iniciales de x.

Consideramos un conjunto $V \subset \mathbb{N} \times X^*$ y definimos para $\forall m \in \mathbb{N}$ $V_m = \{x, (m,x) \in V\}$. V define un tests según Martin Lof así:

i. V es recursivamente enumerable.

ii. $V_{m+1} \subset V_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

iii. el número de palabras de longitud n contenidas en V_m es 2^{n-m}

La condición iii. traduce que V_m es la región de rechazo de un test de nivel de significación $1-2^{-m}$. La condición ii. traduce la inclusión habitual en estadística, de las regiones de rechazo de niveles diferentes.

Martin Lof demuestra el resultado siguiente.

Th. 3.

Existe un test V tal que para todo test U, $V_{m+c} \subset U_m$,

$m=1,2,\ldots$.

donde c es una constante (dependiendo de U y de V).

Un tal test es llamado universal. Para un test universal V, Martin Lof, define el nivel de significación $m(x)$ de una sucesión $x \in X^*$ de la forma siguiente:

$$m(x) = \max_{x \in V_m} m$$

Esto puede ser traducido como: la hipótesis de que x haya sido producido por un proceso de Bernouilli es rechazada al nivel de significación $1-2^{-m(x)}$ (y aceptada al nivel $1-2^{1-m(x)}$).

Una sucesión $x \in X^\infty$ es aleatoria según Martin Lof sii., relativamente a un test universal,

$$\lim_{n \to \infty} \sup m(x(n)) = M(x) < \infty$$

donde $x(n)$ designa el segmento inicial de longitud n de x.

Esto corresponde a un nivel de significación estadístico de $1-2^{-M(x)}$ estrictamente inferior a 1.

Observamos que el conjunto $V^0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m \, X^{\infty(*)}$

de sucesiones rechazadas por el test V es de medida nula, y no depende de la elección del test universal, por el Th.3. La relación entre las dos definiciones propuesta viene asegurada por el teorema siguiente.

Th. 4.

Existe una constante c tal que

$|\ell(x)-K_{f_0}(x/\ell(x)-m(x))| \leq c \; \forall x \in X^*$ donde $m(x) = \max_{x \in V_m} m$ para un test universal V, K_{f_0} es la complejidad (Kolmogoroff) relativa a una función optimal f_0.

BIBLIOGRAFIA

Chaitin, G. (1975) - *Theory*, J.A.C.M. 22, 329-340.

Church, A. (1940) - *On the concept of a random sequence with Restricted Resources.* Inf. and Control, 23, 301-312.

Fariñas, L. - *Suites aléatoires au sens de Martin-Lof.* Nota-L.I.S.H.

Loveland, D. (1969) - *On the Minimal program complexity measure.* A.C.M. Sym. on Theory of compu--ting. 61-66.

Martin-Lof, P. (1966) - *The Definition of Random Sequences.* Inf. Control, 9, 602-619.

Martin-Lof, P. (1970) - *On the notion or randomness, Intui--tionism and proof Theory,* North-Ho--lland.

Shoenfield (1967) - *Mathematic Logic.* Massachussets, Addison Wesley.

*Notamos $V_m X^\infty$ el conjunto de sucesiones infinitas cuyo segmento inicial de longitud m pertenece a V_m.