GENERALIZACION DEL TEOREMA DE LA FORMA NORMAL DE KLEENE AL CASO DE LA RECURSIVIDAD RELATIVA

Por José F. Prida

En el presente artículo se parte de la definición de recursividad relativa introducida en Prida & Orejas (1976) y, modificando la prueba del teorema de la forma normal de Kleene dada en Hermes (1965), se demuestra una versión generalizada del mismo para el caso de la recursividad parcial relativa.

La referida generalización del teorema de Kleene permite dar una ventajosa redefinición de $\phi_x^{n,A}$ (función parcial con n argumentos, recursiva en A, de índice x) a partir de una única función recursiva primitiva con un argumento y de los predicados T_n^A, también redefinidos.

Nomenclatura

$\sigma_n(x_1,\ldots,x_n)$	cfr. Hermes 1965, p. 78.
$\sigma_{nk}(x)$	id., p. 78.
$\exp(x,y)$	id., p. 77.

MAQUINAS DE TURING GENERALIZADAS

Sea N el conjunto de los números naturales. El conjunto finito no vacío $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, será denotado por D_u, siendo

$$u = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \ldots + 2^{x_n} .$$

El conjunto vacío se denotará por D_0.

La noción de máquina de Turing concebida como conjunto de cuádruplas q i v q' (estado, símbolo del alfabeto, reacción de la máquina, nuevo estado) será modificada en la siguiente forma:

i) El alfabeto consta del único símbolo "1" . Un campo vacío sera denotado indistintamente por "0" o por "*". Los números naturales serán representados por "1", "11", ...

ii) Durante la computación, solo puede ser modificada la parte de la cinta situada a la derecha de un determinado campo, denotado por "0". Cuando el campo de trabajo es el 0 y la reacción de la máquina es "desplazar el campo de trabajo un lugar hacia la izquierda", la máquina se para.

iii) Al comienzo de la computación, en la parte de la cinta situada a la izquierda del campo 0 aparecen escritos dos números naturales u, v, separados por un campo vacío.

iv) La máquina admite cuádruplas del tipo $q\ i\ q_1\ q_2$, que se interpretan como el siguiente conjunto de instrucciones:

"Cuando el estado es q y el símbolo escrito sobre el campo de trabajo es i, proceder de la siguiente forma:

1) Si $i = 0$ e inmediatamente a la izquierda del campo de trabajo aparece escrito el número n y $n \varepsilon D_u$, se pasa al estado q_1.

2) Si $i = 0$ e inmediatamente a la izquierda del campo de trabajo aparece escrito el número n y $n \varepsilon \overline{D_u} \cap D_v$, se pasa al estado q_2.

3) En los demás casos, se sigue en el estado q (ciclo).

T^A-COMPUTABILIDAD

DF 1 Una función parcial con n argumentos ψ es T^A-computable (Turing-computable en A) si existe una máquina generalizada de Turing M tal que para toda n-pla de argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se verifica:

1) Si $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$, entonces existen naturales u, v tales que:

a) $D_u \subset A$

b) $D_v \subset \overline{A}$

c) La máquina M partiendo del estado cero, de la

inscripción $* u * v * x_1 * x_2 * \ldots * x_n \underline{*} * * \ldots$,
siendo el campo inicial el subrayado, se acaba parando al cabo de un cierto número de pasos en la posición
$* u * v * x_1 * x_2 * \ldots * x_n * \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underline{*}$.

2) Si $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\uparrow$, entonces para todo u, v tales que $D_u \subset A$ y $D_v \subset \overline{A}$, la máquina N nunca se para cuando parte de la configuración descrita en 1) c) †1.

TH 1 La función carácteristica de un conjunto cualquiera A es T^A-computable.

Dem.: Trivial.

RECURSIVIDAD RELATIVA

DF 2 Una función parcial es recursiva en el conjunto A si es derivable a partir de la función característica de A, de la función constante nula de cero argumentos, de la función sucesor y de las funciones de proyección, mediante las reglas de sustitución, inducción y minimalización (ver Hermes 1965, pp. 60 y siguientes).

---

†1 Cuando $A \subset N^n$, $n \neq 1$, la anterior definición presupone la identificación del conjunto A con $\{\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) / \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \varepsilon A\}$ (cfr. Hermes 1965, p. 78).

A partir de TH 1, mediante métodos combinatorios bien conocidos, puede demostrarse sin dificultad:

TH 2 Toda función parcial recursiva en un conjunto A es T^A-computable.

RECURSIVIDAD EN A DE LAS FUNCIONES T^A-COMPUTABLES

Para demostrar que toda función parcial T^A-computable es recursiva en A, seguiremos un camino análogo al recorrido en Hermes 1965, modificando las funciones relacionadas con el proceso de computación de una máquina de Turing allí definidas, para adaptarlas al caso de la más amplia noción de computabilidad introducida aquí.

4.1 Número de Gödel de una máquina

Sea M la máquina con m estados

$$\left|\begin{array}{cccc} q_1 & 0 & r_1 & s_1 \\ q_1 & 1 & r_2 & s_2 \\ \cdots\cdots & & & \\ q_m & 1 & r_{2m} & s_{2m} \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} r_i \varepsilon \{r, 1, s, 0, 1, q_1, q_2, \ldots, q_m\} \\ s_i \varepsilon \{q_1, q_2, \ldots, q_m\} \end{array}$$

Haciendo corresponder respectivamente a los símbolos r (derecha), 1 (izquierda), s (stop), 0, 1, q_1, q_2, ..., q_m los números 1, 2, ..., m+5, la máquina M puede ser identificada con la matriz numérica

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \dots & \\ a_{2m} & b_{2m} \end{matrix}\right| \quad , \qquad \begin{matrix} a_i \varepsilon \{1,\ 2,\ \dots,\ m+5\} \\ b_i \varepsilon \{6,\ 7,\ \dots,\ m+5\} \end{matrix}$$

donde a_i (resp. b_i) es el número asignado a r_i (resp. s_i). Si p_{n-1} denota el n-simo número primo, haremos corresponder a M el número

$$g(M) = \prod_{j=1}^{2m} p_{\sigma_2(j,1)}^{a_j} \cdot p_{\sigma_2(j,2)}^{b_j} \quad ,$$

con lo que, si $g(M) = x$, entonces

$a_i = \exp(\sigma_2(i,1),\ x))$

$b_i = \exp(\sigma_2(i,2),\ x)$.

Sea T el predicado unitario tal que Tx se verifica si y sólo si existe una máquina M tal que $x = g(M)$. Claramente se tiene:

$$Tx \Longleftrightarrow \exists_{1}^{x} m \ \exists_{\sigma_{2m}(1,1,\dots,1)}^{\sigma_{2m}(x,x,\dots,x)} a \ \exists_{\sigma_{2m}(1,1,\dots,1)}^{\sigma_{2m}(x,x,\dots,x)} b \ [x =$$

$$\prod_{i=1}^{2m} p_{\sigma_2(j,1)}^{\sigma_{2m,j}(a)} \cdot p_{\sigma_2(j,2)}^{\sigma_{2m,j}(b)} \ \wedge \ \forall_{i=1}^{2m} i (1 \leqslant \sigma_{2m,i}(a) \leqslant m+5 \ \wedge$$

$$\forall_{i=1}^{2m} i (6 \leqslant \sigma_{2m,i}(b) \leqslant m+5)] \ ,$$

lo que prueba la recursividad primitiva de T.

Con el fin de establecer una correspondencia biunívoca entre máquinas de Turing y números naturales, definiremos la función recursiva primitiva h mediante las igualdades:

$$h(0) = \mu x Tx$$

$$h(n+1) = \mu x (Tx \wedge \overset{n}{\underset{0}{\forall}} y (x \neq h(y))).$$

La recursividad primitiva de h es consecuencia de que, si M es una máquina cualquiera, entonces para todo n se verifica que $h(n) \leq g(M^{n+1})$.

DF 33 Se denotará por M_x la máquina de número h(x).

Así pues, por definición, se tiene: $g(M_x) = h(x)$.

4.2 Número de Gödel de una inscripción

Prescindiendo de la parte de la inscripción situada a la izquierda del campo cero, se hará corresponder a ésta el número

$$b = \prod_{i=0}^{\infty} P_i^{s} \quad ,$$

donde s es el símbolo (0 ó 1) escrito sobre el campo i.

4.3 Número de Gödel de una configuración

El número k de una configuración (a, b, c), donde a es el campo de trabajo, b el número de la inscripción y c el número del estado, será por definición $\sigma_3(a,b,c)$.

4.4 Funciones relacionadas con el proceso de cálculo de de una máquina de Turing

En el presente apartado se definirán en primer lugar funciones análogas a las A, B, C de Hermes 1965 (cfr. p. 107), que respectivamente definen a partir de x, u, v, a, b, c, el campo de trabajo, la inscripción y el estado de la máquina M_x que siguen a la configuración (a, b, c).

Para ello observemos que la fila relevante de M_x (cuyo número de Gödel es h(x)) será

$$| \; c \quad i \quad a_{2c+i \dot{-} 11} \quad b_{2c+i \dot{-} 11} \; | \equiv$$

$$| \; c \quad i \quad \exp(\sigma_2(2c+i \dot{-} 11),\ 1),\ h(x)) \quad \exp(\sigma_2(2c+i \dot{-} 11),\ 2),\ h(x))$$

donde i es el símbolo escrito en el campo de trabajo, con lo que i = exp(a, b).

Así pues, si definimos

$$h_1(a,b,c,x) = \exp(\sigma_2(2c+\exp(a,b) \dot{-} 11,\ 1),\ h(x))$$

$$h_2(a,b,c,x) = \exp(\sigma_2(2c+\exp(a,b) \dot{-} 11,\ 2),\ h(x)),$$

la referida fila relevante será

$$| \; c \quad \exp(a,\ b) \quad h_1(x,\ a,\ b,\ c) \quad h_2(x,\ a,\ b,\ c) \; |.$$

Sea E_0 el predicado con cuatro argumentos tal que E_0 abcx se verifica si y sólo si la configuración (a,b,c) es una configuración final para M_x. Puesto que

$$E_0\ abcx \iff (h_1(x,a,b,c) = 3 \lor (a = 0 \land h_1(x,a,b,c) = 2))$$

E_0 es recursiva primitiva. E igualmente lo será el predicado E definido por: $Exk \iff E_0\ \sigma_{31}(k)\ \sigma_{32}(k)\ \sigma_{33}(k)\ x$.

Con esto se tiene:

Si E_0abcx, entonces $A(a,b,c,x) = a$.

Si $\neg E_0abcx$, entonces

$$A(a,b,c,x) = \begin{cases} a & \text{si } h_1(a,b,c,x) \geqslant 3 \\ a+1 & \text{si } h_1(a,b,c,x) = 1 \\ a \dot{-} 1 & \text{si } h_1(a,b,c,x) = 2 \end{cases}$$

Si E_0abcx, entonces $B(a,b,c,x) = b$. Si $\neg E_0abcx$,

$$B(a,b,c,x) = \begin{cases} b \cdot \dfrac{p_a^{h_1(a,b,c,x)-4}}{p_a^{\exp(a,b)}} & \text{si } 4 \quad h_1(a,b,c,x) \quad 5 \\ b & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Para definir la función c, que determina el nuevo estado, introduciremos previamente un predicado M y una función W_0 con las propiedades:

Si y es el número de una inscripción, entonces Myz se verifica si y sólo si sobre el campo z de la inscripción y está escrito un 1.

Si y es el número de una inscripción, sobre el campo z está escrito un cero e inmediatamente a la izquierda de dicho campo aparece escrita una sucesión de n+1 unos seguida de un cero, entonces $W_0(y,z) = n$.

De lo anterior se sigue que M y W_0 pueden ser definidas de la siguiente forma:

$$Myz \iff \exp(z,y) = 1$$

$$W_0(y,z) = z \dot{-} \mu_{0}^{z \dot{-} 1} x \, (\neg Myx \wedge \forall_{x+1}^{z \dot{-} 1} tMty) \dot{-} 2 \, .$$

Con esto se tiene:

Si E_0abcx, entonces $C(a,b,c,x,u,v) = c$.

Si $\neg E_0abcx$, entonces

$$C(a,b,c,x,u,v) = \begin{cases} h_2(a,b,c,x) & \text{si } h_1(a,b,c,x) \leqslant 5 \\ h_1(a,b,c,x) & \text{si } (h_1() > 5 \wedge W_0(b,a) \varepsilon D_u) \\ h_2(a,b,c,x) & \text{si } (h_1() > 5 \wedge W_0(b,a) \varepsilon \overline{D}_u \cap D_v) \\ c & \text{si } (h_1() > 5 \wedge W_0(b,a) \varepsilon \overline{D_u \cup D_v}) \end{cases}$$

Por sustitución en A, B, C de los argumentos a, b, c por $\sigma_{31}(k)$, $\sigma_{32}(k)$ y $\sigma_{33}(k)$ obtenemos las funciones:

$$A'(x,k) = A(\sigma_{31}(k),\ \sigma_{32}(k),\ \sigma_{33}(k),\ x)$$

$$B'(x,k) = B(\sigma_{31}(k),\ \sigma_{32}(k),\ \sigma_{33}(k),\ x)$$

$$C'(x,k,u,v) = C(\sigma_{31}(k),\ \sigma_{32}(k),\ \sigma_{33}(k),\ x,\ u,\ v)\ .$$

Igualmente, mediante sustitución en W_0 de los argumentos a, b por sus valores expresados en función de k, definiremos:

$$W(k) = W_0(\sigma_{32}(k),\ \sigma_{31}(k))\ .$$

Tras esto se definirá una función F tal que, si k es una configuraciín de M_x, $F(x,k,u,v)$ sea la configuración siguiente, en el supuesto de que sobre la parte izquierda de la cinta esten escritos los números u, v.

Obviamente se tendrá:

$$F(x,k,u,v) = \sigma_3(A'(x,k),\ B'(x,k),\ C'(x,k,u,v)),$$

con lo que $Exk \Longrightarrow F(x,k,u,v) = k$.

Definamos finalmente una función con n+4 argumentos K, tal que $K(x,x_1,x_2, \ldots, x_n,u,v,t)$ sea la configuración que alcanza M_x al cabo de t pasos cuando parte del estado inicial, de la inscripción $* \; u * v * x_1 * x_2 * \ldots * x_n \underline{*} \ldots$ y del campo de trabajo subrayado (cfr. Hermes 1965, pp. 108 -110). Se tendrá:

$$K(x,x_1,\ldots,x_n,u,v,0) = \sigma_3(a_0,b_0,c_0)$$

$$K(x,x_1,\ldots,x_n,u,v,t+1) = F(x,K(x,x_1,\ldots,x_n,u,v,t),u,v),$$

donde

$$a_0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 2n$$

$$b_0 = \frac{\prod_{i=0}^{x_1+x_2+\ldots+x_n+2n} p_i}{p_0 \cdot p_{x_1+2} \cdot p_{x_1+x_2+4} \cdot \ldots \cdot p_{x_1+x_2+\ldots+x_n+2n}}$$

$$c_0 = 6 \; .$$

4.5 Función y predicados universales

Sea ψ una función parcial con n argumentos T^A-computable y sea M_x una máquina que computa ψ. De acuerdo con DF 2 se tiene para toda n-pla de argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (que abreviaremos por $\mathfrak{X}$):

$$\psi(\mathfrak{X})\downarrow \Longrightarrow \exists u \, \exists v \, \exists t \, \exists k(D_u \subset A \wedge D_v \subset \overline{A} \wedge K(x,\mathfrak{X},u,v,t)=k \wedge Ekx)$$

$$\psi(\mathcal{E})\uparrow \Longrightarrow \forall u \forall v \forall t \forall k((D_u \subset A \wedge D_v \subset \bar{A} \wedge K(x,\mathcal{E},u,v,t) = k) \Longrightarrow \neg Ekx)$$

Definiendo el predicado con n+2 argumentos T_n^A, recursivo en A, mediante la equivalencia

$$T_n^A x \mathcal{E} z \Longleftrightarrow (D_{\sigma_{41}(z)} \subset A \wedge D_{\sigma_{42}(z)} \subset \bar{A} \wedge$$

$$K(x,\mathcal{E},\sigma_{41}(z),\sigma_{42}(z),\sigma_{43}(z)) = \sigma_{44}(z) \wedge E\sigma_{44}(z)x),$$

se tiene:

(*) $\psi(\mathcal{E})\downarrow \Longleftrightarrow \exists z T_n^A x \mathcal{E} z$.

Además, si $\psi(\mathcal{E})\downarrow$ y z es un número natural cualquiera que satisface la relación $T_n^A x \mathcal{E} z$, se tiene que $\psi(\mathcal{E}) = W(\sigma_{44}(z))$

Denotando por U la función producto $W.\sigma_{44}$, claramente recursiva primitiva, se tiene en particular:

(**) $\psi(\mathcal{E})\downarrow \Longrightarrow \psi(\mathcal{E}) = U(\mu z T_n^A x \mathcal{E} z)$.

Con esto se tiene:

TH 3 Toda función parcial T^A-computable es recursiva parcial en en A.

E igualmente queda probada la siguiente versión generalizada del teorema de la forma normal de Kleene:

TH 4 Existe una función recursiva primitiva con un argumento U y para cada número natural n y cada conjunto (de números naturales) A existe un predicado con n+2 argumentos T_n^A, recursivo en A, tales que: Para toda función parcial ψ con n argumentos, recursiva en A, existen infinitos x tales que para toda n-pla de argumentos $\mathfrak{X}$ se verifican (*) y (**).

Definiendo

DF 4 $$\phi_x^{n,A}(\mathfrak{X}) = U(\mu z T_n^A x \mathfrak{X} z),$$

de TH 4 se sigue la posibilidad de asignar a cada función parcial ψ recursiva en A, con n argumentos, un conjunto infinito de índices, ya que

CRL 4 ψ es recursiva parcial en A si y sólo si existen infinitos x tales que $\psi = \phi_x^{n,A}$.

Las ventajas de esta redefinición de $\phi_x^{n,A}$ (basada en la redefinición de T_n^A) pueden ponerse de manifiesto, por ejemplo, mediante comparación con la clásica definición de Rogers (cfr. Rogers 1967, pp.130-132), que exige la introducción de:

1) La noción de cuádrupla consistente.

2) La noción de cuádruplas compatibles.

3) La noción de conjunto regular

4) La introducción de una función recursiva f tal que;

$\text{dom }(\phi_x) = \text{rango }(\phi_{f(x)})$

$\text{dom }(\phi_x) \neq \emptyset \Longrightarrow \phi_{f(x)}$ es total.

5) La introducción de una funció recursiva ρ, tal que para todo z se verifica:

$\text{dom}(\phi_{\rho(z)})$ es regular

Si $\text{dom }(\phi_z)$ es regular, entonces $\text{dom }(\phi_z) = \text{dom }(\phi_{\rho(z)})$.

También quedan de manifiesto las ventajas de las redefiniciones de T_n^A y $\phi_x^{n,A}$ dadas aquí, al comprobarse (lo que fácilmente podrá hacer el lector) que a partir de ellas se simplifican considerablemente las pruebas de ciertos teoremas básicos de la teoría de la computabilidad, tales como el s-m-n relativizado, los que hacen referencia a las propiedades del "jump" de un conjunto, el teorema de Post, etc.

BIBLIOGRAFIA

DAVIS, M. (1958)	Computability and Unsolvability, Mc Graw Hill, New York.
HERMES, H. (1965)	Enumerability, Decidability, Computability, Springer Verlag, Berlin.
PRIDA, J.F. & OREJAS, F. (1976)	Clases de fórmulas aritméticas en la 1-reducibilidad, Edit. por el Centro de Cálculo de la Universidad Complutense, Madrid.
ROGERS, H. (1967)	Theory of Recursive Functions and Effective Computability, Mc Graw Hill, New York.