PROCESO DE EVOLUCION DEL PESO EN UNA POBLACION DE RATAS NO ALIMENTADAS

Por Inés Sobrón Fernández. Departamento de Estadística e I.O. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.

1. Introducción:

El presente trabajo tuvo su origen en el tratamiento de un conjunto de datos, referentes a pesos de una muestra de ratas en distintos tiempos, observados por la Dra. Grasal y el Dr. Palomino, ambos pertenecientes a la Facultad de Medicina de la Universidad Complutense de Madrid.

El objeto perseguido es la estimación de la evolución del peso de las ratas a lo largo del tiempo.

Los datos se obtuvieron observando, en días sucesivos, el peso de cada rata de la muestra, sin haber proporcionado ningún alimento a dichas ratas desde el momento inicial.

En primer lugar se estudió la regresión del peso sobre el tiempo; haciendo para ello una partición de la muestra en grupos, de acuerdo con los pesos iniciales, y hallando curvas de regresión de distintos tipos, para cada uno de los grupos y para la muestra total.

Los resultados obtenidos llevaron a hacer un nuevo estudio de regresión en que se logró una disminución de los errores cuadráticos, considerando, en lugar de lo variable peso, una transformación de ella denominada "peso relativo".

Como consecuencia de los estudios anteriores, se eligió una función exponencial para estimar la evolución del peso relativo de las ratas a lo largo del tiempo. La variación de los parámetros de dicha función, respecto de los distintos grupos, llevó a considerarlos funciones del peso inicial y a la estimación de dichas funciones.

Para comprobar las predicciones realizadas, se hallaron los coeficientes de correlación entre los valores observados y los estimados, para cada tiempo considerado; poniendose así de manifiesto la precisión con que quedan determinadas las trayectorias del proceso, para la muestra considerada.

2. Determinación del proceso de evolución.

Los datos que han servido de punto de partida de este trabajo, como ya indicamos, resultaron de la observación del peso de 50 ratas durante 8 días consecutivos que estuvieron privadas de alimentación.

Se ha considerado que el peso de una rata en un día determinado depende únicamente del peso inicial y del tiempo transcurrido. Denotaremos por $X_t(\omega)$ el peso de una rata, de peso inicial ω, después de pasados t días.

Para hacer un estudio de la regresión del peso sobre el tiempo, se clasificación las ratas de la muestra en 4 grupos según su peso inicial:

1er. grupo. Formado por las ratas de pesos comprendidos entre 225'60 y 299'60.

2° grupo. Formado por las ratas de pesos comprendidos entre 301'00 y 349'00.

3° grupo. Formado por las ratas de pesos comprendidos entre 359'50 y 392'50.

4° grupo. Formado por las ratas de pesos comprendidos entre 398'80 y 513'00.

Para cada uno de los grupos y para la muestra total se han realizado regresiones utilizando tres clases de funciones:

a) Polinomicas, estimando X_t mediante $X_t^{*1n} = a_o + a_1\ t + \ldots$ $\ldots + a_n\ t^n$, $n = 1,\ldots,5$.

b) Exponencial, considerando estimaciones del tipo $X_t^{*2} =$ $= k\ e^{-\alpha\tau}$.

c) Hiperbolica, mediante funciones de la forma $X_t^{*3} = a + \frac{b}{t}$.

Los coeficientes resultantes para cada polinomio de regresión considerado, asi como la varianza total en cada caso, ponen de manifiesto que el aumento del grado del polinomio no disminuye de forma significativa el error; por ello nos hemos limitado a considerar polinomios de primer grado, es decir, rectas de regresión.

Los valores tomados por los coeficientes de correlación vienen dados en la siguiente tabla

	1er. grupo	2° grupo	3° grupo	4° grupo	5° grupo
lineal	-0'83545	-0'86460	-0'91973	-0'72328	-0'37481
hiperbolica	0'7634	0'8118	0'8820	0'6679	0'3623
exponencial	0'8344	0'8723	0'9257	0'7259	0'3910

que muestra un ligero aumento de estos coeficientes para las curvas de regresión exponenciales.

La variación de los coeficientes de regresión respecto de los distintos grupos mostraba claramente su dependencia de los pesos iniciales; dependencia que se manifiesta también en los coeficientes de correlación de la tabla anterior, al ser mayores los correspondientes a los grupos de mayor variabilidad en el peso inicial. Esto indujo a realizar un nuevo estudio de regresión, análogo al anterior, pero considerando una nueva variable, $R_t(\omega)$, para cada tiempo τ, definida a partir de $X_t(\omega)$ mediante la relación

$$R_t(\omega) = \frac{X_t(\omega)}{\omega} \times 100 \qquad |1|$$

Denominamos a $R_t(\omega)$ peso relativo de la rata de peso inicial ω en el día τ (contando a partir del día inicial). Consiguiendo con la anterior transformación que el peso relativo inicial sea para toda rata 100, es decir, $R_{t_0}(\omega) = 100$ para todo ω.

Los coeficientes de correlación obtenidos fueron los que indica la siguiente tabla

	1er.grupo	2º grupo	3º grupo	4º grupo	5º grupo
lineal	0'9652	0'9592	0'9454	0'9387	0'9437
hiperbolica	0'8720	0'8991	0'9126	0'9100	0'8905
exponencial	0'9662	0'9623	0'9476	0'9410	0'9434

Resultado que pone de manifiesto, como era de esperar, un aumento de los coeficientes de correlación respecto de los anteriores, siendo como antes los mejores los correspondientes a considerar curvas de regresión exponenciales. Por ello estimamos $R_t(\omega)$ para cada ω, mediante una función exponencial del tiempo; consideramos así:

$$R_t^*(\omega) = \mu(\omega)\ e^{-\alpha(\omega)t} \qquad |3|$$

Hay que señalar la pequeña diferencia entre los coeficientes de correlación obtenidos en las regresiones lineal y exponencial, lo que puede ser debido a haber realizado las observaciones en un número de días insuficiente para conocer con claridad la forma de evolución.

Puesto que $R_o(\omega) = 100$ para todo ω, tomamos como estimación de $\mu(\omega)$ el valor 100. Consideramos por ello

$$R_t^*(\omega) = 100\ e^{-\alpha(\omega)t}$$

De las relaciones |1| y |2| estimamos $X_t(\omega)$ mediante

$$X_t^*(\omega)\ \frac{\omega\ \ R_t^*(\omega)}{100} = \omega\ e^{-\alpha(\omega)t} \qquad |3|$$

Los valores estimados de $\alpha(\omega)$, para cada grupo, en el estudio de la regresión exponencial fueron

1er grupo ——— 0'04542

2º grupo ——— 0'03886

3er grupo ——— 0'03728

4º grupo ——— 0'03252

De donde parece deducirse, a pesar de los pocos valores de la función $\alpha(\omega)$ estimados de esta forma, que dicha función es decreciente respecto del peso inicial ω.

Con el fin de conseguir mayor información sobre la función $\alpha(\omega)$ hallamos, para cada rata, la curva de regresión exponencial y con ello una estimación de valor de $\alpha(\omega)$ para el peso inicial ω correspondiente.

Ante el inconveniente de no haber sido observadas las 50 ratas en los 8 días considerados, se restringe este estudio a aquellas ratas, concretamente 24, que fueron observadas todos los días señalados; obteniendose las siguientes estimaciones de $\alpha(\omega)$ para cada una de ellas,

ω	$\alpha^*(\omega)$
255'60	-0'04798
266'10	-0'04679
279'20	-0'04886
291'00	-0'04320
291'20	-0'03910
299'60	-0'04330
306'40	-0'03908
310'80	-0'02828
318'70	-0'04035
325'10	-0'03910
340'50	-0'03743
344'90	-0'03823

ω	$\alpha^*(\omega)$
349'00	-0'03883
364'20	-0'03451
365'50	-0'03432
372'20	-0'03202
378'00	-0'03263
389'20	-0'03420
456'00	-0'02945
449'80	-0'02769
453'80	-0'03804
468'20	-0'03146
493'00	-0'02751
513'00	-0'02805

Valores que parecen confirman nuestra hipótesis de ser $\alpha(\omega)$ una función decreciente de ω.

NOTA: Hallando los coeficientes de correlación, entre las observaciones correspondientes a dos tiempos distintos, se obtuvieron valores superiores a 0'985, siendo, además, mayores los referentes a muestras más próximas en el tiempo; resultado conforme con |3| debido a la poca variación de los valores de $\alpha(\omega)$.

A partir de los 24 valores anteriores, ensayamos ajustes de la función $\alpha(\omega)$ mediante funciones lineales y exponenciales; obteniendo asi las funciones

$$\alpha_1^*(\omega) = 0'10687 - 0'00032\,\omega \qquad |4|$$

$$\alpha_2^*(\omega) = e^{-2'66056}\ e^{-0'00181\,\omega} \qquad |5|$$

con coeficientes de correlación -0'80098 y 0'8018 respectivamente. Estos coeficientes muestran la pequeña diferencia que existe entre aproximar $\alpha(\omega)$ mediante una recta o una función exponencial.

Como consecuencia de estos resultados juntamente con los anteriores, consideramos dos posibles estimaciones de $X_t(\omega)$

$$X_t^{1*}(\omega) = \omega\, e^{-(0'10687\, -\, 0'00032\omega)t}$$

$$X_t^{2*}(\omega) = \omega\, e^{-(e^{-2'66056}\ e^{-0'00181\omega})t}$$

Para probar la bondad de estas estimaciones, calculamos los coeficientes de correlación entre los valores observados de la variable $X_t(\omega)$ y, por una parte, los valores predecidos mediante $X_t^{1*}(\omega)$, y, por otra, los estimados mediante $X_t^{2*}(\omega)$, para cada t (t=1,2,...,7).

El siguiente cuadro permite comparar ambos coeficientes entre si y con el coeficiente de correlación entre los valores observados de $X_o(\omega)$ y $X_t(\omega)$

	$X_t^o \times X_t^{1*}$	$X_t^o \times X_t^{2*}$	$X_o^o \times X_t^o$
t=1	0'99615	0'99611	0'99608
t=2	0'99385	0'99376	0'99361
t=3	0'99246	0'99234	0'99217
t=4	0'99304	0'99310	0'99317
t=5	0'98527	0'98518	0'98502
t=6	0'99221	0'99254	0'99292
t=7	0'99048	0'99018	0'98960

denotamos por X^o los valores observados de la variable X.

Se observa en el cuadro anterior que, para la mayoría de los tiempos tenidos en cuenta, el coeficiente de correlación correspondiente a considerar X_t^{1*} es levemente superior al obte nido al considerar X_t^{2*} y este mayor que el coeficiente de correlación lineal; no siendo posible descartar ninguna de las estimaciones X_t^{1*}, X_t^{2*} debido a la pequeña diferencia de sus coeficientes.

Por otra parte, la proximidad a 1 de estos coeficientes de correlación, para todos los tiempos, nos hace considerar que el proceso estimado se ajusta con bastante precisión a los datos observados.

3. Algunas consideraciones sobre el proceso de evolución.

Sea el proceso estocastico $X_t(\omega)$ donde para cada $\hat{t}$ fijo, tenemos la variable aleatoria $X_{\hat{t}}(\omega)$. Supongamos que, para cada ω y cada t fijos, el valor $X_t(\omega)$ verifica la relación

$$X_t(\omega) = \omega\, e^{-\alpha(\omega)t} \qquad |6|$$

Sea ω una variable aleatoria de distribución normal. Nos preguntamos sobre la distribución para t fijo de $X_t(\omega)$ definida por la relación anterior. En otras palabras, dado el espacio de probabilidad $(\mathbb{R},\beta,F)$, siendo F la función de distribución correspondiente a la normal (μ,σ), y la variable aleatoria $X_t : (\mathbb{R},\beta,F) \to (\mathbb{R},\beta,F_t^*)$.
definida por $|6|$, deseamos conocer la función de distribución F_t^* inducida por dicha variable.

Deberiamos por tanto hallar para cada $x \in \mathbb{R}$ el valor de

$$F_t^*(x) = P_F\ \{\omega/\omega\, e^{-\alpha(\omega)t} \leq x\}$$

con las hipótesis que tenemos, para t fijo la función de ω, $X_t(\omega)$, es derivable siendo su derivada

$$X_t'(\omega) = e^{-\alpha(\omega)t} - \omega\, e^{-\alpha(\omega)t}\ t\ \alpha'(\omega)$$

puesto que suponemos que $\alpha(\omega)$ es estrictamente decreciente, $\alpha'(\omega)$ es negativo y por tanto $X_t'(\omega) > 0$ para todo ω, es decir, la función $X_t(\omega)$ para t fijo es estrictamente creciente y continua. Luego para cada x existe un único ω que llamaremos $\omega_t(x)$ tal que $X_t(\omega_t(x)) = x$; por tanto de con |6| tenemos

$$F_t^*(x) = P_F \{\omega / X_t(\omega) \leq x\} = P_F \{\omega/\omega \leq \omega_t(x)\} =$$

$$F(\omega_t(x)) = \int_{-\infty}^{\omega_t(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\Gamma}{\sigma}\right)^2} dy$$

con lo que el problema de hallar F* se reduce al de determinar $\omega_t(x)$ para cada y x fijos.

Derivando en la expresión anterior tenemos

$$f_t^*(x) = f/\omega_t(x))\, \omega_t'(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \omega_t'(x)\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_t(x)-\Gamma}{\sigma}\right)^2}$$

que es la función de densidad correspondiente a una variable ω_t-normal.

BIBLIOGRAFIA.

(1) B M D. "Biomedical Computer Programs", (1973). University of California Press.

(2) DOOB, J.L. (1953), "Stochastic Processes", New York, John Wiley.

(3) DRAPER, N.R., and SMITH, H. (1966), "Applied Regression Analysis", John Wiley.