UNA NUEVA PRUEBA DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE LA ARITMETICA

por José F. Prida

Sea A el conjunto de fórmulas aritméticas formalmente derivables a partir de los axiomas de Peano, mediante las reglas de deducción del cálculo de predicados de primer orden.

El siguiente teorema de representación es bien conocido:

TH 1 Para todo conjunto recursivo $B \subset \omega^k$, existe una fórmula aritmética con k variables libres β, tal que para todo $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_k \in \omega$, cuyos representantes formales en el lenguaje de la aritmética serán denotados por $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$, se verifica:

(*) $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in B \Longrightarrow \beta(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k) \in A$

(**) $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \notin B \Longrightarrow \neg\beta(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k) \in A$.

CRL 1 Si la aritmética es consistente, entonces para todo a_1, $a_2, \ldots, a_k \in \omega$ se verifica:

(***) $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in B \Longleftrightarrow \beta(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k) \in A$.

Si una fórmula β verifica (*) y (**), se dirá que representa al conjunto B en A.

Sean respectivamente T_1 y U el predicado y la función universales, ambos recursivos primitivos, definidos de la forma habitual; y sea

$$\phi_x(y) = \begin{cases} U(\mu z T_1 xyz) & \text{si existe un tal } z \\ \uparrow & \text{si tal } z \text{ no existe.} \end{cases}$$

Puesto que $\phi_m(n)\downarrow$ si y sólo si existe un p tal que $T_1 mnp$, si $\tau(x,y,z)$ es una fórmula que representa a T_1, trivialmente se verifica:

TH 2 Para todo m, n $\in \omega$

i) $\phi_m(n)\downarrow \Longrightarrow \exists z\tau(\underline{m}, \underline{n}, z) \in A$

ii) Si A es ω-consistente, entonces

$$\phi_m(n)\downarrow \Longleftrightarrow \exists z\tau(\underline{m}, \underline{n}, z) \in A \quad .$$

Sea r $\in \omega$ tal que para todo n $\in \omega$ verifica:

$$\phi_r(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \neg\exists z\tau(\underline{n}, \underline{n}, z) \in A \\ \uparrow & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

TH 3 Si A es ω-consistente, entonces es incompleto, siendo $\exists z\tau(\underline{r}, \underline{r}, z)$ un ejemplo de fórmula indecidible.

Demostración:

$$\neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \in A \Longleftrightarrow \phi_r(r)\downarrow \Longleftrightarrow \exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \in A \quad .$$

TH 4 Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) No existe una demostración de $\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \wedge \neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z)$;

ii) A es consistente;

iii) $\neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \notin A$;

iv) $\phi_r(r)\uparrow$.

Demostración:

Obviamente i) equivale a ii) y iii) equivale a iv). Además: $\phi_r(r)\downarrow \Longrightarrow [\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \in A$ y $\neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \in A] \Longrightarrow A$ es inconsistente $\Longrightarrow \neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \in A \Longrightarrow \phi_r(r)\downarrow$, con lo que ii) equivale a iv).

Sea D el predicado recursivo unitario tal que para para todo m $\in \omega$ Dm se verifica si y sólo si m es el número de una demostración de la sentencia $\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \wedge \neg \exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z)$ y sea CONS la sentencia $\neg\exists x\delta(x)$, donde $\delta(x)$ es una fórmula que representa el predicado D. Obviamente CONS expresa en el lenguaje formal de la aritmética la consistencia de A. Puesto que además $\neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z)$ expresa que $\phi_r(r)\uparrow$, si se formaliza dentro de A la prueba de la equivalencia de i) y iv) en TH 4, se obtiene el teorema aritmético:

$$(\text{CONS} \leftrightarrow \neg\exists z\tau(r,r,z)) \in A ,$$

y, por tanto,

CRL 4.1 $\quad \text{CONS} \in A \iff \neg\exists z\tau(\underline{r},\underline{r},z) \in A$.

De TH 4 y CRL 4.1 se sigue inmediatamente:

CRL 4.2 $\quad A$ es consistente si y sólo si CONS $\notin A$.

BIBLIOGRAFIA

GÖDEL, KURT

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verbandter Systeme, Monatsh. Math.Phys., vol. 38, pp. 173-178, (1931).

HILBERT, DAVID y BERNAYS, PAUL

Grundlagen der Mathematik, Vol 2, Springer Verlag, Berlin (1939).