Sobre el teorema de Myhill-Nerode

Por E.García Camarero.

Dado el autómata finito , $Q=(Q,\Sigma,\delta,q_o,F)$, definimos el conjunto Π, de la forma siguiente:

$$\Pi=\{\pi=[q_{i_o}, q_{i_1}, \dots q_{i_n}] \mid \exists x \in \Sigma^* \wedge \pi=[\delta(q_o,x),\delta(q_1,x),\dots\delta(q_{n-1},x)]\}$$

donde $n=card(Q)$. Es decir, los elementos de π, son vectores de estados accesibles de Q.

1. Definimos la función ψ

$$\Psi: \Pi x\Sigma^* \rightarrow \Pi$$

de la siguiente forma:

1) $\forall \pi \in \Pi \quad \psi(\pi,\wedge)=\pi$

2) $\psi(\pi,\sigma) = [\delta(q_{i_o},\sigma), \delta(q_{i_1},\sigma),\dots\delta(q_{i_{n-1}}, \sigma)]$

3) Si $\psi(\pi_i,x) = \pi_j$, entonces
$\psi(\pi_i,x\sigma) = \psi(\pi_j,\sigma)$

Por definición de Π, tenemos que para todo $\pi_i \in \Pi$, existe una palabra $z\in\Sigma^*$ tal que

$$\psi(\pi_o,z)=\pi_i$$

por tanto, podemos siempre escribir

$$\psi(\pi_i,x)= \psi(\pi_o,zx)$$

2. Apoyandonos en la función ψ, podemos definir un producto entre los elementos de Π, de la manera siguiente:

$$\pi_i \cdot \pi_j = \psi(\psi(\pi_o,x),y)$$
$$= \psi(\pi_o,xy) \quad =\pi_k$$

donde $\pi_i = \psi(\pi_o,x)$, $\pi_j = \psi(\pi_o,y)$.

Como $\psi(\pi_o,\wedge)=\pi_o$, tenemos que π_o es elemento neutro del producto antes definido, ya que $\forall \pi_i \varepsilon \Pi$, se tiene

$$\pi_o \cdot \pi_i = \pi_i \cdot \pi_o = \psi(\pi_o,\wedge x) = \psi(\pi_o,x\wedge) = \pi_i$$

donde $x \varepsilon \Sigma^*$ cumple que $\psi(\pi_o,x) = \pi_i$

El producto es asociativo, ya que para todo $\pi_i,\pi_j,\pi_k \varepsilon \Pi$, se tiene:

$$(\pi_i \cdot \pi_j) \cdot \pi_k = \pi_i \cdot (\pi_j \cdot \pi_k)$$

en efecto

$$\pi_i \cdot \pi_j = \psi(\pi_o,xy)$$
$$(\pi_i \cdot \pi_j) \cdot \pi_k = \psi(\pi_o,(xy)z) \qquad (1)$$

y también

$$\pi_j \cdot \pi_k = \psi(\pi_o,yz)$$

$$\pi_i \cdot (\pi_j \cdot \pi_k) = \psi(\pi_o,x(yz)) \qquad (2)$$

y como la concatenación en Σ^* es asociativa se tiene que (1) y (2) coinciden.

Es facil ver que si

$$x = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_p}$$

y si $\pi_{i_j} = \psi(\pi_o,\sigma_{i_j})$ para $j = 1,2, \ldots p$

y $\pi = \psi(\pi_o,x)$, entonces $\pi = \pi_{i_1} \pi_{i_2} \ldots \pi_{i_p}$

3. A partir de Q, podemos definir un autómatá inducido por la función ψ, que denotaremos Q/ψ de la siguiente forma:

$$Q/\psi = (\Pi, \Sigma, \psi, \pi_o, F_\psi)$$

donde $F_\psi = \{\pi_i \mid \pi_i \epsilon \Pi \wedge q_{i_o} \epsilon F\}$

Es claro que la congruencia definida entre palabras de Σ^* con respecto a Q, llamada de equi respuesta, es decir que relaciona dos palabras $\underline{x}$, $\underline{y}$ cuando para todo estado de Q se transita con $\underline{x}$ y con $\underline{y}$ al mismo estado, se puede expresar en función de la función ψ de la siguiente forma:

$$X \eta\ y \Leftrightarrow \psi\ (\pi_o, x) = \psi\ (\pi_o, y)$$

Respecto de η se construye el siguiente autómata

$$Q/\eta = (C_\eta, \Sigma, \delta_\eta, C_\eta(\wedge), F_\eta)$$

donde C_η es el conjunto cociente Σ^*/η, δ_η se define:

$$\delta_\eta(C_\eta(x), \sigma) = C_\eta(x\sigma)$$

y el conjunto de estados finales es

$$F_\eta = \{C_\eta(x) \mid \delta\ (q_o, x) \epsilon F\}$$

Se puede demostrar que $L(Q) = L(Q/\eta)$.

4. Teniendo en cuenta estas consideraciones, vamos a probar que existe un isomorfismo entre Q/η y Q/ψ. En efecto, la función

$$\lambda: C_\eta \to \Pi$$

definida asi:

$$\lambda\ (C_\eta(x)) = \psi(\pi_o, x)$$

es el isomorfismo buscado; para ver esto probemos:

1º) λ es biyectiva

2º) λ es un homomorfismo entre Q/η y Q/ψ.

Para ver que es biyectiva, bastará con probar que si dos calses de C_η se proyectan en un mismo $\pi\varepsilon\Pi$, aquellas clases coinciden, y en efecto se tiene que si

$$\lambda\ (C_\eta(x)) = \pi$$

$$\lambda\ (C_\eta(y)) = \pi$$

esto quiere decir que

$$\psi\ (\pi_o,x) = \psi\ (\pi_o,y)$$

y por tanto $x\eta y$, luego $C_\eta(x) = C_\eta(y)$.

Para ver que λ es un homomorfismo en Q/η y Q/η, tendremos que probar que:

a) $\lambda(C_\eta(\wedge)) = \pi_o$

b) $\lambda(\delta_\eta(C_\eta(x),\sigma)) = \psi(\lambda(C_\eta(x)),\sigma)$

c) $\lambda(F_\eta)\ cF_\psi$

El punto a es inmediato, ya que por definición de λ se tiene que:

$$\lambda(C_\eta(\wedge)) = \psi\ (\pi_o,\wedge)$$

lo que nos dá evidentemente π_o.

El punto b, se cumple ya que

$$\lambda\ (\delta_\eta(C_\eta(x),\sigma)) = \lambda\ (C_\eta(x\sigma)) = \psi\ (\pi_o,x\sigma)$$

$$\psi\ (\lambda(C_\eta(x)),\sigma) = \psi(\psi(\pi_o,x),\sigma) = \psi(\pi_o,x\sigma)$$

El punto c se satisface, ya que si $C_\eta(x)\varepsilon F_\eta$ esto significa que

$$\delta(q_o,x)\varepsilon F$$

luego

$$\lambda\ (C_\eta(x) = \psi(\pi_o,x) = \pi$$

con $q_{i_o} \varepsilon F$, luego $\pi \varepsilon F\psi$.

Con esto queda probado que λ es un isomorfismo entre $Q/_\eta$ y $Q/_\psi$, por tanto $L(Q/\psi) = L(Q/\eta) = L(Q)$.

5. Entre los elementos de π, podemos definir una relación de equivalencia R de la siguiente forma:

$$\pi_i R \pi_j \Longleftrightarrow q_{i_o} = q_{j_o}$$

donde $\pi_i = |q_{i_o} \quad q_{i_1} \quad ,\ldots \; q_{i_{n-1}}|$ y

$$\pi_j = |q_{i_o} \quad q_{j_1} \quad ,\ldots \; q_{j_{n-1}}|$$

Si, por otra parte, definimos una relación entre las palabras de Σ^*, asi:

$$x \eta_o y \Longleftrightarrow \delta(q_o,x) = \delta(q_o,y)$$

vemos que todas las palabras de la clase $C_{\eta_o}(x)$, conducen a elementos π_j equivalentes con el $\pi_i = \psi(\pi_o,x)$, ya que $\delta(q_o,x) = q_{i_o}$, y si $y\eta_o x$ se tiene que $\delta(q_o,y) = \delta(q_o,x)$ luego $q_{i_o} = q_{j_o}$ y por tanto $\pi_j R \pi_i$.

Es inmediato ver que la unión de las clases de C_η cuyas imagenes mediante λ se proyectan en vectores de una de las clases de R, nos da una de las clases de C_η, es decir, que C_η es un refinamiento de C_{η_o}. También es claro que C_{η_o} es de indice finito.

6. Podemos definir un autómata inducido a partir de Q mediante η_o, de la siguiente forma:

$$Q/\eta_o=(C_{\eta_o},\Sigma,\ \delta_{\eta_o},\ C_{\eta_o}(\wedge),\ F_{\eta_o})$$

donde C_{η_o} es la partición de Σ^* mediante la relación de equivalencia η_o, δ_{η_o} es la función de transición definida de la siguiente forma:

$$\forall\sigma\in\Sigma \qquad \delta_{\eta_o}(C_{\eta_o}(x),\sigma) = C_{\eta_o}(x\sigma)$$

y el conjunto de estados finales es:

$$F_{\eta_o} = \{C_{\eta_o}(x) \mid \delta(q_o,x)\in F\}$$

De forma analoga a como hicimos para los automatas Q/ψ y Q/η, se puede probar que existe un isomorfirmo entre Q y Q/η_o, y por tanto se cumple que $L(Q) = L(Q/\eta_o)$.

7. Se puede probar que el lenguaje reconocido por Q/η está formado por las palabras que pertenecen a la unión de los estados de $F\eta$, en efecto

$$x\in L(Q/\eta) \Longleftrightarrow \delta_\eta(C_\eta(\wedge),x)\in F\eta$$

pero según la definición de δ_η, se tiene que

$$x\in L(Q/\eta) \Longleftrightarrow C_\eta(x)\in F_\eta$$

es decir si x pertenece a una de las clases finales de Q/η.

De igual forma se puede probar que el lenguaje reconocido por Q/η_o, está formado por las palabras que pertenecen a la unión de F_{η_o}.

Como por otra parte se tiene que $L(Q) = L(Q/\eta) = L(Q/\eta_o)$ se obtiene como resultado el teorema de Myhill-Nerode.