REPRESENTACION DE SOLIDOS GEOMETRICOS (1 Parte)

Por Miguel Garcia Ferrández. Centro de Cálculo

Introducción

Se expone en este articulo una formalización del sistema de representación de sólidos poliédricos utilizada por el autor. Dicha representación es el resultado de un compromiso entre facilidad de manejo, sencillez conceptual, y densidad de almacenamiento. Los problemas abordados mediante esta representación son varios de los clásicos en el campo de los gráficos con ordenador: representación en dos y tres dimensiones, eliminación de lineas ocultas, intersección de sólidos, comparación de poliedros, etc. Aquí se expone la solución de alguno de éstos.

La representación es independiente de las implementaciones que se han utilizado en la práctica y se expone sin referencia a los lenguajes de programación empleados. Como quiera que sea, este enfoque resultó válido para su programación en FORTRAN y en PL/I; no así en APL pues, por la naturaleza estructurada de dicho enfoque, los programas resultantes en lenguaje APL son lentos y consumen gran cantidad de memoria. Este problema parece derivado de las limitaciones de las actuales implementaciones del APL y no de su potencia descriptiva intrinseca (Iverson, 1962).

Listas, listas circulares

Sea N_p el intervalo de los p primeros números naturales (es decir $N_p = \{1, 2, 3, \ldots p\}$, si p = 0 $N_p = \emptyset$.

Sea V un conjunto cualquiera.

Se llama <u>lista</u> sobre V de longitud m a una aplicación:

$$\begin{aligned} \ell : N_m &\rightarrow V \\ i &\rightarrow \ell(i) = v_i \end{aligned}$$

a la lista de longitud cero la representamos por Λ.

Sea LN el conjunto de todas las listas sobre V (caso de que fuese conveniente se escribiria LN(V)), de cualquier longitud. Se definen las aplicaciones S, S^j (j = 0, 1, ...)

$$\begin{aligned} S : LN &\rightarrow LN \\ \ell &\rightarrow S(\ell) \begin{cases} S(\ell)(i) = \ell(i+1) & \text{si } i<m \\ & \text{siendo m la} \\ S(\ell)(m) = \ell(1) & \text{longitud de } \ell \end{cases} \end{aligned}$$

y S^o = identidad en LN
$S^{j+1} = S(S^j)$ $\quad$ j = 0, 1, 2, ...

En LN se define ahora la siguiente relación de equivalencia entre listas:

$£ \sim £'$ sii $\exists j \in Z$ (positivo, negativo o cero) tal que $£ = S^j(£')$

(Se entiende que S^{-n} es la función inversa de S^n para $n > o$)

Al conjunto cociente $L = LN/\sim$ se denomina conjunto de listas circulares sobre V (denotado L(V) si es preciso). Las listas circulares se representan mediante alguna de sus componentes (listas no circulares equivalentes según $\sim$). La longitud de una lista circular se define como la longitud de cualquiera de sus representantes.

Estructuras

Sean N y M dos conjuntos y L = L(M) el conjunto de listas circulares sobre M. Sea el conjunto X y las aplicaciones A y B que satisfacen:

X1 . $\exists x_o \in X$

X2 . $B : X \times N \to L$
tal que $\forall n \in M$ es $B(x_o,n) = \wedge$
x_o es la estructura vacía

X3 . Si $\forall n$ N es $B(x_1,n) = B(x_2,n)$
entonces $x_1 = x_2$

X4 . $A : X \times N \times L \to X$
tal que $A(A(x,n_1,l_1,n_2)l_1)=A(A(x,n_2,l_2), n_1, l_1)$

X5 . $b(A(x, n, l), n) = l$
decimos que X es el conjunto de estructuras sobre N y M.

Escribiremos X(N,M) si es necesario.

Sea $x \in X$ y $D(x) = \{n \in N / B(x, n) \neq \wedge\}$
si D(x) es finito se puede representar x por la siguiente lista
$\{n_i, l_i = B(x, n_i)\}_{i=1,\dots r}$

donde suponemos que $D(x) = \{n_1, n_2, \dots n_r\}$ [a]

Así se dice que $l_i = B(x, n_i)$ es la descripción de n_i en x. Dada la lista $\{n_i, l_i\}$ se puede construir x mediante la siguiente fórmula:

$$x = A(A(A(\dots A (x_o, n_1, l_1) \dots n_{r-1}, l_{r-1}) n_r, l_r)$$

en este sentido se dice que $\{n_i, l_i\}$ es una descripción de la estructura x.

Arista. Estructuras de vèrtices

Sea V un conjunto y (E, d) donde E es un conjunto y d la aplicaciòn:

$$d : E \rightarrow V \times V$$
$$e \rightarrow d(e) = (v_1, v_2) \qquad [b]$$

se dice que (E, d) es un conjunto de aristas con extremos en V. Se escribe tambièn $d = (d_1, d_2)$ y $d(e) = (d_1(e), d_2(e))$.

Sean V un conjunto, a cuyos elementos llamamos vèrtices y (E,d) un conjunto de aristas con extremos en V. Sea X(V,E), sea $X_1 \subset X$ el conjunto de estructuras que verifican

$$x \in X_1 \Rightarrow \forall v \in D(x), \quad \forall e_i \in B(x,v) \text{ es } d_1(e_i) = v$$

a este conjunto X_1 denominamos "conjunto de estructuras de vèrtices (en V y aristas en E)".

Si, ademàs, E = V x V, entonces la lista B(x ,v) serà de la forma $((v, v_1), (v, v_2), \ldots (v, v_r))$, y se puede sustituir por $(v_1, v_2, \ldots v_r)$, lo que equivale a tomar X(V, V) como representaciòn de $X_1 \subset X(V,E)$. Como quiera que sea, èsto debe considerarse una representaciòn màs bien que una diferencia conceptual.

Grafo asociado a una estructura de vèrtices
Estructura de vèrtices de un poliedro.

Consideremos el conjunto de estructuras de vèrtices $X_2 \subset X_1 \subset X$ que verifican, $\forall x \in X_2$ si $B(x,v)=(e_1, e_2, \ldots e_n)$ entonces $e_i \neq e_j$ si $i \neq j$. A cada estructura de èstas $(x \in X_2)$ se le puede asociar el grafo orientado cuyas aristas son todas las que intervienen en B(x,v) y cuyos vèrtices son los extremos de dichas aristas. En este grafo, la estructura de vèrtices determina una ordenaciòn de las aristas en ciclos.

Sea un sòlido polièdrico que no tenga vèrtices coincidentes. A cada vèrtice v del mismo, le asociamos la lista circular de las aristas que parten de v. El orden de circulaciòn debe determinarse de una manera consistente en todos los vèrtices, asì que convenimos en determinarlo como el sentido contrario a las agujas del reloj cuando se contempla v desde un punto pròximo en el exterior del poliedro. La lista de pares (vèrtice, lista de aristas) constituye una representaciòn de una estructura de vèrtices en el sentido de [a], que denominamos "estructura de vèrtices del sòlido polièdrico". A esta estructura se denomina "descripciòn del poliedro". Adviertase que esta estructura es del tipo X_2 en los poliedros de caras planas, ùnicos que vamos a considerar en este trabajo.

Estructura de caras de un poliedro

Sea F un conjunto arbitrario, a cuyos elementos llamamos caras, sean V y E conjuntos de vèrtices y aristas con extremos en V, respectivamente. Los elementos de V se denominan vèrtices por conveniencia nemotècnica, ùnicamente se exige la existencia de la aplicaciòn d entre E y V x X en el sentido de [b].

Sea X(F,E) y X_1 X el conjunto de estructuras que verifican:

$$x \in X_1 \Rightarrow \forall f \in D(x) \quad \text{Sea} \quad (e_1, e_2, \ldots e_r) = B(x,f)$$
$$\text{entonces} \quad d_2(e_1) = d_1(e_{i+1}) \qquad \forall i=1,2,\ldots r$$

Se dice que X_1 es el conjunto de "estructuras de caras (en F y aristas en E)".

Analogamente a lo indicado en las estructuras de vèrtices, si E=V x V se pueden sustituir las descripciones de caras $B(x,f) = (e_1, e_2, e_3, \ldots e_r)$ donde $e_1 = (v_i, v_i')$ siendo $v_i' = v_{i+1}$, por la condiciòn $d_2(e_i) = d_1(e_{i+1})$, por $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_r)$, en cuyo caso los elementos de X(F,V) representan a los de $X_1 \subset X(F,E)$

Sea un sòlido polièdrico cualquiera, a cada una de sus caras le podemos asociar la lista circular de aristas que limitan licha cara. Como en la estructura de vèrtices, el sentido de giro de las aristas en la lista circular debe elegrise consistentemente en todo el polièdro. Por convenio elegimos el sentido contrario al giro de las agujas del reloj al mirar la cara desde un punto pròximo en el exterior del sòlido polièdrico.

La lista de pares (cara, lista de aristas) forma la descripciòn de una estructura (de caras) en el sentido de |a| que denominamos "estructura de caras del sòlido polièdrico".

Grafo asociado a una estructura de caras

Sea $X_2 \subset X_1 \subset X(F,E)$, donde E es un conjunto de aristas con extremos en V, el conjunto de estructuras tales que

$$x \in X_2 \Leftrightarrow \forall f \in D(x), \quad \text{si} \quad B(x,f) = (e_1, e_2, e_3 \ldots e_r)$$
$$\text{entonces } e_i \neq e_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

A cada estructura de X_2 se puede asociar un grafo orientado cuyas aristas son los pares de la forma:

(f, e_i) con $B(x,f) = (\ldots e_1 \ldots)$

los vèrtices del grafo son los elementos de V y la relaciòn de incidencia d' es

$$d'((f, e_i)) = d(e_1) \in V \times V$$

La estructura de caras define en el grafo asociado a ella una ordenación cíclica de las aristas. El tema de la ordenación cíclica de las aristas de un grafo orientado, aunque característica fundamental de los grafos que aparecen en este estudio, ha sido tratado en detalle por otros autores (Tutte, 1973) y no entraré en él.

Aristas apareadas
Estructuras bien formadas

Sea E un conjunto de aristas con extemos en un conjunto de vértices V, sea p una aplicación parcial que verifica

$$p : E \nrightarrow E$$
$$e \rightarrow e'=p(e) \text{ y } d(p(e)) = (d_2(e), d_1(e))$$

Decimos que una arista está apareada en E por p, sii $\exists p(e)$, $\exists p(p(e))$, = e y es p(p(e)) = e. La función p se dice que invierte las aristas .p(e) se representa por e^{-1} cuando e está apareada en E (por p).

Sea X(N, E) el conjunto de estructuras sobre un conjunto arbitrario N, y un conjunto de aristas E. Se dice que $x \in X$ es una estructura bien formada sii $\forall n \in D(x)$, $\forall e_i \in B(x, n)$ existe un único n' D(x) tal que e_i está apareada en B(x,n'), es decir $\exists e_j \in B(x,n')$ tal que $e_j = e_i^{-1}$ y e_j aparece una sóla vez en B(x,n').

Si $e_i \in B(x, n)$ para $n \in D(x)$ y $\exists n' \in D(x)$ tal que e_i está apareada en B(x,n'), se dice que e_i está apareada en x. Es decir, en una estructura bien formada todas sus aristas (!) están apareadas, no así a la inversa.

En el caso de estructuras de vértices de tipo X_1, que son tales que $e_i \in B(x,v) \Rightarrow d_1(e_i) = v$, resulta que si e_i está apareada en x, lo estará en $B(x,d_2(e_i))$ puesto que $d_1(e_i^{-1})=d_2(e_i)$. Por tanto en estas estructuras la determinación de la bien-formación es más sencilla que en estructuras más generales.

Indexación en listas

Denominamos índice a todo subconjunto finito de N (el conjunto de los números naturales), $I \subset N$. Sea $\mathcal{L}$ una lista sobre M, y $m \in M$, se dice que I es el índice de m en $\mathcal{L}$, y se escribe $I(m,\mathcal{L})$ sii $\forall i \in I$ es $\mathcal{L}(i)=m$. Por ejemplo, si M es el alfabeto entonces I(q,(a,b,q,g,q,e,b)) = {3,5}

Sea una lista $\mathcal{L}$ y sea I un índice sea n la longitud de $\mathcal{L}$, indexar con I es la operación que cálcula la lista $\mathcal{L}'=\mathcal{L}(I)$ definida como

$$\mathcal{L}'= (\mathcal{L}(1+(i_1-1) \bmod n), \ldots, \mathcal{L}(1+(i_r-1) \bmod n))$$
donde $i_1<i_2<i_3 \ldots <i_r$ son los elementos de I

Por ejemplo, si $\pounds = (a,b,q,g,q,e,l)$

$\pounds(1,2) = (a,b)$
$\pounds(2,7,11,12) = (b,b,g,q)$
$\pounds(3,5,10) = (q,q,q)$
$\pounds(\emptyset) = \wedge$, etc.

Sea $\pounds$ una lista sobre M, y $m \in M$, se define el sucesor de m en $\pounds$, $S(m,\pounds)$ como:

$$S(m,\pounds) = \pounds(I(m,\pounds)+1)$$

En el ejemplo anterior $S(q,\pounds) = (g,e)$

Adviertase que en la indexación de una lista con un indice hay implícita una circularidad, resultante de utilizar la función módulo al definir $\pounds(I)$.

Análogamente se puede definir $S^{-1}(m,\pounds)$

Si l es una lista circular sobre M, y $m \in M$ se puede definir $S(m,l)$ tomando un representante de l, $\pounds \in l$ y calculando la lista circular que determina $S(m,\pounds)$. Hay que advertir aquí que no es fácil extender la indexación a listas circulares y se recurre por eso a utilizar un elemento de M como referencia dentro de la lista circular.

Sucesiones de aristas

Sea un conjunto de estructuras X(N,E)(N es un conjunto arbitrario, no necesariamente el de los números naturales) y E es un conjunto de aristas sobre vértices en V, además se ha establecido un apareamiento de aristas en E.

Sea e una arista y x una estructura, denotamos por $D(x,e)$ el conjunto $\{n \in N / e \in B(x,n)\}$, pues bien, asociamos a e el siguiente conjunto de listas circulares (que puede ser vacio)

$$S(e,x) = \bigcup_{n \in D(x,e^{-1})} \{S^{-1}(e^{-1},n)\}$$

se denomina a $S(e,x)$ el sucesor de la arista e en la estructura x

Tomando $S(e,x)$, como elemento constructivo se pueden formar estructuras más complejas del siguiente modo informal:

1.- Se parte de $(e,S(e,x))$

2.- En cada nodo de la estructura $(e,S(e,x))$ en que aparece una arista e_i se sustituye por el par $(e_i,S(e_i,x))$.

3.- El proceso se repite en número finito de veces, tomando las aristas del último nivel anadido cada vez.

A una tal estructura (en cuya formalización no entrare) se denomina sucesión o cadena de aristas en x, su longitud se define como el número de veces que se aplica el paso número 2, más 1 por la aplicación de S,implicita en el paso primero.

Como quiera que sea, en lo que sigue nos limitaremos a estructuras bien formadas. En este caso $\forall$ e,x es S(e,x) un conjunto unitario formado por una lista circular de longitud uno, así que toda cadena de aristas es isomorfa (!) a una sucesión en el sentido ordinario, Si además nos limitamos a estructuras bien formadas en las que D(x) es finito, es fácil probar que toda cadena de aristas, de longitud suficiente, repite una arista y a partir de ahí se reproduce la secuencia de aristas (puesto que la sucesión es un proceso determinista en una estructura bien formada). Más aún, la arista repetida es siempre la primera de la cadena (no entraré en demostrarlo).

Estructuras parcialmente formadas
Sustracción de aristas

Sea E un conjunto de aristas con apareamiento y X(N,E) un conjunto de estructuras. Se dice que x X es una estructura parcialmente formada sii $\forall$ n$\in$D(x),$\forall$ e$\in$B(x,n) como máximo e está apareada en x y de manera única, es decir

$$\sum_{n'\in D(x)} \text{Cardinal } (I(e^{-1},b(x,n'))) \leq 1$$

(b(x,n') denota a una lista representante de la lista circular B(x,n'))

Si construimos una cadena de aristas en una estructura parcialmente formada, dicha cadena es lineal (en el sentido del apartado anterior) pero puede ocurrir que se interrumpa al obtener una arista no apareada en el cálculo de $S(e^{-1},X)$, en el paso número 2 del procedimiento que hemos indicado. Así pues, de esta forma no siempre se obtendría un ciclo de aristas.

Vamos a dar un proceso que nos permita obtener una estructura bien formada a partir de otra parcialmente formada. Sea una estructura cualquiera x$\in$X(N,M), sea W$\subset$M, definimos la diferencia R(x,W) ó x-W como una estructura tal que:

$\forall$n$\in$N es B(x-W,n) = B(x,n)-W

y se entiende que B(x,n)-W es la lista circular que resulta de suprimir en B(x,n) los elementos que aparezcan de W, que puede resultar vacía.

Pues bien, si x es una estructura (x$\in$X(N,E), donde E es un conjunto de aristas con apareamiento) parcialmente formada y W(x) es el conjunto de aristas no pareadas en x, es obvio que x-W es una estructura bien formada.

Borde de un conjunto de aristas

Sea x una estructura parcialmente formada y W(x) el conjunto de aristas no apareadas en x. Si calculamos una cadena (cerrada ó no) en x-W, es fácil observar que la función $S(e,x-W)$ cálcula $S(e,x)$ bordeando las aristas de W, veamoslo con un ejemplo:

$B(x,n) = (\ldots e_1\ e_2\ e_3\ e^{-1} \ldots)$ y $e_2,\ e_3 \in W$

entonces $B(x-W,n) = (\ldots e_1 e^{-1} \ldots)$

$S(e,x-W) = (e_1)$ que es lo calculado por $S(e,x)$ si nos saltamos las aristas que pertenecen a W.

Generalizando esta idea podemos definir lo que se entiende por sucesión de aristas bordeando un conjunto de aristas.

Sea x una estructura parcialmente formada, sobre un conjunto de aristas apareadas, sea W un conjunto arbitrario de aristas que incluye las aristas de x no apareadas en x.
Sea $e \in B(x,n)$ una arista de x

$S(e,x,W) = ((e_1,e_2,\ldots,e_r),\ e')$

donde $e' = S(e,x-W)$ y $e_1,e_2,\ldots e_r$ son las aristas de W que nos saltamos en el cálculo de $S(e,x-W)$. Notese que r puede ser cero.

Una cadena o sucesión de aristas bordeando el conjunto W será la estructura que se obtiene al enlazar e' con $S(e',x,W)$ y así sucesivamente. Una tal cadena puede representarse por

$e(e_1,e_2,\ldots e_r)e'(e'_1,e'_2,\ldots e'_s)e'' \ldots$

al conjunto e,e',e'' ... se denomina "una frontera externa de W en x" y al $e_1,e_2,\ldots e_r,e_1 \ldots e'_s$ ... "una frontera interna de W en x".

Con estas definiciones concluyo la primera parte de este artículo. La segunda parte tratará de las aplicaciones de estos conceptos a los gráficos con ordenador.

<u>Referencias</u>:

1.- "What is a Map?". W.Tutte, "New Directions in The theory of Graphs", Edited by Frank Harary. Academic Press, 1973.

2.- "A.P.L." K.E.Iverson, 1962
John Wiley $ sons, Inc.