RESOLUCION DEL PROBLEMA "MINIMIZAR LA SUMA DE ARCOS" EN GRAFOS CUADRADOS TIPO REJA DE ORDENES 2, 3 Y 4 POR MEDIO DEL METODO DE LAS SIMETRIAS ESTABLES O ESTABILIZANTES.

Por Eduardo Diez, ETSEIB-CCUPB

SUMARIO

0. RESUMEN

Dado un grafo ordinario, el problema Δ ó "suma de arcos" consiste en numerar los vertices del grafo de forma que se minimice la suma de diferencias absolutas entre los valores de los vertices.

El caso general de este problema es considerablemente dificil y por otro lado el problema Δ es uno los que aparecen más fecuentemente en las aplicaciones prácticas de la teoría de grafos.

Tiene por tanto interes resolver diferentes casos particulares de este problema gracias a la estructura especial que posea el grafo en cuestión, siempre con el afán de ir poco a poco ampliando el campo de los grafos para los que el problema Δ es resoluble.

Harper ha elaborado un método de analisis del problema Δ en grafos con simetrias estables, que le permite resolverlo en algunos casos (solidos platonicos, grafos de Bruijn, ...) y nosotros hemos utilizado su método para rejas cuadradas de n x n puntos, resolviendo el problema para n=2, 3 y 4.

Al final del trabajo se sugieren distintas alternativas para generalizar este estudio a rejas rectangulares, o bien a rejas cuadradas de dimensiones superiores a n=4, que esperamos completar próximamente.

1. DEFINICIONES BASICAS

1.1. Grafos

Sea G un grafo finito no direccionado con un conjunto V de vertices y E de arcos.

Sea $e \in E$, por $\delta(e)$ entenderemos el conjunto de vertices de e, G puede tener bucles (en cuyo caso $\delta(e)=\{v\}$), o arcos multiples (en cuyo caso $\delta(e_1) = \delta(e_2)$).

1.2. Numeración de un grafo

Una numeración de un grafo G es una aplicación $\phi: v \to \{1,2,\ldots,|V|$ biyectiva.

1.3. Problema de la "Suma de arcos"

Dada una numeración ϕ de G y un arco $e \in E$ con $\delta(e)=\{v,w\}$, escribiremos

$$\Delta_e(\phi) = | \phi(v) - \phi(w) |$$

y el problema "Suma de arcos" consiste en minimizar $\sum_{e \in E} \Delta_e(\phi)$ sobre todas las numeraciones posibles ϕ de G.

1.4. Problema Isoperimétrico

Sea $G=(V,E)$ un grafo, dado $S \leq V$ se define

$$\theta(s) = | \{e \in E \mid \delta(e)=\{v,w\} \text{ cumple } v \in S \text{ y } w \in S\} |$$

y el problema isoperimétrico de orden l consiste en minimizar para cada l, $o \leq l \leq |v|$, $\theta(s)$ sobre todos los $s \leq v$ tales que $|s| = l$.

1.5. Relación entre el problema suma de arcos y el problema isoperimetrico (TEOREMA)

Para todas las numeraciones de $G=(v,e)$ se cumple que

$$\sum_{e \in E} \Delta_e(\phi) = \sum_{l=o} \theta(S_l(\theta)) \qquad (151)$$

lo cual se deduce de tener presente que $\sum_{e \in E} \Delta_e(\theta) = \sum_{e \in E} |\theta(v) - \theta(w)|$,

siendo $\delta(e)=\{v,w\}$, y de la observación de que el arco e de extremos v y w tales que $\Theta(v) < \Theta(w)$, contribuye con el valor $\theta(w)-\theta(v) > o$ a la parte izquierda de (151) y con +1 a cada uno de los sumandos de $\Sigma\Theta$ tales que $\theta(v) \leq l \leq \theta(w)$.

1.6. Corolario

Si podemos encontrar una familia de conjuntos $\phi = S_o \subset_o S_1 \ldots \subset S_{|v|} = v$, tales que $|S_l|=l$, y S_l es una solución del problema isoperimétrico de orden l, entonces la numeración definida por

$$\phi(v) = l \quad \text{sii} \quad v \in S_l - S_{l-1} \qquad 1 \leq l \leq |v|$$

es una solución del problema "suma de arcos".

Es decir, si podemos encontrar una sucesión de conjuntos encajados que resuelve el problema isoperimétrico en un grafo, esta sucesión define univocamente la solución del problema suma de arcos en el mismo grafo.

1.7. Grafo euclideo y reflexión

Un grafo Euclideo es un grafo cuyos vertices son puntos de E_n, espacio euclideo n-dimensional, y cuyos arcos conectan vertices entre si. Los arcos no precisan ser lineas rectas y pueden cortarse entre si.

Relexión, una reflexión en E_n es una aplicación lineal de E_n en E_n que conserva un hiperlano (un subespacio de dimensión n-1) fijo, y tal que cualquier punto de E_n se refleja como en un espejo al otro lado del hiperplano dando lugar a su imagen.

El hiperplano fijo de la reflexión divide el espacio en dos semiespacios, y todo arco que tenga un elemento a cada lado del hiperplano interseca el hiperplano.

1.8. Simetria estable en un grafo

Dado un grafo euclideo G de E_n, una simetria estable $R(\Pi)$ de G es una reflexión en E_n que conserva el hiperplano Π y que actua sobre G como una aplicación lineal de G en G transformando vertices en vertices y arcos en arcos por medio de reflexiones en Π tales que si $G=(V,E)$, $e\in E$, $\delta(e)=(v,w)$ y v,w están a diferente lado de Π, entonces

$$R(v)=w \quad (\text{y por tanto } R(w)=v)$$

Se dice que la simetria anterior es estable porque conserva estable el grafo después de actuar.

2. ESTUDIO DE LA RELACION DE ORDEN QUE INDUCEN LAS SIMETRIAS ESTABLES EN UN GRAFO, Y SUS PROPIEDADES CON RESPECTO AL PROBLEMA ISOPERIMETRICO Y SUMA DE ARCOS.

2.1. Estabilización de un conjunto de vertices respecto a una simetria estable

Sea $G=(V,E)$ un grafo euclideo con una simetria estable $R(\Pi)$ y un punto $p\in E_n$, $p\notin\Pi$

Dado $S\subseteq V$ definimos estabilización de S como otro subconjunto de V, $STAB_{R,p}(S)\subseteq V$, construido de la forma siguiente

$$\mathrm{Stab}_{R,p}(S)=\Sigma_o \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$\Sigma_o=\{v\in S \quad R(v)\in S\}$

$\Sigma_1 = \{V\epsilon S \mid R(v)\epsilon S \ \ y \ \ \|v-p\| < \|R(v)-p\|\}$
$\Sigma_2 = \{V\epsilon S \mid R(v)\epsilon S \ \ y \ \ \|v-p\| < \|R(v)-p\|\}$

donde " $\| \ \|$ " denota la mètrica euclidea ordinaria.

En resumen Stab(S) es otro conjunto de igual cardinalidad que S formado sustituyendo aquellos $v\epsilon S$ tales que $R(v)\epsilon S$, por sus imagenes $R(v)$, si èstas distan menos de p que v, es decir, si estan en el mismo lado de Π que p.

2.2. Estabilizaciòn de una numeraciòn respecto a una simetria estable

Sea $\phi : V \to \{1,2,\ldots,|V|\}$ una numeraciòn de $G=(V,E)$, y $R(\Pi)$ una simetria estable con $p\epsilon\Pi$.

Llamaremos estabilizaciòn de ϕ, y la escribiremos como $\mathrm{Stab}^*_{R,p}(\phi)$, a la numeraciòn ϕ^* definida por

$$\phi^*(v)=\phi(v) \quad \text{sii} \begin{cases} v=R(v) \\ \text{ò} \ \ \|v-p\|<\|R(v)-p\| \quad y \quad \phi(v) < \phi(R(v)) \\ \text{ò} \ \ \|v-p\|>\|R(v)-p\| \quad y \quad \phi(v) > \phi(R(v)) \end{cases}$$

$$\phi^*(v)=\phi(R(v)) \quad \text{sii} \begin{cases} \ \ \|v-p\|<\|R(v)-p\| \quad y \quad \phi(v) > \phi(R(v)) \\ \text{ò} \ \ \|v-p\|>\|R(v)-p\| \quad y \quad \phi(v) < \phi(R(v)) \end{cases}$$

es decir ϕ^* conserva $\phi(v)$ y $\phi(R(v))$ ò los intercambia.

2.3. Propiedades de la estabilizaciòn de conjuntos y numeraciones

Para todas las numeraciones $\phi: V \to \{1,2,\ldots,|V|\}$, $G=(V,E)$ y para todo $o\le 1\le |v|$ se verifica

1) $\Theta(\mathrm{Stab}(S_1)) \le \Theta(S_1)$ $\qquad \forall\, S_1 \le V, \ |S| = 1$
2) $\sum_{e\in E} \Delta_e(\phi^*) \le \sum_e \Delta_e(\phi)$

2.4. Orden parcial estable definido por K simetrias estables de un grafo Euclideo

Si tenemos K simetrias estables, $R_0, R_1, \ldots, R_{k-1}$, de un grafo $G=(V,E)$ euclideo, y un punto p que no pertenece a ninguno de los planos de las simetrias, podemos definir un orden parcial sobre V de la siguiente forma

$S(G,R_i,p) \subset V \times V \quad ; \quad o \le i \le k-1$

$$S = \bigcup_{j\ge o} P_j \quad \text{siendo} \begin{cases} P_o = \{(v,v) \mid v\epsilon V\} \\ P_1 = \{(v,w) \mid \|v-p\| < \|w-p\| \ y \ R_i(v)=w\} \text{ para algún } i \\ P_{j+1} = P_j \circ P_1 \end{cases}$$

Este orden se denomina "orden estable de G con respecto a R_i y p".

Si definimos # por $\# = P_1 - \bigcup_{i>1} P_i$, # resulta ser el minimal de P_1 cuyo cerramiento transitivo es aùn S.

El diagrama de Hasse de S es el grafo direccionado $H=(V,\#)$.

2.5. Estabilizaciones sucesivas

Sea $G=(V,E)$ un grafo con K simetrias estables R_i y un punto p no perteneciente a ningún hiperplano.

Dados $S \subseteq V$ y $\phi : V \to \{1,2,\ldots,|V|\}$ cualesquiera las secuencias $\{T_j\}_{j\geq 0}$ y $\{\phi_j\}_{j\geq 0}$ son constantes a partir de sendos valores K_r, K , esto es T_j=cte $\forall j \geq K_r$, ϕ_j=cte $\forall j \geq K_\psi$ habiendo definido las anteriores secuencias como

$$\begin{cases} T_o = S \quad y \quad T_j = \text{Stab } T_{j-1}; \quad |S|=1, \quad o \leq 1 \leq |V| \\ \psi_o = \phi \quad y \quad \psi_j = \text{Stab } \psi_{j-1} \end{cases}$$

Representaremos estas constantes por T_∞, ψ_∞

2.6. Propiedades de las estabilizaciones sucesivas

1) T_∞ es solución del problema isoperimétrico de orden 1.
2) ψ_∞ es solución del problema suma de arcos de G.

Por tanto

1) Para resolver el problema θ_e nos basta analizar sólo aquellos $S \leq V$ que sean estables, es decir, que sean menores (*) de la relación de orden parcial S definida anteriormente.

2) Para resolver el problema Δ nos basta analizar sólo aquellas numeraciones ϕ que sean estables, esto es, tales que $S_l(\phi)$ sea una cadena maximal de $L(S)$, $\forall$ $o \leq l \leq |V|$ siendo

$$\begin{cases} S_l(\phi) = \{ v \in V \mid \phi(v) \leq l \} \\ L(S) = \text{reticulo de menores de la relación de orden } S. \end{cases}$$

3. SOLUCION DEL PROBLEMA ISOPERIMETRICO EN UN GRAFO CON SIMETRIAS ESTABLES.

Si tenemos un grafo $G=(V,E)$ con K simetrias estables R_i, para resolver el problema isoperimetrico de orden 1 nos bastará, según lo visto anteriormente, efectuar los siguientes pasos:

1.- Construir la relación de orden S originada por las R_i. Para ello basta construir el diagrama de Hasse de S.
2.- Construir todas las menores de orden 1 de S.
3.- Evaluar su θ y extraer el menor que minimiza θ.

Sin embargo nos encontraremos con dos problemas:

a) Si el grfo tiene pocas simetrias, el cálculo de S se hace muy sencillo pero entonces tendremos muchos menores con lo que el método simplifica poco el eventual backtracking que solucionaria el problema en un grafo cualquiera.

b) Si el grafo tiene muchas simetrias, el cálculo de S es

(*) $M \subset V$ es menor si $V \in M$, $W \leq v = w \in m$; $(\leq)$ = relación orden complejo pero tendremos pocas menores que investigar en compensación.

El punto de compromiso se halla al tomar como generadoras de S las simetrias que forman base de $<R_0,R_1,...,R_{k-1}>$, subgrupo engendrado por las simetrias estables de G.

4. SOLUCION DEL PROBLEMA SUMA DE ARCOS EN UN GRAFO CON SIMETRIAS ESTABLES

Como la construcción de numeraciones estables resulta compleja, se recurre para resolver el problema Δ al coroloario 1.6., es decir, resolveremos el problema Φ con la esperanza de encontrar soluciones encajadas que nos originen la solución del problema Δ.

Harper ha encontrado la solución del problema Δ via este método, para los 5 solidos platónicos y el grafo de Bruiju de orden 4.

Nosotros lo hemos intentado con exito para las rejas cuadradas de ordenes 2, 3 y 4.

5. ALGORITMO PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA SUMA DE ARCOS EN GRAFOS CUADRADOS SUMA DE ARCOS EN GRAFOS CUADRADOS TIPO REJA DE ORDENES 2,3 Y 4 POR MEDIO DEL METODO DE LAS SIMETRIAS ESTABLES. RESULTADOS

5.1. Grafo reja cuadrado nxn

Un grafo reja cuadrado nxn es un tablero de ajedrez de (n-1) x (n-1) cuadros y n x n vertices.

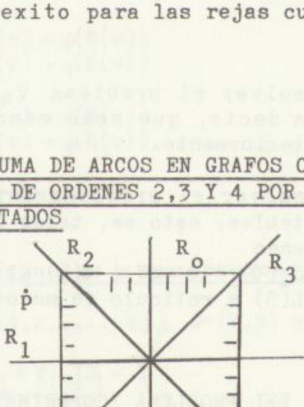


Fig. 1

5.2. Simetrias estables de un grafo reja

Un grafo reja $G \subset E_2$, espacio euclideo de dimensión 2, tiene 4 simetrias estables (ver figura 1), una base de $<R_0, R_1, R_2, R_3>$ está constituida por las simetrias $\{R_0, R_1\}$

5.3. Relación de orden. Diagrama de Hasse

Tomaremos el punto p en el 2 cuadrante y esto nos origina los diagramas de Hasse que aparecen en las páginas 10, 11 y 12.

El retículo de menores originado por cada diagrama de Hasse aparece a continuación de él.

Hay que hacer notar que cada punto del reticulo de menores representa todos aquellos vertices que son menores que dicho punto.

Así por ejemplo, en n=3 el punto A representa el conjunto {11, 13, 31}, el B representa el conjunto {12, 32}, y asi sucesivamente.

Para cualquier n, un menor estará compuesto por un punto de cada uno de los retículos disjuntos, asi por ejemplo, en n=3, el menor M=(A,B,C,D) es el siguiente

$$M = \{11, 31, 13, 12, 32, 21\}$$

5.4. Algoritmo para resolver el problema isoperimetrico de grafos reja n=2,3,4

Aunque sólo se ha implementado para los valores de n antedichos, el algoritmo que a continuación se comenta está pensado para cualquier valor de n, con la unica limitación del tiempo de CPU empleado, aspecto que luego comentaremos.

En sintesis el algoritmo funciona así:

1) Define un menor como un t-plas ordenado siendo t el número de retículos disjuntos.

$$M = (m_1, \ldots, m_t)$$

los valores de m_i definen el punto de cada retículo que forma parte de M.

2) Calcula las coordenadas de los puntos que comprende el punto m_i

3) Calcula $\theta(M)$ una vez ya conocidas las coordenadas de todos los elementos de M de la siguiente forma

$$M = (m_i) \; i=1, \ldots, t \quad = \{(x_j, y_j)\}_{j=1, \ldots, r}$$

$$\theta_r(M) = \sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{\substack{k=1,\ldots,r \\ l=1,\ldots,r}} \phi(x_k, y_k), (x_e, y_e)$$

siendo

$$\begin{cases} a_j = \text{Número de vecinos del vertice } (x_j, y_j) \\ \phi(,) = 1 \text{ si ambos vertices estan conectados} \\ \phi(,) = 0 \text{ si ambos vertices no estan conectados} \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} \Sigma a_j = \text{Numero de vecinos de los r vertices} \\ \Sigma a_j = 2 \times \text{Numero de conexiones entre los r vertices} \end{cases}$$

Este proceso lo efectua para todos y cada uno de los menores posibles, generando todas las t-plas ordenadas correspondientes a una reja de nxn vertices.

Cálculada la θ de un menor cualquiera M, $|M|=1$, investiga si $\theta(M)$ mejora o iguala la min θ_e calculadas hasta el momento, en cuyo caso M pasa a formar parte de los menores optimos.

Al final publica las θ y sus respectivos menores optimos.

De todo ello y teniendo presente el corolario del apartado 1.6 se obtuvieron los resultados que aparecen en las paginas 10 a 14.

Complejidad: el caso general del problema suma de arcos es NP (no polinómico), sin embargo este algoritmo reduce considerablemente el tiempo de computación respecto a un backtracking clásico.

SOLUCION DEL PROBLEMA SUMA DE ARCOS

Reja n x n, caso n=2

Reja

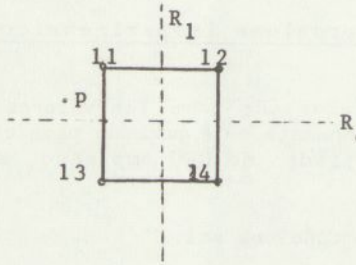
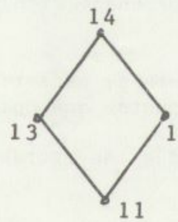
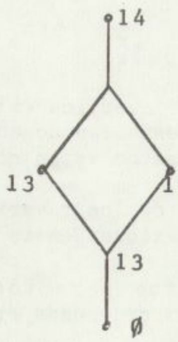


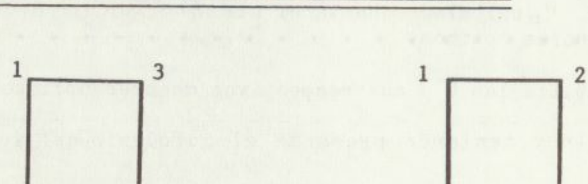
Diagrama Hasse



Reticula de menores



Numeraciones optimas para la suma de arcos



θ minimas (Soluciones isoperimetricas)

1	0	1	2	3	4
θ	0	2	2	2	0

ΣΔ minima

$$\Sigma\ \Delta = \Sigma\ \theta = 6$$

SOLUCION DEL PROBLEMA SUMA DE ARCOS

Reja n x n, caso n=3

Reja

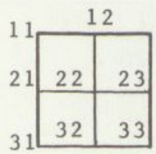
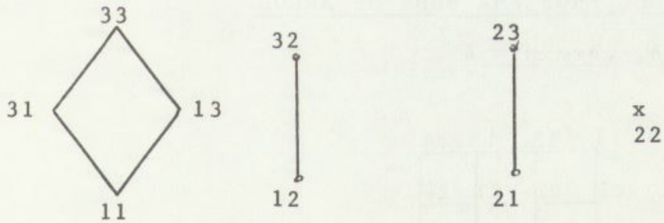
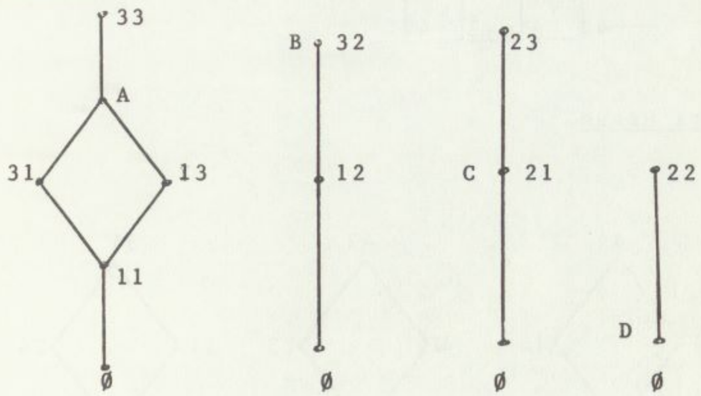


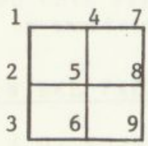
Diagrama Hasse

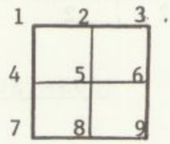


Reticulo de Menores



Numeraciones optimas para la suma de arcos





θ minimas

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
θ	0	2	3	3	4	4	3	3	2	0

ΣΔ minima

$$\Sigma\,\Delta = \Sigma\,\theta = 24$$

SOLUCION DEL PROBLEMA SUMA DE ARCOS

Reja n x n, caso n = 4

Reja

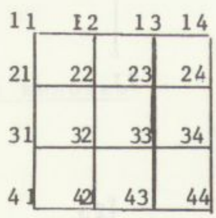
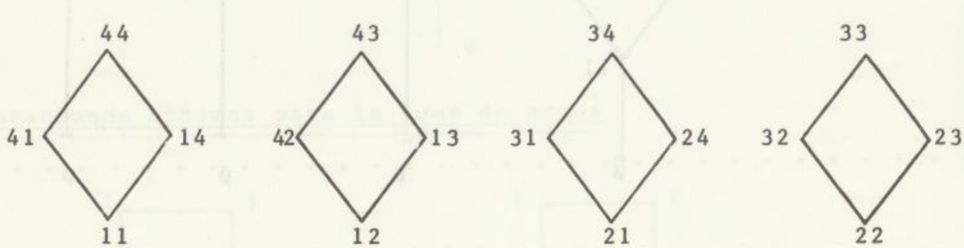
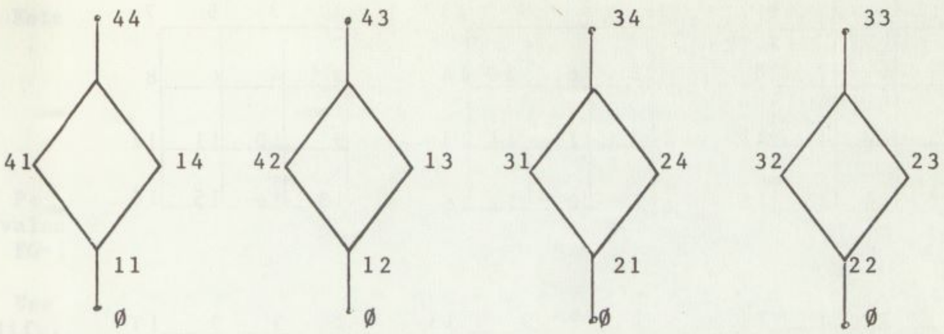


Diagrama Hasse





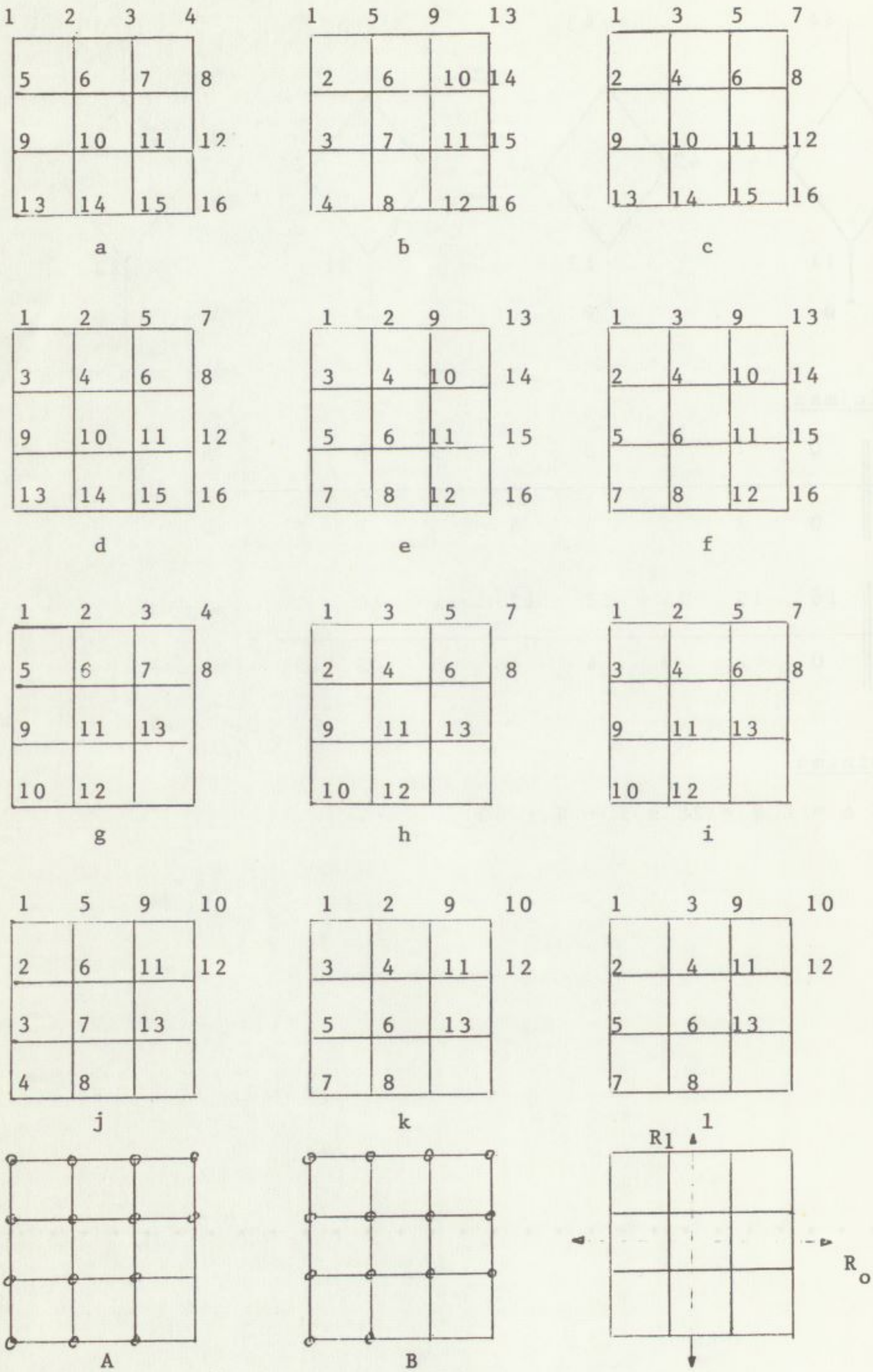
<u>θ minimas</u>

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
θ	0	2	3	4	4	5	5	5	4

1	16	15	14	13	12	11	10	9
θ	0	2	3	4	4	5	5	5

<u>ΣΔ minima</u>

$$\Sigma\ \Delta = \Sigma\ \theta = 28 \times 2 + 4 = 60$$


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16
a
1 5 9 13
2 6 10 14
3 7 11 15
4 8 12 16
b
1 3 5 7
2 4 6 8
9 10 11 12
13 14 15 16
c
1 2 5 7
3 4 6 8
9 10 11 12
13 14 15 16
d
1 2 9 13
3 4 10 14
5 6 11 15
7 8 12 16
e
1 3 9 13
2 4 10 14
5 6 11 15
7 8 12 16
f
1 2 3 4
5 6 7 8
9 11 13
10 12
g
1 3 5 7
2 4 6 8
9 11 13
10 12
h
1 2 5 7
3 4 6 8
9 11 13
10 12
i
1 5 9 10
2 6 11 12
3 7 13
4 8
j
1 2 9 10
3 4 11 12
5 6 13
7 8
k
1 3 9 10
2 4 11 12
5 6 13
7 8
l
A
B
R1
Ro

Este algoritmo origina 18 soluciones optimas que son:

1) {a, b, c, d, e, f } son 6 numeraciones
2) {g, h, i, j, k, l } originan 12 numeraciones
pasando a cada una de los dos menores alternativas de 15 elementos A ó B.

Podemos ver que las parejas del conjunto EQ dado a continuación son equivalentes
EQ={(a,b), (c,l), (d,f), (g,j), (h,k), (i,l) }

Una pareja (x,y) es equivalente si las dos numeraciones son análogas con la diferencia de que una se ha construido respecto a un eje de simetría (R_o) y la otra respecto al segundo eje de simetria (R_1) como se puede comprobar siguiendo las numeraciones paso a paso.

6. SUGERENCIAS Y CONCLUSIONES

6.1. Se ha desarrollado un algoritmo que permite resolver el problema isoperimetrico para cuadrados reja nxn, con la unica limitación del tiempo de CPU empleado, pues se estima que la solución de el cuadrado de 5x5 vertices requeriría unos 50 minutos de CPU, y ordenes superiores serían inabordables.

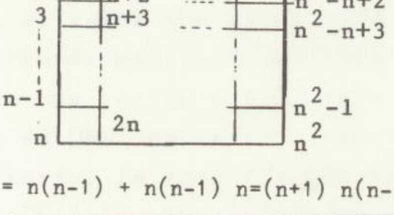
6.2. Como las soluciones halladas al problema isoperimetrico son todas conexas, se sugiere modificar el algoritmo trabajando solo con menores conexos para reducir el tiempo de computación y poder abordar problemas de orden n 5.

6.3. Las soluciones halladas prueban que para ordenes pequenos, las soluciones de θ son encajadas con lo que podemos encontrar (ver 1.6) soluciones del problema suma de arcos para estos grafos.

Esto permite suponer que el algoritmo también originará soluciones de Δ para cuadrados de n 5, sobre la base de soluciones de θ encajadas.

6.4. Las soluciones halladas muestran una simetria en las θ optimas, lo que permite sugerir que para calcular las θ y Δ optimos de un cuadrado reja nxn bastará con resolver los problemas isoperimetricos de arden l, siendo $o \leq l \leq k$; $k = E(n^2)$

6.5. Parece ser que una solución general del problema la constituye la numeración



$$\Sigma\Delta = n(n-1) + n(n-1)\ n=(n+1)\ n(n-1)$$

6.6. Se sugiere emplear el algoritmo con pequenas modificaciones para resolver el arco de rejas rectangulares nxn.

7. BIBLIOGRAFIA

Dewney, A.K.: The bandwith of a Graph, some recent results
Proc. 7th S.E. Conference on combinatorics, Graph Theory and Computing 273-288 (1976)

Diaz, J.: Complejidad de Problemas Combinatorios
Questiió 2,1, 35-49 (1978)

Harper, L.: Optimal Assignments of Numbers to vertices
SIAM J. Appl. Math 12, 1, 131-135 (1964)

Harper, L.: Optimal Numberings and Isoperimetric Problems on Graphs
J.Comb. Theory 1,3, 385-393 (1966)

Harper, L.: A necessary Condition on Minimal Cube Numberings
J. Appl. Prob. 4,397-401 (1967)

Harper, L.: Stabilization and the Edgesum Problem
ARS Combinatoria 4, 225-270, (1977)