UNA PRUEBA MUY SIMPLE DEL TEOREMA DE CRAIG

por J. F. Prida

Sea L un lenguaje numerable, del que únicamente se supondrá que contiene al menos uno de los símbolos lógicos de conjunción, disyunción, negación, cuantificador universal, cuantificador existencial respectivamente denotados por $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$. Las fórmulas de L serán identificadas con sus números de Gödel. Una teoría será un conjunto de fórmulas cerrado bajo la relación de consecuencia y se identificará, por tanto, con un subconjunto T de N que verifica para todo x:

(i) $$T \models x \quad \text{implica} \quad x \in T .$$

El teorema de Craig afirma: Si T es recursivamente enumerable, existe un conjunto recursivo primitivo A tal que

(ii) $$T = \{x \,/\, A \models x\} .$$

Demostración: Sea $R \subset N^2$ una relación recursiva primitiva tal que para todo x se verifique:

(iii) $$x \in T \quad \text{si y sólo si} \quad \exists y Rxy$$

y sea $Q \subset N^2$ una relación definida de cualquiera de las cinco siguientes formas

(iv)
$$\begin{array}{lll}
Qzx & \text{si y sólo si} & z = x \wedge x \wedge \ldots \wedge x \\
Qzx & \text{" " "} & z = x \vee x \vee \ldots \vee x \\
Qzx & \text{" " "} & z = \neg\neg \,..\, 2k \,..\, \neg\neg x \\
Qzx & \text{" " "} & z = \forall a \forall a \ldots \forall a x \\
Qzx & \text{" " "} & z = \exists a \exists a \ldots \exists a x
\end{array}$$

donde a es una variable que no aparece en la fórmula x.

Para cualquiera de las cinco posibles definiciones, Q es claramente recursiva primitiva y se verifica

(v) $$Qzx \text{ implica } \quad z \models x \quad \text{y} \quad x \models z .$$

Sea finalmente A el conjunto recursivo primitivo

(vi) $$A = \{ z \,/\, \exists_{o}^{z} x \, \exists_{o}^{z} y \, (Rxy \wedge Qzx) \} .$$

Demostraremos que se verifica (ii).

ad $\subset$:

Sea $x \varepsilon T$ y sea y tal que Rxy. Obviamente existe un z (con cualquiera de las posibles definiciones de Q) tal que $(z > x \wedge z > y \wedge Rxy \wedge Qzx)$, con lo que $z \varepsilon A$ y por tanto $A \models x$.

ad $\supset$:

Es claro que $A \subset T$, pues $z \varepsilon A$ implica que existen x e y tales que $Rxy \wedge Qzx$, con lo que $x \varepsilon T$ y $x \models z$, lo que implica a su vez por (i) que $z \varepsilon T$. Así pues, para todo x,

$$A \models x \implies T \models x \implies x \varepsilon T, \text{ q.e.d.}$$

BIBLIOGRAFIA

CRAIG, W, On axiomatizability within a system, Journal of Symbolic Logic, Vol. 18, 1953, pp. 30-32.