INSEPARABILIDAD RECURSIVA Y EFECTIVA

Por José F. Prida

La inseparabilidad recursiva de los conjuntos de fórmulas del cálculo de predicados de primer orden respectivamente insatisfactibles y finitamente satisfactibles fué demostrada en 1953 por Trachtenbrot [10]. A partir de la inseparabilidad recursiva de los conjuntos de máquinas de Turing que respectivamente ciclan y acaban parándose cuando actuan sobre una cinta vacía, Büchi probó en 1962 una versión más fuerte del teorema de Trachtenbrot [1], resultado que un año después fué utilizado por Lavrov para demostrar la inseparabilidad recursiva de las fórmulas válidas y finitamente refutables en la teoría de un predicado binario, irreflexivo y simétrico y, como consecuencia, en la teoría de retículos [4]. Análogos resultados fueron obtenidos al comienzo de los años sesenta por Ershov y Taitslin para otras teorías algebraicas elementales [2], [6], [7] y [8]. Mucho más recientemente, en 1980, de nuevo la inseparabilidad recursiva de los referidos conjuntos de máquinas de Turing ha servido a Manaster y Rosenstein para obtener teoremas de inseparabilidad relativos a "tiling problems" y a la teoría de retículos bidimensionales.

Todos los resultados citados pueden fortalecerse con relativa facilidad , probando que los conjuntos de máquinas de Turing en cuestión no sólo son recursivamente inseparables (como prueba Büchi), sino también efectivamente inseparables y observando que esta inseparabilidad fuerte se transmite mediante inmersión. Como consecuencia de la recursividad enumerable de todos los conjuntos citados, de su inseparabilidad efectiva se sigue su creatividad, mejor posible clasificación de acuerdo con un bien conocido teorema de Myhill.

La nomenclatura utilizada a continuación es la habitual, tomada de Hermes [3] para la teoría de las máquinas de Turing y de Rogers [9] para la teoría de las funciones recursivas parciales.

DF 1 Dos conjuntos disjuntos de números naturales A y B son recursivamente inseparables si no existe un conjunto recursivo C tal que $A \subset C \subset \overline{B}$.

DF 2 Dos conjuntos disjuntos de números naturales A y B son efectivamente inseparables (e.i.) si existe una función recursiva h tal que

(*) $$\forall x \forall y \ \ ((A \subset W_x \wedge B \subset W_y \wedge W_x \cap W_y = \emptyset) \longrightarrow h(x,y) \in \overline{W_x \cup W_y} \ .$$

Trivialmente se verifica:

TH 1 Dos conjuntos efectivamente inseparables son recursivamente inseparables.

Es también obvio que se verifica:

TH 2 Dos conjuntos recursivamente enumerables y efectivamente inseparables son creativos.

TH 3 Los conjuntos $A = \{x \ / \ \phi_x(x) = 0\}$ y $B = \{x \ / \ \phi_x(x) = 1\}$ son efectivamente inseparables.

Demostración:

Sea h una función tal que

$$\phi_{h(x,y)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \exists t(T_1xzt \wedge \forall s(s \lneq t \longrightarrow \neg T_1yzs)) \\ 0 & \text{si} \quad \exists t(T_1yzt \wedge \forall s(s < t \longrightarrow \neg T_1xzs)) \\ \uparrow & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Si $A \subset W_x$, $B \subset W_y$ y $W_x \cap W_y = \emptyset$, entonces $h(x,y) \notin W_x \cup W_y$.

En efecto:

$h(x,y) \in W_x \longrightarrow \phi_x(h(x,y))\downarrow$ y $\phi_y(h(x,y))\uparrow \longrightarrow$

$\exists t(T_1xh(x,y)t \wedge \forall s(s \lneq t \longrightarrow \neg T_1yh(x,y)s)) \longrightarrow$

$\phi_{h(x,y)}(x,y) = 1 \longrightarrow h(x,y) \in B \subset W_y \subset \overline{W_x}$, con lo que $h(x,y) \notin W_x$. Análogamente $h(x,y) \notin W_y$.

TH 4 Si A y B son conjuntos e.i., $A' \cap B' = \emptyset$ y existe una función recursiva f tal que para todo x

$$(**) \quad \begin{array}{l} x \in A \longrightarrow f(x) \in A' \\ x \in B \longrightarrow f(x) \in B' , \end{array}$$

entonces A' y B' son e.i.

Demostración:

Si g es una función recursiva tal que $W_{g(z)} = f^{-1}(W_z)$ y x, y son tales que

$A \subset W_x$, $B \subset W_y$, $W_x \cap W_y = \emptyset$,

se tiene:

i $\quad A \subset f^{-1}(A') \subset f^{-1}(W_x) = W_{g(x)}$

ii $\quad B \subset f^{-1}(B') \subset f^{-1}(W_y) = W_{g(y)}$

iii $\quad W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$,

siguiendose de i-iii que

$h(g(x), g(y)) \notin W_{g(x)} \cup W_{g(y)}$

y en consecuencia

$f(h(g(x), g(y))) \notin W_x \cup W_y$.

Sea M_x la máquina de Turing cuyo número de Gödel es x.

TH 5 Los conjuntos S = {x / M_x termina parandose cuando opera sobre una cinta vacía} y C = { x / M_x cicla cuando opera sobre una cinta vacía} son e.i.

Demostración

Sean A y B los conjuntos definidos en TH 3, M la máquina de Turing que computa de forma "standard" (cfr. (3), pp. 94-96) la función recursiva parcial $\psi(x) = \phi_x(x)$.

Si $\phi_x(x) = 0$ M realizará el programa

$$*\underbrace{||\ldots||}_{x+1}\underline{*} \longrightarrow *\underbrace{||\ldots||}_{x+1}*|\underline{*}$$

si $\phi_x(x) = 1$,

$$\underbrace{|||\ldots||}_{x+1}\underline{*} \longrightarrow *\underbrace{|||\ldots||}_{x+1}*||\underline{*}$$

Si f es la función recursiva tal que

$$M_{f(x)} = (|r)^{x+1}\ M\ l^2 \xrightarrow{1} r l$$

s obvio que se cumple:

$\varepsilon A \longrightarrow f(x) \varepsilon S$

$\varepsilon B \longrightarrow f(x) \varepsilon C$,

on lo que el teorema se sigue como consecuencia de TH 3 y TH 4.

A partir de TH 4 y TH 5 se obtienen sin dificultad resultados elativos a la inseparabilidad efectiva de "dominós" periódicos incoherentes, que a su vez pueden servir de partida para obteer una versión más fuerte (inseparabilidad efectiva en vez de ineparabilidad recursiva) del teorema de Büchi.

IBLIOGRAFIA

[1] Büchi, J.R. Turing-machines and the Entscheidungsproblem, Math. Ann. 148 (1962), pp. 201-213.

[2] Ershov, Yu.L. and Taitslin, M.A.. The undecidability of certain theories, A.i.L. 2, 5(1963), pp. 37-42

[3] Hermes, H., Enumerability, Decidability, Computability, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[4] Lavrov, I.A., The effective inseparability of the sets of identical true formulae and finitely refutable formulae for certain elementary theories, A.i.L. 2, 1(963), pp. 5-18.

[5] Manaster, A.B. and Rosenstein, J.G., Two-dimensional partial orderings: Undecidability, J.S.L., vol 45, 1(1980), pp. 133-143.

[6] Taitslin, M.A. Undecidability of the elementary theory of commutative cancellation semigroups, Sibirsk. Math. Zh. 3(1962), pp. 308-309.

[7] Taitslin, M.A., Effective inseparability of the sets of identically true and finitely refutable formulae of the elementary lattice theory, A.i.L. 1,3(1962), pp. 24-26

[8] Taitslin, M.A. Undecidability of the elementary theories of certain clases of finite commutative associative rings, A.i.L. 2, 3(1963), pp. 29-51.

[9] Rogers, H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, New York, 1967.

[10] Trachtenbrot, B.A. .On recursive separability. Doklady Akad. Nauk SSSR, 88 (1953), pp. 953-956.