Criterios parciales de logicidad

Partial criteria of logicality

Janusz MACIASZEK

Universidad de Lodz (Polonia)
janmac@uni.lodz.pl

Recibido: 15 de Febrero de 2005
Aceptado: 5 de Abril de 2005

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar una estrategia general para construir y conectar criterios de logicidad. Se distinguen tres criterios parciales (transparencia para expresiones, neutralidad tópica para relación de consecuencia, y universalidad para teorías). A continuación se formula un criterio global que es cumplido por la lógica clásica y la lógica intuicionista.

Palabras clave: Logicidad, constante lógica, consecuencia lógica, lógica intuicionista.

Abstract

The aim of this paper is show a global strategy for defining and connecting logical criteria. Three partial criteria are distinguished: transparency for expressions, topic neutrality for consequence relation, and universality for theories. A global criterion is suggested, and proved to be fulfilled by classical and intuionistic logic.

Keywords: Logicality, logical constant, logical consequence, intuionistic logic.

1. El problema de los limites de la lógica

La cuestión de los limites de la lógica es uno de los temas más interesantes tanto en la filosofía como en la historia de la lógica[1]. Comenzaré este trabajo distinguiendo dos problemas básicos asociados a ella:

1 El problema producido por la "logicidad": ¿cuales de las extensiones disponibles de la lógica de primer orden o de la lógica sentencial (lógica intensional, aritmética, lógica de segundo orden...) son todavía lógica, y cuales son teorías extralógicas?

2. El problema provocado por el desarrollo de las lógicas no clásicas que se presentan como alternativas a la lógica clásica (intuicionismo, lógica de la relevancia...): ¿cuál es la lógica "correcta?".

Entre las distintas tentativas de dar con una definición de la noción de logicidad podemos distinguir las tres estrategias siguientes, que considero más habituales: la primera se dirige directamente a las constantes lógicas, la segunda se dirige a la relación de consecuencia, y la tercera pone su punto de mira en la teoría (entendida como un lenguaje más un sistema deductivo más, optativamente, una semántica). Cada una de estas estrategias se basa en las intuiciones previas que el propio autor posee en torno a la naturaleza de las constantes lógicas, la relación de consecuencia, y las teorías. Para evitar los problemas de naturaleza terminológica propongo llamar a estas intuiciones de modo distinto según el objeto al que remiten:

1. para las constantes: transparencia,
2. para la relaciones de consecuencia: neutralidad tópica,
3. para las teorías: universalidad.

En los siguientes parágrafos se proporciona una explicación y un repaso histórico de estas tres intuiciones.

2. Transparencia de los símbolos

La noción de transparencia epistemológica es considerablemente vaga. Para empezar, se puede predicar tanto de functores (i..e. expresiones insaturadas) como de expresiones que no son functores (i.e. expresiones saturadas). Si se aplica a un functor α, la transparencia significa que no es necesario poseer ningún conocimiento particular en orden a determinar el correlato semántico de la expresión

[1] Para más notas bibliograficas véase la segunda parte de Villegas Forero y Maciaszek [1997].

$\alpha(\beta_1,..., \beta_n)$, siempre que los correlatos semánticos de los argumentos $\beta_1,..., \beta_n$ sean sabidos. Si se refiere a una expresión saturada, quiere decir que es posible saber su correlato sin ningún conocimiento particular.

Intuitivamente las "constantes matemáticas" como la operación + e incluso los números naturales son transparentes. Este es el punto de vista de aquellos logicistas que identifican "conocimiento particular" con conocimiento *a posteriori* y conocimiento *a priori* con conocimiento analítico. Por otro lado, en la aproximación kantiana *5, 7* y + no son considerados como transparentes, ya que la sentencia 5 + 7 = 12 no es *analítica* pero es *a priori*.

En muchas ocasiones en la literatura se han definidos nociones equivalentes a la de transparencia, si bien no se utilizaba el termino " transparencia" mismo. Así, Rudolf Carnap en *Meaning and Necessity* (Carnap [1956]) define la noción de **determinación lógica** (L-determinacy) de los designadores en un sistema S (entendido como un lenguaje con reglas semánticas para todos sus designadores):

> *17-1. A designator is L-determinate in S if and only if its extension can be determined on the basis of semántical rules of S alone, without any reference to facts* (Carnap 1956, p. 40)

En *Elements of Symbolic Logic* Hans Reichenbach (Reichenbach [1947]) divide las expresiones entre *denotativas* y *expresivas*. Los términos expresivos no denotan nada, ya que solo "pintan" o expresan algunas relaciones, p. ej. relaciones entre functor- argumento. En la frase inglesa *Peter is tall*, la copula *is* expresa la relación función-argumento entre el functor *tall* y su argumento *Peter*. En lenguaje de primer orden, la contraparte de esta sentencia es la fórmula *T(p)*, donde los parentesis *(...)* juegan el mismo papel que la copula *is*. La noción de ser expresiva es, desafortunadamente, tan vaga como el concepto de L-determinación:

> *The merely expressive terms perform a certain linguistic function, which however, does not consist in denoting. They produce certain sign structures and thus do something; but they do not say something. They can only express features existing outside the realm of signs.* (Reinchenbach [1947], p. 322).

Nos encontramos una aproximación similar en el trabajo de Christopher Peacocke *What is a lógical constant?* (Peacocke [1976]):

> *"a is a lógical constant iff it is noncomplex and, where the syntactic category of a is $t/s_1,...,s_n$, for any expressions $b_1,...,b_n$ of categories $s_1,...,s_n$ respectively, given knowledge of*
> *which sequences satisfy those b_i which have satisfaction conditions, and of*
> *which object each sequence assigns to those b_i which are input to the assignment function, and of*

the satisfaction condition or assignment clause for expressions of the form $a(g_1,...,g_n)$, one can know a priori which sequences satisfy $a(b_1,...,b_n)$, or which object any given sequence assigns to $a(b_1,...,b_n)$, in particular without knowing the properties and relations of the objects in the sequences." (Peacocke [1976], p. 225-226).

El primero en explicar la noción de transparencia epistemológica de manera no vaga fue Alfred Tarski, quien en *What are lógical notions?*[2] caracterizó los objetos lógicos como aquellos invariantes bajo permutaciones del dominio de interpretación. En la aproximación de Tarski, formulada originalmente para la teoría de tipos, las constantes lógicas incluyen también símbolos matemáticos, por lo que los filósofos de la lógica, que no estaban de acuerdo con las ideas del logicismo, aceptaron este criterio como condición necesaria pero no como condición suficiente para ser una constante lógica.

El criterio de Tarski, conocido actual ente como criterio de invariancia, aparece también en los trabajos de Mostowski [1957] y Lidström [1966] sobre cuantificadores, y en artículos sobre semántica modelo-teórica del lenguaje natural de autores como Van Benthem [1983, 84, 85], o Werstersthål [1984,85,89]. Igualmente, Timothy McCarthy [1981] desarrolló este criterio para constantes del lenguaje de primer orden y del lenguaje de las lógicas modales.

3. La neutralidad tópica de la relación de consecuencia

En *On the Concept of Lógical Consequence* Alfred Tarski usa la noción de neutralidad tópica para formular intuiciones en torno a la consecuencia lógica. Una sentencia α es una consecuencia de una clase de sentencias K si y sólo si se cumplen dos condiciones:

- No es posible que todas las sentencias de K sean verdaderas y α falsa
- La relación de consecuencia no puede depender de ningún conocimiento empírico, especialmente conocimiento acerca de los objetos a los que las sentencias de K se refieren.

Es decir, la relación de consecuencia debe ser válida y tópicamente neutral. Como la noción de neutralidad tópica es vaga, la definición de consecuencia lógica debe presuponer la división clásica de expresiones entre lógicas y extralógicas.

El procedimiento más prometedor para explicar la noción de neutralidad tópica

[2] Véase Tarski [1984]. El artículo fue publicado en 1984 por John Corcoran, cuando la invariancia ya había sido popular como criterio de logicidad en términos de la teoría de modelos. Pero la idea de Tarski provenía de principios de los treinta. Véase también la segunda parte de Villegas Forero, Maciaszek [1997].

recurre a la Teoría de la Demostración. En su articulo *What is logic?* (Hacking [1979]) Ian Hacking intenta dar cuenta de esta noción en términos de cálculos de Gentzen. La principal idea es que las reglas estructurales de Gentzen (i.e. la regla axiomática, dilución [atenuación] hacia la izquierda y hacia la derecha, y la regla de corte) son sin ninguna duda tópicamente neutrales. Pero, ¿qué propiedades deberían tener las reglas de introducción de un functor nuevo α para preservar la neutralidad de la relación de consecuencia? Hacking establece que toda prueba de un secuente con α debe ser construida solamente con tres tipos de reglas: las reglas de introducción de α, las reglas axiomáticas para fórmulas atómicas, y las reglas de dilución para fórmulas atómicas. Esta condición, que consiste en la eliminación de las reglas axiomaticas y de dilución [atenuación] para fórmulas compuestas y la eliminación de la regla de corte, fue denominada por Hacking **conservadurismo**.

Otra aproximación en términos de cálculos de Gentzen se debe a Costa Dosen (Dosen [1985]) quien analizó también sistemas de secuentes para la lógica intuicionista y la lógica relevante. La idea principal de Dosen es en esencia la misma que la de Hacking, pero en vez de la noción no ortodoxa de conservadurismo aplica la noción muy elaborada de *analysis* de G. E. Moore. Los resultados obtenidos por Dosen son también muy diferentes, ya que establece que los operadores modales de las lógicas modales básicas como K, F, S4 y S5 son constantes lógicas.

4. Universalidad de la teorías

La vaga noción de universalidad de las teorías lógicas puede hacerse retrotraer a Aristóteles, quien en los *Analíticos Primeros* mantiene que los mismos modos silogísticos pueden servir para hacer cualesquiera inferencias, y que la Silogística es una teoría universal que sirve para cualquier fin argumentativo.

En el *Tractatus* Wittgenstein caracteriza la lógica como la teoría más universal, ya que refleja la estructura general del mundo. Vale la pena recordar que Wittgenstein era un logicista, y consecuentemente no trazaba diferencias entre lógica y matemática.

Un filosofo que ha explicado la universalidad de la lógica de una manera exitosa, y cuyo planteamiento deseo adoptar, es Quine. En *Philosophy of Logic* (Quine [1960]) Quine mantiene que, para que la teoría sea universal (es decir, lo más general posible) han de cumplirse dos condiciones:

1. Las teorías deben ser formuladas en un lenguaje de primer orden con un único tipo de variables, o en un lenguaje proposicional de orden cero.

2. Los axiomas y las reglas de inferencia no pueden hacer diferencia alguna entre variables.

Al cumplimiento de las mencionadas condiciones lo denominaré la “ **condición de cuantificación unívoca**”.

Este criterio fue utilizado por Quine para establecer que las lógicas modales son extra-lógicas. Quine argumentó que los argumentos de los operadores modales no son sentencias o proposiciones, sino sus nombres o las variables que las sustituyen, y consecuentemente el lenguaje de la teoría modal tiene en realidad dos tipos de variables. Otro argumento a favor de Quine será presentado más adelante.

5. ¿Qué es un criterio de logicidad?

En los parágrafos anteriores hemos caracterizado tres criterios de logicidad dirigidos a distintos tipos de objetos (transparencia de las constantes lógicas, neutralidad tópica de la relación de consecuencia, y universalidad de las teorías lógicas). Como se ha podido ver, estos criterios han sido definidos de distintas formas, y han sido llamados con nombres diferentes por una amplia variedad de autores. Esta variedad de terminología ha dado lugar no solo a muchas equivocaciones, sino también a enfrentamientos entre distintas posiciones filosóficas. El principal problema, al respecto, es que algunos de estos criterios adolecen de la misma falta de claridad que las nociones informales que pretenden explicar. Además, no siempre ha quedado claro el campo en que es utilizado cada criterio por parte de los distintos autores, debido a que el adjetivo “lógico” se hace derivar de distintas acepciones del sustantivo respectivo. Para evitar este tipo de dudas en torno a nuestro uso de las palabras “criterios de logicidad”, comenzare precisando el significado que tendrá a lo largo de este articulo.

Por “criterio de logicidad” voy a entender una definición, en la cual el *definiendum* es un termino lógico y el de*finiens* es, dependiendo de a que se aplique el termino lógico, una explicación de la noción “universal”, una explicación de la noción “tópicamente neutral”, o una explicación de la noción “transparente”. Si “criterio de logicidad” tuviera una definición sinónima (aquella que establece una relación de identidad de significado entre definiens y definiendum) sería posible tratar como sinónimos las siguientes parejas de nociones: constante lógica-expresión transparente, relación de consecuencia lógica-relación de consecuencia tópicamente neutral, y lógica-teoría universal.

El tratamiento que propongo aquí es más cauto. Consiste en definir de modo parcial la noción de logicidad, usando los resultados de la explicación de las nociones de universalidad, neutralidad tópica y transparencia. En los siguientes apartados desarrollamos estas explicaciones parciales.

Como hemos visto, podemos predicar el termino “lógico”, o bien de expresiones, o bien de teorías, o bien de relaciones de consecuencia. Ahora bien, si una teoría T en un lenguaje L con la relación de consecuencia R y el conjunto de expresiones A del lenguaje L es tal que (1) en cada regla de R tienen un **rol esencial**[3] sólo las expresiones del conjunto A y (2) cada expresión del conjunto A tiene un **rol esencial** en al menos una regla de R, entonces las tres siguientes sentencias son equivalentes:

1. La teoría T es lógica,
2. La relación R es una relación de consecuencia lógica,
3. El conjunto A es un conjunto de constantes lógicas.

De este modo, cada uno de los tres criterios de logicidad antes referidos puede extenderse para ser predicado de teorías, constantes o expresiones.

6. Criterios semánticos

La invariancia es considerada generalmente solo como condición necesaria de logicidad, ya que en lenguajes suficientemente ricos normalmente hallamos expresiones que, a pesar de tener una denotación invariable, sólo para los logicistas serian consideradas constantes lógicas. Además, el criterio de invariancia se puede aplicar sólo a expresiones de teorías cuya semántica sea modelo-teórica. En efecto, la invariancia es una propiedad de un objeto extralinguístico, objeto que se puede llamar siguiendo a Tarski "objeto lógico". Para que ese objeto sea la denotación de una constante lógica se hace preciso limitar la clase de las funciones interpretativas. Frecuentemente, la propiedad que he denominado "constancia" era supuesta *implicite* o formulada junto con la propiedad de invariancia. Me explicaré. Al hablar de invariancia de los objetos lógicos, o de limitación de la clase de funciones interpretativas, estoy presuponiendo una ontología para la que existe un método de construcción de tipos semánticos, tales como elemento de conjunto, conjunto, clases de conjuntos, y distintos tipos de funciones, que son a su vez denotaciones posibles de las expresiones de las categorías sintácticas más relevantes. En consecuencia, la condición de invariancia debe ser relativizada a algunas condiciones modelo-teóricas y ontológicas, tales como las siguientes:

> *(criterio semántico) Si una teoría T posee una semántica modelo-teórica adecuada (con un dominio de interpretación y con los tipos semánticos construidos sobre este dominio), entonces siempre que una expresión a perteneciente al lenguaje de la teoría T es una constante lógica, a cumple los criterios de invariancia y constancia en relación al dominio de interpretación D.*

[3] Segun Adjukiewicz [1931] una expresion tiene un rol esencial en una regla de inferencia si y solo si al sustituirla por otra expresion de la misma categoria sintactica la regla puede dejar de ser valida.

Merece la pena notar que la definición parcial dada más arriba, y que nos proporciona un criterio negativo de logicidad, tiene la forma de la implicación reductiva hacia la derecha de Carnap[4].

Cuando decimos, pues, que el termino α cumple el criterio semántico, lo que queremos indicar, llanamente, es que no excluimos que el termino α sea lógico. El criterio semántico se puede aplicar a las conectivas proposicionales, para las cuales se cumple de manera trivial. Lo mismo ocurre tanto en la lógica proposicional clásica bivaluada, como en las lógicas proposicionales multivaluadas. En ellas, los valores de verdad pueden ser identificados con objetos modelo-teóricos invariables. Así, la verdad puede identificarse con el dominio de interpretación no vacío, o bien con el conjunto de todas las secuencias infinitas de todos los objetos del dominio, y la falsedad puede identificarse el conjunto vacío. Para lógicas multivaluadas podemos identificar los valores de verdad nuevos con otros objetos invariables cualesquiera, por ejemplo, con el conjunto de todas las secuencias formadas mediante la repetición de un elemento del dominio.

La condición de constancia juega un papel fundamental para el criterio semántico. Efectivamente, si no presupusiéramos la condición de constancia podría ocurrir que, al identificar la verdad con un objeto invariable como el dominio, y la falsedad con un objeto invariable como el conjunto vacío, y posteriormente asignar estos objetos como denotaciones a las letras proposicionales, obtuviéramos como resultado que las letras proposicionales son constantes lógicas. La condición de constancia excluye esta posibilidad, ya que a cada letra proposicional se le asignan denotaciones distintas en al menos dos funciones interpretativas. De ahí que la condición de constancia sea un complemento imprescindible para la condición de invariancia.

La condición de constancia es cumplida por la conjunción, por ejemplo, para la cual cada función interpretativa admisible asigna como denotación el mismo objeto lógico, recogido en la tabla de verdad que sigue:

f	y	$f \wedge y$
D	D	D
D	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	D	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

El criterio semántico es satisfecho por las conectivas proposicionales clásicas, cuantificadores clásicos, y el predicado de identidad. En el caso de la teoría de con-

[4] Adviértase que esta definición comparte sólo la forma de la implicacion reductiva de Carnap, y no la aplicacion pretendida por Carnap, a saber, la conexion entre predicados teoreticos, especialmente disposicionales, y predicados observacionales.

juntos y la aritmética, introducidas en el marco de la teoría de tipos, el criterio semántico es satisfecho por el predicado "ser un conjunto", "pertenecer a un conjunto" ($\in$), los números naturales, y los signos de las operaciones aritméticas tales como suma, resta, producto.... También los operadores modales, en las lógicas modales con semánticas de mundos posibles, satisfacen las condiciones de invariancia y constancia formuladas por McCarthy específicamente para las lógicas modales, lo que nos sirve de base para producir el siguiente criterio semántico de logicidad para operadores modales:

> *(criterio semántico modal) Si una teoría T posee una semántica de mundos posibles adecuada (con dominio de interpretación y los tipos semánticos construidos sobre este dominio), entonces siempre que una expresión* α *perteneciente al lenguaje de la teoría T es una constante lógica,* α *cumple los criterios de invariancia y constancia en relación al dominio de interpretación D y al conjunto de mundos posibles W .*

Este criterio es satisfecho de manera trivial por las conectivas lógicas cuyos correlatos semánticos no dependen de los mundos posibles. También son cumplidos por las conectivas y cuantificadores de una lógica intuicionista con semántica de mundos posibles, así como por las conectivas y cuantificadores de lógicas intensionales con semánticas de mundos posibles dotadas de relaciones de accesibilidad invariables respecto al conjunto de mundo posibles (transitiva, simétrica, reflexiva, etc...).

7. Criterios de la Teoría de la Demostración

La idea que descansa detrás de los criterios que veremos en este epígrafe es la necesidad de que las propiedades estructurales de la relación de consecuencia sean preservadas por parte las reglas de introducción y eliminación de las nuevas constantes lógicas. Hay aquí dos problemas. El primero viene dado por las reglas estructurales, las cuales, se supone, son tópicamente neutrales. La estructuralidad de esas reglas juega el papel de *explicatum* de la noción de neutralidad tópica, o así parece seguirse de la explicación de Dosen, y Hacking. Este punto no parece dar pié a objeciones respecto tanto a la lógica clásica como a la lógica intuicionista y a la lógica relevante de Anderson y Belnap. Sin embargo, la neutralidad tópica, en las lógicas intensionales, como algunas lógicas modales y temporales de las que existen versiones en sistemas de Gentzen, ya no resulta tan obvia.

El segundo problema se presenta a la hora de explicar la noción de "preservación de las propiedades estructurales", o "preservación de la neutralidad tópica". Como *explicatum* de tal noción no puede servir una noción clásica de ampliación conservadora del sistema. Dos respuestas más realistas son la de conservadurismo de las reglas para constantes lógicas, según Hacking, y la de posibilidad de análisis de categorías estructurales, según Dosen, Desafortunadamente ambas aproximaciones conducen a resultados distintos en el caso de las lógicas modales. Bajo mi punto de vista, la definición del termino "lógico" debe responder a dos demandas. La primera demanda es que las reglas estructurales son tópicamente neutrales. La segunda demanda es que el conservadurismo en el sentido de Hacking o la posibilidad de análisis según Dosen constituyen un *explicatum* de la noción de neutralidad tópica. El criterio de la teoría de la demostración tendría, consecuentemente, la forma siguiente:

> *Si la relación de consecuencia R, en cuyas reglas de inferencia los símbolos de A tienen un rol esencial, posee una versión en sistemas de Gentzen, entonces siempre que la relación R es una relación de consecuencia lógica todas las reglas de introducción y eliminación de los símbolos del conjunto A o bien son conservadoras en el sentido de Hacking o bien constituyen análisis de los símbolos del conjunto A en categorías estructurales en el sentido de Dosen.*

Del mismo modo que ocurría con respecto al criterio semántico, este ultimo criterio no nos indica directamente cuáles son los símbolos lógicos, sino tan solo nos señala términos que no son lógicos. A este respecto, la versión más restrictiva del criterio es la de Hacking, ya que no es satisfecho por los operadores modales. Ello se debe a que, para las lógicas modales, Hacking utiliza las reglas estructurales formuladas originalmente por Gentzen para la lógica clásica. Frente a él Dosen [1985] utiliza un conjunto de reglas especiales formuladas para secuentes de segundo orden (secuentes de secuentes). El criterio en versión de Dosen admite más teorías como lógicas debido a que su conjunto de reglas estructurales es más rico que el de Hacking.

Una suposición que se suele hacer es, de nuevo, la asunción de que, si la relación de consecuencia definida por las reglas estructurales tiene su versión en calculo de Gentzen, entonces dicha relación de consecuencia es tópicamente neutral. Teniendo en cuenta esta idea, propongo producir versiones extendidas del criterio a partir del siguiente esquema:

> *Si la relación de consecuencia R, en cuyas reglas de inferencia los símbolos de A tienen un rol esencial, posee una versión en sistemas de Gentzen en la que las reglas estructurales garantizan la neutralidad tópica de la relación, entonces siempre que la relación R es una relación de consecuencia lógica todas las reglas de introducción y eliminación de los símbolos del conjunto A conservan (por ejemplo en el sentido de Hacking, o, también como ejemplo, en el sentido de Dosen) la propiedad de neutralidad tópica de las reglas estructurales.*

Incidentalmente: el desarrollo extensivo de los sistemas de Gentzen conduce a un problema que me limitaré a señalar en este trabajo. En el criterio citado se presupone la logicidad de las reglas estructurales de Gentzen. Pero en los sistemas modernas de numerosas “lógicas” modales se hace uso de reglas estructurales diferentes de las propuestas por mismo Gentzen[5], para las cuales no está tan claro que se cumple la logicidad. ¿Cómo podemos aplicar nuestro criterio en estas lógicas? La respuesta queda fuera de este trabajo.

8. Criterio lingüístico

Según este criterio, originalmente formulado por Quine, tanto el lenguaje de una teoría lógica como el modo de definir la relación de consecuencia lógica no deben hacer distinciones entre las variables, y en consecuencia tampoco entre los objetos que pueden ser valores para estas variables. Y ello porque este tipo de distinción se contradice con la demanda de universalidad de la lógica. Para Quine, las teorías que pretenden ostentar el apelativo de “lógicas” deben ser formuladas en un lenguaje de primer orden con un solo tipo de variables, o en un lenguaje proposicional de orden cero. El lenguaje de primer orden con un solo tipo de variables permite ligar los cuantificadores únicamente con variables individuales, las cuales a su vez toman como valores cualquier objeto posible, y pueden también sustituir a cualquier constante individual. Tampoco seria admisible que los axiomas y las reglas de inferencia hagan diferencias algunas entre variables, como por ejemplo ocurre en la Aritmética de Peano y en la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Al cumplimiento de las mencionadas condiciones le denominare la “**condición de cuantificación univoca**”. La expresión “ orden del lenguaje” se puede utilizar únicamente en el caso de lenguajes en los que aparecen cuantificadores que ligan variables. El lenguaje de la Silogística Aristotélica, por ejemplo, así como algunas formalizaciones del lenguaje natural, no poseen cuantificadores ligando variables. De ahí, pues, que este criterio no pueda aplicarse para estos casos, que quedan indefinidos al respecto. El criterio lingüístico de Quine toma la forma siguiente:

> *Si una teoría extensional T es expresada en un lenguaje L con cuantificadores que ligan variables, entonces si la teoría T no satisface la condición de cuantificación unívoca, la teoría T no es lógica.*

Hagamos notar que este criterio, como los anteriores, constituye sólo un criterio negativo de logicidad, ya que únicamente señala algunas teorías como no lógicas, pero no asegura que las teorías que lo satisfagan sean lógicas.

[5] Véase Wansing [1989], donde se presenta los sistemas de varias decenas de reglas estructurales.

Veamos algunas aplicaciones de este criterio. El cálculo clásico de predicados con identidad satisface, como es obvio, la condición de cuantificación univoca, por eso el criterio lingüístico no excluye la logicidad de las conectivas proposicionales, cuantificadores y predicados de identidad clásicos. Por el contrario, todas las teorías basadas en el calculo de primer orden con identidad (Zermelo-Fraenkel, Peano...) efectúan distinciones entre las variables ligadas por cuantificadores, Y ello aunque no siempre se haga explicita esta distinción. En efecto, en algunas teorías extralógicas se utiliza sólo un tipo de variables, como en la aritmética de Peano, que posee únicamente variables de número, pero los axiomas específicos de esta teoría distinguen dentro de las variables de la lógica de primer orden aquellas que son variables de número. En los axiomas de Peano se cuantifica no para todas las variables, sino sólo para las variables numéricas. Por lo tanto, el criterio lingüístico excluye la logicidad de la aritmética, y consecuentemente excluye también la logicidad de todos los símbolos que tienen un rol esencial en sus teoremas, como las constantes de número, la función sucesor, los símbolos de las operaciones aritméticas, y predicados como “ser mayor que” o “ser par”.Una situación análoga tiene lugar en la Teoría de Conjuntos de primer orden. Los axiomas específicos de esta teoría distinguen dentro de las variables un subconjunto propio cuyos valores son conjuntos. Por este motivo, el criterio lingüístico excluye la logicidad de $\varnothing$, el predicado “ser conjunto”, “ ser subconjunto”, “pertenecer a un conjunto”, y operaciones entre conjuntos como unión, intersección, complemento, etc...

Nuestra anterior formulación del criterio lingüístico solamente tomaba en cuenta teorías extensionales. En cualquier caso, el criterio se puede extender también a las teorías intensionales bajo la condición de que todos los símbolos y expresiones intensionales sean definidas en un lenguaje extensional, o, alternativamente, bajo la condición de que sea posible traducir todas las sentencias del lenguaje a un lenguaje extensional. Una estrategia diferente para eliminar la intensionalidad consiste en el tratamiento de los símbolos intensionales como abreviaturas especificas de expresiones complejas pertenecientes a un lenguaje extensional con varios tipos de variables.[6] Siguiendo esta estrategia para una lógica modal con semántica de mundos posibles, el lenguaje extensional al que traducimos las expresiones del lenguaje modal ha de poseer un tipo especial de variables cuyos valores son mundos posibles. El operador intensional de necesidad es tratado ahora como una relación entre una expresión de un lenguaje extensional de primer orden con dos tipos de variables. Este hecho demanda la introducción de variables adicionales w_1, w_2..., que toman como valores mundos posibles, de la constante w^* que significa el mundo actual, del predicado R que significa la relación de accesibilidad, y del predicado E que significa una función de mundos posibles a dominios de objetos. La función de

[6] Véase Nowaczyk [1999], pp. 75-79.

traducción F del lenguaje intensional de primer orden a un lenguaje extensional de primer orden con dos tipos de variables se define por inducción[7]:

$$(P^k(x_{i1}, ..., x_{ik}))^F = P^k(x_{i1}, ..., x_{ik}, w^*)$$

En el caso especial de las letras proposicionales, pueden ser tratadas como predicados de cero argumentos P^{0F} $[(P^0)^F] = P^0(w^*)$.

$$(\neg a)^F = \neg(a)^F$$
$$(a \Rightarrow b)^F = (a^F \Rightarrow b^F)$$
$$(\forall x_i(a))^F = \forall x_i(E(x_i, w^*) \Rightarrow (a)^F)$$
$$(\ \ (a))^F = \forall w_j(R(w^*,w_j) \Rightarrow (a)^F[w^*/w_j])$$

donde la fórmula $E(x_i, w^*)$ significa "x_i existe en el mundo posible w^*", y $(a)^F[w^*/w_j]$ es el resultado de sustituir en la fórmula $(a)^F$ la constante w^* por la variable w_j.

Por supuesto, las lógicas modales no pasan el criterio lingüístico de Quine, ya que los operadores modales de necesidad y posibilidad se aplican a un conjunto de variables especiales.

9. Hacia los criterios globales de logicidad

Podemos, para simplificar, representar cada uno de los criterios de logicidad presentados, referidos a un símbolo α que tiene un rol esencial en los esquemas de inferencia de la teorías en cuestión de este modo:

$$Z_i \Rightarrow (L_i(a) \Rightarrow E_i)$$

donde Z_i es un presupuesto o restricción en el que se basa la teoría, Z_s es una restricción semántica, Z_d una restricción de teorías de la demostración, y Z_l una restricción lingüística. Por su parte L_i es el predicado "lógico" dentro del marco semántico, el marco demostrativo, o el marco lingüístico. Por ultimo E_i es el *explicatum* de la noción de transparencia, (E_s), neutralidad tópica (E_d) o universalidad (E_l).

Esta aproximación, que se basa en hacer depender el predicado "lógico" del modo en que se define cada lógica concreta, y que intenta caracterizar el predicado lógico de modo parcial, posee dos ventajas:

[7] Véase Nowaczyk [1999], p. 76.

1. No se define una noción de logicidad absoluta, independiente del modo de definir la lógica, sino sólo nociones parciales de logicidad de tipo semántico, de tipo demostrativo, o de tipo lingüístico. Como consecuencia, no se cierra el camino para la introducción de otros tipos de criterios.

2. Ninguno de estos criterios resuelve el problema de la logicidad cuando la suposición Z_i no se cumple. Esto no excluye que en una futura formulación de la teorías se cumpla tal suposición, y podamos aplicar el criterio, por ejemplo si en el futuro se construye una semántica adecuada en la que se puede determinar la invariancia, o se obtiene una relación de inferencia que pueda ser formalizada al modo de Gentzen.

Los criterios establecidos se aplican a unas teorías concretas, pero ¿es posible hablar de los criterios aplicados a clases de teorías equivalentes que es lo que habitualmente entendemos bajo rótulos como lógica clásica, lógica intuicionista, teorías de conjuntos, o aritmética?. Desde el punto de vista formal la respuesta es positiva. Los tres criterios implican el siguiente:

$$(Z_s \wedge Z_d \wedge Z_l) \Rightarrow ((L_s(a) \wedge L_d(a) \wedge L_l(a)) \Rightarrow (E_s \wedge E_d \wedge E_l))$$

La lógica clásica, entendida como la unión de una clase de teorías axiomáticas equivalentes, un sistema de calculo de Gentzen, y una semántica de corte tarskiano, cumple este criterio de forma global. Por ello, la lógica clásica constituye, como subrayan muchos autores que han trabajado sobre logicidad, el "corazón" incuestionable de la lógica. El problema abierto en este momento es decidir cuales de las lógicas no clásicas o de las extensiones de la lógica clásica cumplen el criterio global. Como hemos visto, este criterio no es satisfecho por las extensiones de la lógica clásica tales como la Aritmética de Peano, las lógicas modales... Vale la pena ahora, pues, investigar si es satisfecho o no por las lógicas alternativas.

10. La logicidad de los símbolos lógicos en la Lógica Intuicionista

La lógica intuicionista se puede definir ya como un sistema axiomático (Heyting) ya como un sistema de Gentzen. También posee una semántica de mundos posibles adecuada. El calculo intuicionista cumple el criterio lingüístico (Quine) y también el criterio demostrativo Dosen. Sin embargo, a primera vista no parece que se pueda aplicar el criterio semántico, ya que tenemos dos tipos de objetos en la semántica, a saber, elementos del dominio y mundos posibles. Aunque se puede utilizar el criterio semántico en versión intensional de McCarthy, la analogía con las lógicas modales puede infundir sospechas sobre si en la axiomática intuicionista se esconden diferencias "invisibles" entre variables. En un lenguaje intuicionista se pueden sustituir las constantes lógicas intuicionistas por las constantes clásicas, introduciendo, como hicimos en el parágrafo anterior para las lógicas modales, variables cuyos valores son mundos posibles. En tal caso el intuicionismo no pasaría el criterio lingüístico.

Es posible eliminar esta dificultad mostrando que es posible definir una semántica intuicionista sin mundos posibles. La semántica que presentamos a continuación utiliza sólo un tipo de objetos.[8]

> Sea $\boldsymbol{D}$ una familia de conjuntos parcialmente ordenados por una relación de inclusión. Sea el conjunto $\boldsymbol{D} = \bigcup\{D: D \in \boldsymbol{D}\}$ el dominio de interpretación. Cada uno de los conjuntos $D \in \boldsymbol{D}$ corresponde al dominio en un mundo posible de la semántica kripkeana.
>
> Sea $SEQ(D)$ un conjunto de secuencias infinitas de elementos del conjunto D tales que $SEQ(D) = D^w - \bigcup\{D'^w; D' \in \boldsymbol{D}, D \not\subseteq D'\}$, donde w es el conjunto de los números naturales.

Como se puede ver, todos los conjuntos de secuencias $SEQ(D)$ son disjuntos, y por ello cada secuencia pertenece solo a un conjunto $SEQ(D)$. Por ello, cada secuencia representa unívocamente el conjunto $SEQ(D)$ al que pertenece, señalando de esta manera un mundo posible.

> Sea $SEQ(\boldsymbol{D}) = \bigcup\{SEQ(D), D \in \boldsymbol{D}\}$ y sea $[s]$ un conjunto de dos objetos que pertenecen a la secuencia s Î $SEQ(D)$. El conjunto $[s]$ no tiene que ser obligatoriamente un elemento de la familia $\boldsymbol{D}$, pero si ha de ser un subconjunto de su elemento D. Es fácil mostrar que para secuencias cualesquiera s y s'de un conjunto $SEQ(\boldsymbol{D})$ y para cada $D \in \boldsymbol{D}$, si $[s] \subseteq [s'] \subseteq D$ y s Î $SEQ(D)$, entonces $s' \in SEQ(D)$.

Ahora definimos las relaciones posibles entre secuencias. Estas relaciones dependen de subconjuntos terminados $\boldsymbol{V}$ de un conjunto de números naturales. Sea $s \in SEQ(D)$ y $s' \in SEQ(D')$ y $D, D' \in \boldsymbol{D}$.

1. $s \approx_V s'$si y solo si $D = D'$ y para cualquier $i \in \boldsymbol{V}$, $pr_i(s) = pr_i(s')$,
2. $s <_V s'$ si y solo si $D \subset D'$ y para cualquier $i \in \boldsymbol{V}$, $pr_i(s) = pr_i(s')$,
3. $s \leq_V s'$ si y solo si $D \subseteq D'$ y para cualquier $i \in \boldsymbol{V}$, $pr_i(s) = pr_i(s')$,

donde $pr_i(s)$ significa el elemento numero i de la secuencia s.

Los conjuntos $\boldsymbol{V}$ serán entendidos como los conjuntos de índices de variables en las fórmulas del lenguaje, o bien como representaciones de tales conjuntos de varia-

[8] Vease Maciaszek [1999].

bles. Si $\boldsymbol{V}$ es un conjunto vacío, ignoramos el índice "$\boldsymbol{V}$". Sea para cada $\boldsymbol{V}$ la relación $\leq_V$ una relación **reflexiva** y **transitiva** en $SEQ(\boldsymbol{D})$ y tal que la relación $\approx_V$ esta incluida en $\leq_V$. La relación $\approx$ (cuando V es un conjunto vació) es una relación de equivalencia en $SEQ(\boldsymbol{D})$.

La estructura secuencial $\boldsymbol{F}$ es un par $<SEQ(\boldsymbol{D}), \{\leq_V: \boldsymbol{V}$ es un subconjunto finito de $w\}>$, y el **modelo secuencial** $\boldsymbol{M}$ es un par $<s, \boldsymbol{F}>$, donde $s \in SEQ(\boldsymbol{D})$. A cada estructura $\boldsymbol{F}$ le asignamos el conjunto de **funciones interpretativas**. Para cada modelo $\boldsymbol{M} = <s, \boldsymbol{F}>$, donde $s \in SEQ(D)$ y $D \in \boldsymbol{D}$, cada función interpretativa A_F asigna:

1. a las variables individuales los elementos de D,
2. a los predicados de n argumentos los subconjunto de D^n,
3. a las fórmulas 0 o 1.

Si x es un correlato semántico asignado a un símbolo a por una función interpretativa I_F para una secuencia s, entonces vamos a escribir $I_F(a)(s) = x$. Como caso especial, para cada predicado de n argumentos P^n y para cada conjunto de variables de n-elementos $\{x_{i1}, ..., x_{in}\}$,tenemos que $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s) = 1$ si y solo si $<I_F(x_{i1})(s), ..., I_F(x_{in})(s)> \in I_F(P^n)(s)$, para cada s $\in$ SEQ($\boldsymbol{D}$).

Ahora vamos a introducir las restricciones intuicionistas a la clase de funciones interpretativas admisibles.

1. Para la variable x_i, $I_F(x_i)(s) = pr_i(s)$ para cada $s \in SEQ(\boldsymbol{D})$;
2. Para el predicado P^n y las secuencias $s, s' \in SEQ(\boldsymbol{D})$:
   si $s \approx s'$, entonces $I_F(P^n)(s) = I_F(P^n)(s')$,
   si $s \leq s'$, entonces $I_F(P^n)(s) \subseteq I_F(P^n)(s')$;
3. Para la letra proposicional p_i y las secuencias $s, s' \in SEQ(\boldsymbol{D})$:
   si $s \approx s'$, entonces $I_F(p_i)(s) = I_F(p_i)(s')$,
   si $s \leq s'$, entonces $I_F(p_i)(s) \leq I_F(p_i)(s')$.

Es fácil ver que para un predicado cualquiera P^n y un conjunto de variables $V = \{x_{i1}, ..., x_{in}\}$, si $s \approx_V s'$, entonces $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s) = I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s')$ y si $s \leq_V s'$ y $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s) = 1$, entonces $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s') = 1$. Además, si $I_F(f)(s) = 1$, entonces para cada s' tal que $s \leq_{FV(f)} s'$, $I_F(f)(s') = 1$, donde $\boldsymbol{FV}(f)$ es el conjunto de variables libres en f.

Para las constantes lógicas intuicionistas se introducen las siguientes restricciones en la clase de funciones interpretativas:

1. $I_F(j \wedge y)(s) = 1$ si y solo si $I_F(j)(s) = 1$ y $I_F(y)(s) = 1$,
2. $I_F(j \vee y)(s) = 1$ si y solo si $I_F(j)(s) = 1$ o $I_F(y)(s) = 1$,
3. $I_F(\neg j)(s) = 1$ si y solo si para cada s' tal que ?e $s \leq_{FV(j)} s'$, $I_F(j)(s') = 0$,
4. $I_F(j \Rightarrow y)(s) = 1$ si y solo si para cada s' tal que ?e $s \leq_{FV(j) \cup FV(y)} s'$,
5. $I_F(j)(s') = 0$ o $I_F(y)(s') = 1$,
6. $I_F(\forall x_i j)(s) = 1$ si y solo si para cada s' tal que ?e $s \leq_{FV(\forall xi j)} s'$, $I_F(j)(s') = 1$,
7. $I_F(\exists x_i j)(s) = 1$ si y solo si para al menos un s' tal que $s \approx_{FV(\exists xi j)} s'$, $I_F(j)(s') = 1$.

Las siete reglas que acabamos de dar para las fórmulas con constantes intuicionistas se convierten en las reglas para las constantes clásicas cuando la familia ***D*** es un conjunto unitario. Desde este punto de vista la lógica clásica es un caso especial de lógica intuicionista. Ya que las reglas de satisfacción para las fórmulas con constantes intuicionistas garantizan la satisfacción de la condición de invarianza en relación a un dominio de objetos, obtenemos como resultado que la lógica intuicionista cumple el criterio global de logicidad.

Bibliografía

Ajdukiewicz K, (1931), *O znaczeniu wyra?e? (De la significación de los expresiones)*, Ksi?ga Pami?tkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, p. 31 – 77,

Benthem J. van, (1983) *Determiners and Logic*, “Linguistics and Philosophy”, 6, p. 447-478.

Benthem J. van, (1984) *Questions about Quantifiers*, “The Journal of Symbolic Logic”, 49, p. 443-466.

Benthem J. van, (1985) *Essays in Lógical Semantics*, D. Reidel, Dordrecht.

Carnap R., (1957) *Meaning and Necessity*, University of Chicago Press, Chicago, (la segunda edicion)

Dosen C., (1985) *Sequent-Systems for Modal Logic*, “The Journal of Symbolic Logic”, 50, p. 149-168.

Dosen C., (1989) *Lógical Constants as Punctuaction Marks*, “Notre Dame Journal of Formal Logic”, 30, p. 362-381.

Hacking I., (1979) *What is Logic?*, “The Journal of Philosophy”, 76, p. 285-319.

Lindström P., (1966) *First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers*, “Theoria”, 32, p. 186-195.

Maciaszek J., (1999) *A Note on the Concept of Satisfaction in Intuitionistic Predicate Calculous*, “Bulletin of the Section of Logic”, 28, pp. 215-223.

McCarthy T., (1981) *The Idea of a Lógical Constant*, “The Journal of Philosophy”, 78, p. 499-523.

Mostowski A., (1957) *On a generalization of quantifiers*, “Fundamenta Mathematicae”, 44, p. 12-36.

Nowaczyk A., (1999) *Gramatyka i prawda (La gramatica y la verdad)*, Biblioteka My?li Semiotycznej, Warszawa.

Peacocke Ch., (1976) *What is a Lógical Constant?*, “The Journal of Philosophy”, 73, p. 221-240.

Quine W. V. O., (1970) *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, New Jersey. Reichenbach H., [1947] *Introduction to Symbolic Logic*, MacMillan, New York.

Reichenbach, H. (1947): Elements of Symbolic Logic, New York, Macmilan.

Tarski A., (1986) *What are lógical notions?*, “History and Philosophy of Logic”, 7, p. 143-154.

Villegas Forero L., Maciaszek J., (1997) *Tarski on lógical notions,* “Lógica Tringuli”, 1, Nantes.

Wansing H., (1998) *Display Modal Logic*, Kluwer, Dordrecht.

Westerståhl D., (1984) *Some Results on Quantifiers*, “Notre Dame Journal of Formal Logic”, 25, p. 152-170.

Westerståhl D., (1985) *Lógical Constants in Quantifier Languages*, “Linguistics and Philosophy”, 8, p. 387-413.

Westerståhl D., (1989) *Quantifiers in Formal and Natural Languages*, en *Handbook of Philosophical Logic*, t.IV, D. Gabbay, F. Guenthner (eds.), D. Reidel, Dordrecht, p. 1-131.

Wittgestein L., (1921) *Logisch-philosophische Abhandlung*, [w:] Annalen der Naturphilosophie, v.14, p. 185-262.