

## De Ptolomeo a Hering: percepción binocular

Carlos Alberto Cardona<sup>1,2</sup>

Recibido: 26/02/2020 / Aceptado: 17/07/2020

**Resumen.** Euclides propuso trazar pirámides (o conos) como artefactos para facilitar el estudio de la percepción visual. El artefacto supone que el objeto visto moldea la base de una pirámide en cuyo vértice se encuentra el ojo que percibe. El artefacto enfrenta una seria dificultad cuando advertimos que la percepción visual se lleva a cabo con dos ojos que cooperan. El artículo analiza dos intentos de modificar el artefacto euclidiano para que siga prestando un servicio productivo sin renunciar a las presuposiciones centrales. Estos intentos, distanciados en el tiempo, corresponden a los estudios clásicos de la visión binocular de Ptolomeo y los aportes de Ewald Hering en el siglo XIX.

**Palabras claves:** pirámide visual, visión binocular, ojo, horóptero, cíclope.

### [en] From Ptolemy to Hering: binocular perception

**Abstract.** Euclid proposed to trace pyramids (or cones) as artifacts to facilitate the study of visual perception. The artifact assumes that the object seen delimits the base of a pyramid at the apex of which is the perceived eye. The artifact faces a serious difficulty when we notice that visual perception is carried out with two cooperating eyes. The article discusses two attempts to modify the Euclidean artifact to make it work without giving up the central assumptions. These attempts correspond to the classical studies of Ptolemy's binocular vision and Ewald Hering's contributions in the 19th century.

**Keywords:** visual pyramid, binocular vision, eye, horopter, cyclops.

**Sumario.** 1. Ptolomeo. 2. Hering. 3. Epílogo. 4. Referencias.

**Cómo citar:** Cardona, C. A. (2021): De Ptolomeo a Hering: percepción binocular, en *Revista Anales del Seminario de Historia de la Filosofía* 38 (2), 267-279.

El mundo detona en nosotros simulacros visuales. A partir de esos simulacros organizamos nuestra acción, bien sea para alejarnos de los peligros que acechan o para acercarnos a las bondades que se insinúan. No dejamos de sentir curiosidad intelectual por esa faena formidable. Los griegos, por ejemplo, se debatían entre dos enfoques para dar cuenta de la percepción visual. De un lado, los extramisionistas, con Platón a la cabeza, creían que del ojo emanan ciertos efluvios, hermanados con la luz, que, al entrar en contacto con los objetos y la luz exterior, detonan la contemplación de un cuerpo afín.<sup>3</sup> De otro lado,

los intramisionistas, con Aristóteles a la cabeza, creían que el objeto observado modifica el aire circundante; éste, a continuación, detona un proceso de multiplicación de efectos causales que puede llegar a producir en un alma alteraciones semejantes que actualizan la forma sensible del objeto inicial.<sup>4</sup> No resulta fácil identificar en Grecia un escenario neutral para dirimir este tipo de discusión.

Euclides, en el siglo III a. C., propuso un artefacto conceptual a través del cual podíamos organizar la investigación en torno a la percepción visual aplazando las

<sup>1</sup> Escuela de Ciencias Humanas, Universidad del Rosario Bogotá-Colombia.  
[carlos.cardona@urosario.edu.co](mailto:carlos.cardona@urosario.edu.co)  
<https://orcid.org/0000-0003-2378-4808>

<sup>2</sup> Las figuras en el artículo con el icono (M) cuentan con una modelación en el software GoeGebra. Se tiene acceso a la modelación activando el enlace correspondiente o dirigiéndose al enlace que se agrega en la nota al pie correspondiente a cada figura. En cada caso, se indican los puntos movibles.

<sup>3</sup> Platón (trad. en 1992). *Timeo*. En *Diálogos VI*. Madrid: Editorial Gredos; 45b2 – 46a2. Algunos antecedentes al enfoque extramisionista remontan a Pitágoras y, con algunas dudas, a Empédocles; cfr. D. Lindberg (1976), *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*, Chicago: The University of Chicago Press, pp. 3-6.

<sup>4</sup> Aristóteles (trad. en 1978). *Acerca del alma*. Madrid: Editorial Gredos; 418a5. Anterior a Aristóteles, los atomistas defendieron que desde los objetos se emitían *eidola* o *simulacra* que al llegar al ojo causaban la contemplación de formas sensoriales; cfr. D. Lindberg *op. cit.*, pp. 2-3.

discusiones metafísicas asociadas con los mecanismos causales que la hacen posible. El uso de dicho artefacto introdujo una forma peculiar de hacer las preguntas de investigación mientras permite cierta neutralidad frente a los compromisos ontológicos que podrían contribuir a desentrañar el mecanismo último de la percepción visual. Si bien es cierto que Euclides usa un lenguaje extramisionista, también habría podido recomendar el uso de la propuesta en un lenguaje intramisionista. Su tratado de *Óptica* es un compendio de 7 definiciones y 58 proposiciones derivadas. Las tres primeras definiciones rezan así:<sup>5</sup>

- a) Las rectas trazadas desde el ojo se pueden prolongar a lo largo de grandes extensiones.
- b) La figura, objeto de contemplación, se halla en la base del cono [pirámide] que tiene al ojo por vértice y a las rectas desde allí trazadas por el contorno del mismo.
- c) Se ven los objetos en los que los rayos así trazados inciden y no se ven aquellos en los que dichos rayos no inciden.

Los rayos trazados por Euclides pueden interpretarse como el trayecto de efluvios que viajan o bien desde el ojo hasta el objeto o bien desde el objeto hasta el ojo. El hecho de que el autor asuma que los rayos son trazados, sugiere que su propuesta, a la luz de una categoría de Arianna Borelli (2017), se pueda interpretar a la manera de una herramienta de papel.<sup>6</sup> A partir de las siete definiciones, Euclides infiere 58 proposiciones que ofrecen claves para explicar una gama amplia de fenómenos perceptuales. Por ejemplo, anticipar que objetos de igual tamaño ubicados a diferentes distancias se despliegan con diferentes amplitudes angulares (props. 4, 5, 7, 53, 56); o esperar que espacios paralelos vistos de lejos parezcan convergentes (prop. 6); o advertir que las dimensiones aparentes de los objetos no son inversamente proporcionales a las distancias entre ellos (prop. 8).

La herramienta de papel enfrenta una primera dificultad que demanda ajustes serios.<sup>7</sup> Nosotros, por lo general, contemplamos el mundo con dos ojos que cooperan. En ese orden de ideas, la pirámide visual euclidiana –o el cono– es un artefacto que sólo puede usarse en circunstancias restringidas. En el artículo nos ocuparemos de dos enfoques complementarios que sugieren modificaciones que nos permiten insistir en el uso de la herramienta de papel. En primer lugar, la propuesta de Ptolomeo en el siglo II d. C., y, en segundo lugar, la contribución del fisiólogo alemán Ewald Hering a finales del siglo XIX.

## 1. Ptolomeo

Ptolomeo (ca. 100 d. C. – ca. 170 d. C.) asumió la defensa del artefacto euclidiano al introducir importantes modificaciones que hacen más rica su aplicación. En la defensa, Ptolomeo acompañó los compromisos extramisionistas que Euclides compartía con Platón. Al autor se le atribuye un compendio de óptica que posiblemente corresponde a los periodos de mayor madurez del pensador. La traducción del árabe al latín fue obra de Eugenio de Sicilia (ca. 1160 d. C.). Desafortunadamente esta edición contaba con dos inmensas lagunas: la ausencia del libro I y la mutilación de fragmentos importantes del libro V.<sup>8</sup> Dicho compendio consta de 5 libros. El primero, desaparecido, debía ocuparse tanto de la manera como la luz y el flujo visual interactúan, como de las diferencias entre los dos.<sup>9</sup> El segundo se ocupa de las propiedades visibles –intrínsecas, primarias y secundarias– y ofrece interesantes explicaciones para el origen de algunas ilusiones ópticas. El tercero se ocupa de la reflexión y formación de imágenes en espejos planos y en espejos convexos. El cuarto se encarga de los espejos cóncavos. El quinto, último e incompleto, pretende ocuparse de la refracción de los rayos visuales.

Crombie sostiene que Ptolomeo acogió el estilo matemático de Euclides y lo complementó con una exigencia de control experimental. El historiador formula su tesis en los siguientes términos:

Euclides y otros matemáticos aspiraron idealmente a desarrollar su investigación sobre los fenómenos [ópticos] de forma puramente teórica con su modelo geométrico o aritmético. Más tarde se dieron cuenta, como Ptolomeo en su *Óptica*, que al explorar fenómenos complejos, las hipótesis deben ser controladas por medio de la observación y el experimento, para decidir si un posible modelo teórico produce las consecuencias que aparecen en el mundo real.<sup>10</sup>

Crombie quiere ver en Ptolomeo a un investigador moderno, o a una anticipación de la Modernidad. Como veremos más adelante, es cierto que Ptolomeo se vale provechosamente de la observación y de ciertos modelos de experimentación controlada. Pero no lo hace con la expectativa de tener la experimentación como norma de control de las especulaciones teóricas. La seguridad del uso de modelos geométricos se presupone antes de que la experiencia la autorice. El investigador acude a la experiencia; pero no lo hace con el temor de verse obligado a declinar en sus compromisos teóricos.

<sup>5</sup> Euclides (trad. en 2000). *Óptica*. Madrid: Editorial Gredos, pp. 135-136.

<sup>6</sup> Borelli, Arianna (2017). Optical Diagrams as “Paper Tools”: Della Porta’s Analysis of Biconvex Lenses from *De refractione* to *De telescopio*. En A. Borelli, G. Hon y Y. Zik (eds.), *The Optics of Giambattista Della Porta (ca. 1535-1615): A Reassessment* (pp. 57-96). New York: Springer.

<sup>7</sup> Una descripción detallada de la evolución del programa de investigación que fija el uso del instrumento euclidiano puede seguirse en C. Cardona (2020), *La pirámide visual: evolución de un instrumento conceptual*, Bogotá: Editorial Universidad del Rosario.

<sup>8</sup> Wilbur Knorr acopió una serie importante de argumentos que arrojan dudas acerca de la autoría del tratado de *Óptica* atribuido a Ptolomeo (cfr. W. Knorr (1985), Archimedes and the pseudo-Euclidean catoptrics: early stages in the ancient geometric theory of mirrors. *Archives internationales d’histoire des sciences*, 35, 28-105). Haremos caso omiso del debate y asumiremos que el texto pertenece efectivamente a Ptolomeo.

<sup>9</sup> Esto se infiere de la primera entrada en el Libro II; cfr. Ptolomeo (trad. en 1996), *Optics*. En M. Smith (edit. y trad.), *Ptolemy’s Theory of Visual Perception* (pp. 67-261). Philadelphia: The American Philosophical Society, II, § 1.

<sup>10</sup> Crombie, A. C. (1986/1993). *Estilos de pensamiento científico a comienzos de la Europa Moderna*. Valencia: Seminari d’estudis sobre la ciència. Trad. Josep Lluís Barona.

La actividad visual, asume Ptolomeo, percibe corporeidad, tamaño, color, forma, lugar, actividad y reposo.<sup>11</sup> Esta actividad exige dos condiciones. De un lado, se precisa de alguna iluminación y, del otro, algo opaco debe bloquear el paso del flujo visual. Aquello que bloquee el paso de dicho flujo, a saber, algo corpóreo, es lo que resulta ser intrínsecamente visible. Si, en lugar de bloquear, el objeto permite ser atravesado por el flujo visual, no nos percatamos visualmente de la existencia de dicho objeto interpuesto. El color hace parte de lo primariamente visible. Las propiedades restantes son visibles en sentido secundario, pues se aprehenden o bien atendiendo los contornos del objeto coloreado –forma, tamaño–, o bien atendiendo un marco de relaciones entre objetos compactos coloreados –lugar, actividad, reposo–.<sup>12</sup>

En relación con el lugar en donde se capta la fuente que estimula la visión, Ptolomeo aduce que la distancia desde el objeto hasta el espectador se percibe a partir de una propiedad interna del rayo visual, a saber, su extensión. Lo que es visto a través de un rayo más extenso aparecerá como un objeto más alejado.<sup>13</sup> Así las cosas, ver un objeto distante es, literalmente, tocarlo con una prótesis que se puede extender y que deja un registro de qué tanto se ha extendido.<sup>14</sup> El tamaño del objeto se infiere a partir de una relación funcional compleja que depende de tres variables: distancia objeto-observador, amplitud angular del cono visual que aprehende el objeto en su conjunto y disposición del objeto frente al observador. Por disposición se entiende el arreglo con respecto al eje del cono visual. Así, por ejemplo, el objeto se encara frontalmente si se dispone perpendicularmente al eje y se encara oblicuamente si ese no es el caso.

Nos detendremos en el análisis de la visión binocular. Este hecho resume una anomalía que hacía razonable el abandono del artefacto euclidiano; sin embargo, abandonar un instrumento que había ya mostrado grandes logros habría sido insensato. Con el ánimo de salvar el uso del instrumento, Ptolomeo propuso substituir las dos pirámides –una para cada ojo– por una pirámide media, de suerte que los teoremas demostrados en el marco del cono euclidiano fueran remitidos a esta nueva pirámide virtual. En resumen, se trata de substituir la visión binocular por la mirada de un cíclope virtual estratégicamente ubicado. Este recurso exige que se puedan concebir reglas de correspondencia entre la información recogida por cada pirámide individual y la información que habría de imaginarse ante la pirámide del cíclope. El siguiente grabado (Figura 1), con el que se abre el libro primero del *Opticorum* de Francisco Aguilonius (1567-1617), introduce de una forma bella el recurso de

Ptolomeo. Los *putti* de la imagen extraen el ojo del cíclope para someterlo al escrutinio del pensador sentado a la izquierda.



Figura 1. Grabado con el que se introduce el libro primero del *Opticorum* de Aguilonius.<sup>15</sup>

Cuando alguien mira con un ojo, cada objeto aparece en una ubicación determinada. Sin embargo, cuando alguien contempla un objeto con dos ojos, éste aparecerá en una ubicación bien determinada si, entre otras alternativas, los ejes de cada uno de los dos conos visuales convergen en un mismo sector del objeto observado. Explica el filósofo:

Nosotros estamos naturalmente dispuestos para girar nuestros ojos inconscientemente en varias direcciones con un admirable y preciso movimiento, hasta que ambos ejes convergen sobre el medio de un objeto visible, y ambos conos forman una base singular sobre el objeto visible que ellos tocan.<sup>16</sup>

Este hecho se corrobora con un simple experimento psicológico: si forzamos alguno de los dos ojos de tal manera que los ejes de los respectivos conos no converjan en el punto central del objeto, es inevitable que se presente una doble apariencia;<sup>17</sup> dicha doble apariencia desaparece cuando tapamos uno de los dos ojos.

La presentación de Ptolomeo conduce a un interesante problema, a saber, dada la orientación de los dos ejes visuales que convergen en un punto definido de antemano, se pide hallar, en el espacio, el lugar geométrico de todos los puntos de los cuales, además del punto de convergencia, se logra una contemplación singular –única– a pesar de contar con dos versiones del objeto, una para cada ojo. Este problema fue tratado cuidadosamente, entre otros, por Hermann von Helmholtz (1821-1894) y Ewald Hering (1834-1918) en el siglo XIX; dichos puntos se distribuyen en curvas muy complejas denominadas *horópteros*, nombre acuñado por el cien-

<sup>11</sup> Tamaño, forma, lugar, actividad y reposo son parte de los sensibles comunes invocados por Aristóteles (*Acerca del alma*, op. cit. 418a15).

<sup>12</sup> Ptolomeo, ibid. §§ 6-7.

<sup>13</sup> *Ibidem* § 26.

<sup>14</sup> Ver es una forma de tocar; dice Ptolomeo: «Entre las cosas que son comunes a los sentidos de acuerdo al origen de la actividad nerviosa, la vista y el tacto comparten todo excepto el color, dado que el color es tan sólo percibido por la vista» (op. cit. II, § 13). En otro pasaje: «Nosotros también decimos que un objeto está más cerca cuando el rayo que cae sobre su centro es más corto, mientras decimos que está más lejos cuando el mismo rayo es más largo» (op. cit. II, § 53).

<sup>15</sup> El diseño de las ilustraciones pertenece a Rubens y los grabados son de Theodoor Galle; cfr. Held, J. (1979). Rubens and Agulinus: New Points of Contact. *The Art Bulletin*, vol 61, No. 2, pp. 257-264.

<sup>16</sup> Ptolomeo, op. cit. II, § 28.

<sup>17</sup> *Ibidem*, II, § 29.



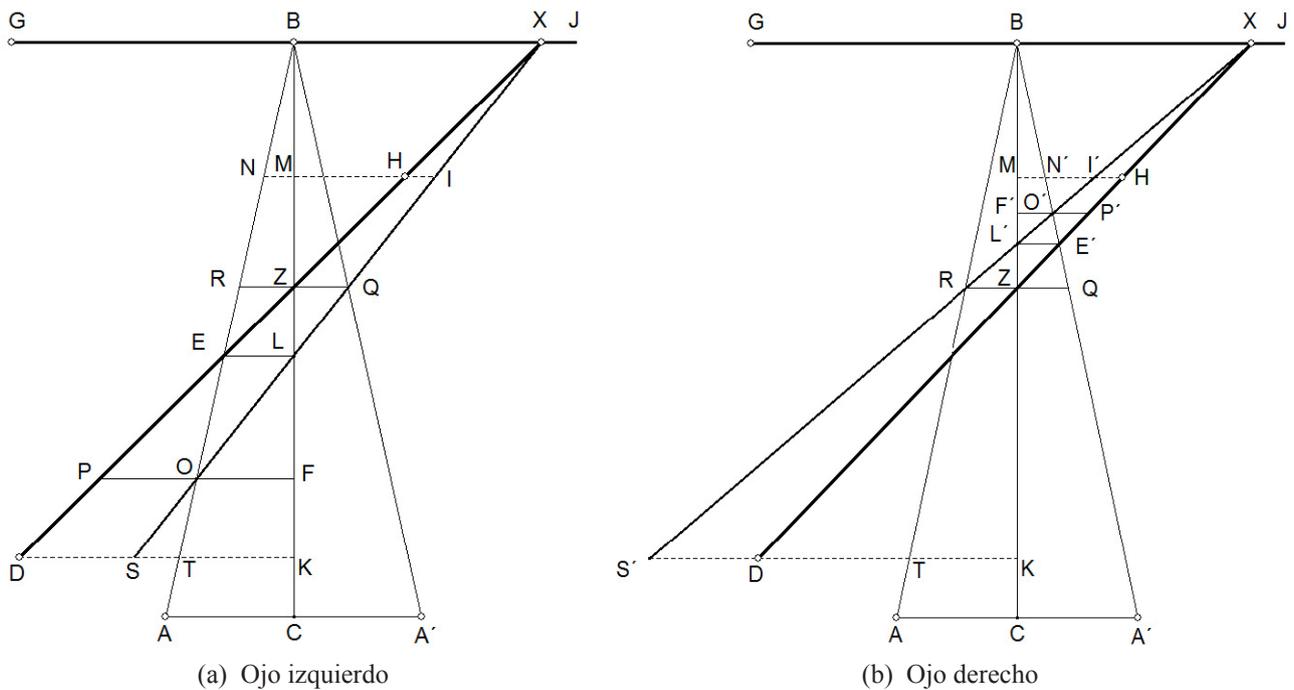


Figura 3. Principio heurístico (M).<sup>27</sup>

La idea de Ptolomeo es sencilla, aunque está formulada en un lenguaje complejo para nosotros. En la Figura 3,  $A$  y  $A'$  representan la ubicación de los ojos izquierdo y derecho;  $C$  el punto medio entre los dos ojos –allí donde inicia el descenso de la nariz–.  $C$  es el vértice de una nueva pirámide que resume la contribución de cada pirámide independiente, allí donde tendría que estar el ojo del cíclope.  $CB$  es perpendicular a  $AA'$  y es el eje visual asociado a la nueva pirámide.  $JG$  representa un objeto dispuesto frontalmente –perpendicular al eje  $CB$ – y a la misma altura de los dos ojos, mientras  $B$  es el punto de dicho objeto sobre el cual convergen los ejes independientes  $AB$  y  $A'B$ .

Ptolomeo imagina que el observador fija su atención en  $B$  y por ello logra que los dos ejes independientes converjan en dicho punto. A continuación, quiere saber qué tipo de imagen de los demás puntos cercanos percibimos con los dos ojos. Para ello imagina un objeto recto dispuesto al frente del observador en el mismo plano que contiene los puntos  $G, J, A$  y  $A'$ . Sea  $DX$  ese objeto. No es necesario que  $X$  forme parte de  $GJ$ . Ptolomeo quiere saber cómo es visto  $DX$  por cada uno de los dos ojos siempre que la mirada esté fija en  $B$  y podamos darle crédito al principio heurístico propuesto. Sea  $H$  un punto cualquiera de  $DX$ . El principio heurístico demanda que tracemos la perpendicular  $HM$  al eje común  $GB$  y determinemos el corte  $N$  con el eje del ojo izquierdo,  $AB$  (Figura 3(a)), y el corte  $N'$  con el eje del ojo derecho,  $A'B$  (Figura 3 (b)). A continuación debemos construir el segmento  $MI$  (ojo izquierdo) y  $MI'$  (ojo derecho) de tal forma que  $MI \cong NH$  y  $MI' \cong N'H$ . En la construcción hay que tener en cuenta que  $I$  y  $H$  están al mismo lado de  $CB$

y  $AB$  respectivamente, y que  $I'$  y  $H$  están al mismo lado de  $CB$  y  $A'B$  respectivamente. Si repetimos este procedimiento para cada uno de los puntos  $H$  que se distribuyen a lo largo de la recta  $DX$ , se puede probar, como lo hizo Ptolomeo, que los nuevos puntos  $I$  e  $I'$  se distribuyen a lo largo de las rectas  $SX$  para el ojo izquierdo y  $S'X$  para el ojo derecho. En la demostración restringida al ojo izquierdo, Ptolomeo primero ubica  $S$  sobre  $DK$ , perpendicular a  $CB$ , de tal forma que  $S$  satisface el criterio heurístico para  $D$ , esto es: se escoge  $S$  de tal manera que  $TD \cong KS$ . A continuación, encuentra el punto de corte  $E$  de la recta  $DX$  con el eje del ojo izquierdo. Como la distancia de ese punto al eje es nula, la imagen de  $E$ , según el principio, debe hallarse en  $L$  sobre el eje  $CB$ .<sup>28</sup> Ptolomeo prueba que cada uno de los puntos  $I$  de la recta  $SL$  satisface el principio heurístico para el punto correspondiente  $H$ .

La demostración que sigue ilustra los razonamientos de Ptolomeo, aunque se distancie un poco de la presentación que hace el autor. (i) Dado que los triángulos  $BXE$  y  $NHE$  son semejantes, se tiene:  $\frac{NH + MH}{BX} = \frac{EN}{EB}$ . (ii)

Como los triángulos  $BXL$  y  $MIL$  también son semejantes, se tiene:  $\frac{MH + HI}{BX} = \frac{LI}{LX}$ . (iii) Como  $BX, NI$  y  $EL$

son paralelas cortadas por las transversales  $BO$  y  $OX$ , se tiene:  $\frac{EN}{EB} = \frac{LI}{LX}$ . De todo ello se concluye  $MN \cong HI$ .

Las rectas  $BC$  y  $BA$  (ojo izquierdo) cortan transversalmente los segmentos paralelos  $MN, EL$  y  $TK$ . Las parejas de triángulos  $KSL$  y  $MIL$ , por un lado, y  $ETD$  y  $ENH$ , por el otro, son semejantes. Todo ello conduce a

<sup>27</sup> <https://www.geogebra.org/m/mdjp5huw>. Puntos móviles:  $G, B, X, H, D, A$  y  $A'$ . Para cada caso se activan los botones “Ojo  $A'$ ” u “Ojo  $A$ ”.

<sup>28</sup>  $EL$  es perpendicular a  $GB$ .

$\frac{KS}{MI} = \frac{TD}{NH}$ . Ahora bien, si  $KS \cong TD$  (por construcción),

$MI$  también debe ser congruente con  $NH$ . Así se prueba que si  $L$  y  $S$  se ajustan a la regla que sugiere el principio heurístico, lo mismo ocurrirá con cada uno de los puntos que se encuentren en la recta  $SL$ .

A manera de corolario se puede inferir que  $H$ ,  $I$  e  $I'$  coinciden cuando ellos caen sobre la perpendicular a  $CB$  trazada a partir de  $B$ . De hecho, para el caso que se ilustra coinciden en el punto  $X$ . Así las cosas, los objetos ubicados frontalmente a la altura del punto  $B$  (los puntos en el segmento  $GJ$ ) se contemplan en la misma posición tanto por el ojo derecho como por el izquierdo (imagen singular), mientras que los puntos restantes,  $H$ , se ven en dos lugares diferentes  $I$  e  $I'$  (imágenes dobles).<sup>29</sup> En consecuencia, todo el objeto  $GJ$  se ve de manera singular.<sup>30</sup> Los puntos  $P$ ,  $E$  y  $Z$  ( $P'$ ,  $E'$ ,  $Z$ ) son puntos notables de la construcción.  $P$  es el punto de  $DX$  cuya imagen,  $O$ , cae en el eje del ojo izquierdo;  $P'$  es el punto de  $DX$  cuya imagen,  $O'$ , cae en el eje del ojo derecho.  $E$  es el punto de  $DX$  que cae sobre el eje del ojo izquierdo y cuya imagen  $L$  es vista por tal ojo en el eje común;  $E'$  es el punto de  $DX$  que cae sobre el eje del ojo derecho y cuya imagen,  $L'$ , es vista por tal ojo en el eje común.  $Z$  es el punto de  $DX$  que cae sobre el eje común y es observado por el ojo izquierdo en  $Q$  y por el derecho en  $R$ .

Aunque Ptolomeo no ofreció una justificación teórica de su principio heurístico, sí presentó una serie de experimentos que podrían hacer las veces de justificación *a posteriori*, toda vez que gracias al principio se pueden salvar algunas apariencias. Estos experimentos pueden verse como anticipaciones teóricas de posibles resultados experimentales. Así introdujo Ptolomeo sus experimentos: «Todavía debemos considerar si el principio determinante que adujimos [el principio heurístico] realmente está de acuerdo con la observación».<sup>31</sup> ¿Realizó Ptolomeo, en forma controlada, dichos experimentos? Es muy arriesgado comprometerse con una respuesta afirmativa. La psicología experimental apenas se inauguró como disciplina con estándares de control bien establecidos en la segunda mitad del siglo XIX en Alemania. Así las cosas, sólo llegamos a contar con instrumental y medios de control adecuados para llevar a cabo los experimentos de Ptolomeo hasta esa fecha. Los experimentos de Ptolomeo bien realizados demandan (i) ubicar al sujeto en un ambiente tal que no exista iluminación de trasfondo que pueda perturbar la observación; (ii) entrenar al sujeto para que enfoque su atención en un objeto de control y entregue reportes de observación que remiten a objetos distintos a los que concentran su enfoque; (iii) contar con instrumental que permita repetir los experimentos con el mismo o diferentes sujetos. Ptolomeo no contaba con medios para satisfacer estas exigencias. Los resultados comentados por Ptolomeo se parecen más a anticipaciones deseadas que a resultados objetivos.

Los experimentos citados en el libro II son diversas variaciones del mismo tema.<sup>32</sup> Uno de estos experimentos, el primero, sugiere el siguiente montaje (Figura 4): sean  $A$  y  $A'$  los lugares donde se ubican los ojos izquierdo y derecho;  $CD$  el eje del ojo cíclope (eje común) y  $H$ ,  $D$ , un par de banderines muy pequeños izados sobre el eje común. Si le pedimos al observador que fije su atención en  $H$ , este banderín será visto en un único lugar, aunque sea contemplado por dos ojos. En tanto que  $D$  debe verse doble: (i) una imagen a la izquierda del eje común, pues  $D$  se encuentra a la izquierda del eje  $AH$ , (ii) una imagen a la derecha del eje común ya que  $D$  se encuentra a la derecha del eje  $A'H$ . Si, en esas condiciones de observación, cerramos el ojo izquierdo, desaparece la primera imagen; si cerramos el ojo derecho, desaparece la segunda.

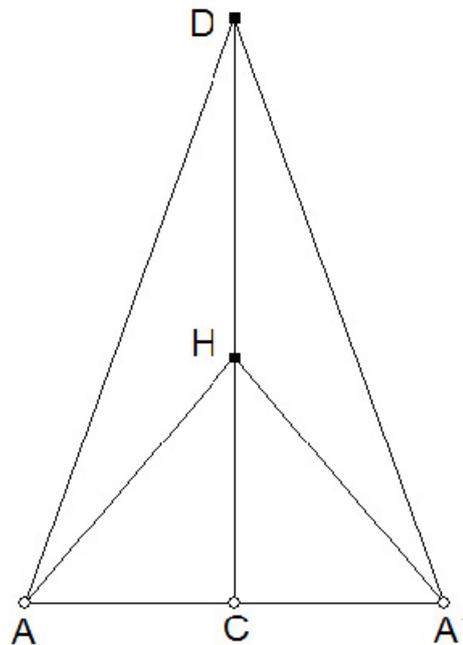


Figura 4. Experimento II, 1.<sup>33</sup>

El segundo experimento, de los dos citados en el Libro III, es muy interesante porque supone la mezcla de colores.<sup>34</sup> Ptolomeo pide construir un tablero rectangular negro. En uno de los extremos más cortos pide el autor que marquemos las posiciones  $A$  y  $A'$  en donde han de ubicarse los ojos izquierdo y derecho de un sujeto experimental (Figura 5);  $CD$  es el eje del ojo cíclope y coincide en longitud con el lado más extenso del rectángulo experimental.  $E$  es un punto ubicado a medio camino de  $CD$ ,  $TK$  es una recta horizontal, paralela a  $AA'$ , que contiene a  $E$  y que se pinta de color verde. Entre tanto, Ptolomeo pide trazar la recta  $AEZ$  de color rojo, la recta  $A'EH$  de color amarillo y pide marcar especialmente el punto  $E$  para pedirle al sujeto experimental que fije su atención en ese punto.

<sup>29</sup> La solución de Ptolomeo, como veremos y como dijimos antes, difiere de la que ofrecieron los teóricos del siglo XIX.

<sup>30</sup> *Ibidem*, III, § 38.

<sup>31</sup> *Ibidem*, II, §§ 37.

<sup>32</sup> *Ibidem*, II, §§ 33-46.

<sup>33</sup> *Ibidem*, II, § 33.

<sup>34</sup> *Ibidem*, III, § 43.

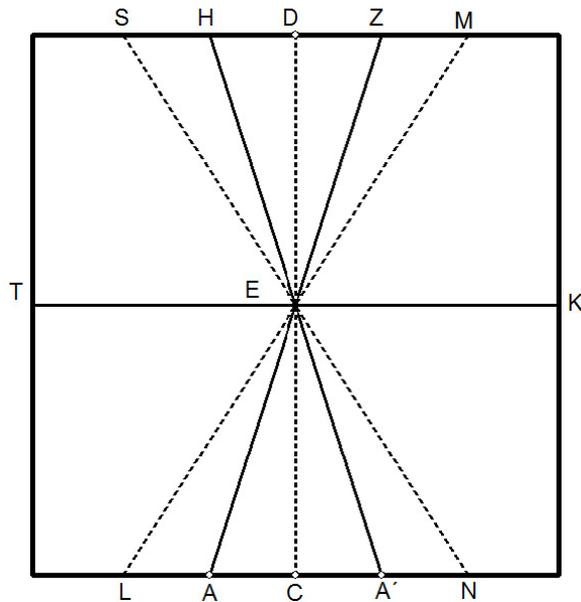


Figura 5. Experimento III, 2 (*Óptica*, III, § 43) (M).<sup>35</sup>

Si el principio heurístico es correcto y el observador enfoca su atención en el punto  $E$ , se esperan los siguientes reportes con observación binocular (Tabla 1).<sup>36</sup>

El método de proyección de Ptolomeo se puede usar para casos más complejos. La figura 6 muestra la ubicación de un ojo en  $A$  de donde se origina un cono visual de eje  $AG$ , mientras  $CG$  representa el eje común –ojo cíclope– cuando participa también otro ojo en una posición simétrica con respecto a  $A$ , sea  $A'$  el segundo ojo. Imaginemos un objeto circular ubicado tal como señala

el trazo continuo. Sea  $P$  un punto sobre dicho arco, la longitud de  $PQ$  define la distancia de  $P$  al eje visual  $AG$  evaluada sobre la perpendicular al eje central  $CG$ . La imagen  $P'$  vista por  $A$  se encuentra, de acuerdo al principio heurístico, sobre  $RP$ , perpendicular a  $CG$ , de tal manera que  $PQ \cong RP'$ , con  $P'$  al mismo lado de  $R$  al que se encuentra  $P$  de  $Q$ . El lugar geométrico de todos los puntos  $P'$  cuando desplazamos  $P$  sobre el arco mencionado define la forma de la imagen del objeto circular que pretendemos contemplar. El arco de trazos discontinuos muestra el resultado para el caso expuesto. La imagen que se obtiene no es un arco de circunferencia, contrario a la expectativa que al respecto enunció Ptolomeo: «De lo que hemos dicho, también es evidente que la magnitud tal como la vemos en su posición aparente tiene la misma forma que el objeto real cuando es visto en su ubicación verdadera, así la diferencia será en ubicación únicamente» (*Óptica*, III, § 55).

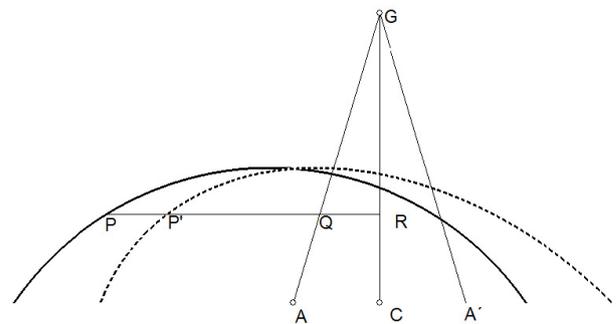


Figura 6. Contemplación binocular de un arco de circunferencia (M).<sup>37</sup>

Tabla 1. Reporte experimental esperado.

	Reportes	Variaciones	
<b>Contribución del ojo A</b>	Recta verde a lo largo de $TK$ . Recta roja a lo largo de $CD$ Recta amarilla a lo largo de $NS$ (consecuencia de la observación de $A'H_{\text{amarilla}}$ )		
<b>Contribución del ojo A'</b>	Recta verde a lo largo de $TK$ . Recta amarilla a lo largo de $CD$ (consecuencia de la observación de $A'H_{\text{amarilla}}$ ). Recta roja a lo largo de $LM$ (consecuencia de la observación de $AZ_{\text{roja}}$ )		
<b>Visión binocular</b>	Recta verde a lo largo de $TK$ . Recta naranja a lo largo de $CD$ .	<u>Al cerrar ojo A:</u> Recta verde a lo largo de $TK$ . Recta amarilla a lo largo de $CD$ (dado que se mantiene la contribución de $A'$ ). Desaparece el color naranja. Desaparece la recta amarilla a lo largo de $NS$ .	<u>Al cerrar ojo A':</u> Recta verde a lo largo de $TK$ . Recta roja a lo largo de $CD$ (dado que se mantiene la contribución de $A$ ). Desaparece el color naranja. Desaparece la recta roja a lo largo de $LM$ .

<sup>35</sup> <https://www.geogebra.org/m/pmjdy2hj>. Puntos móviles:  $D$ ,  $A$  y  $A'$ . Los botones “Situación experimental”, “Ojo A” y “Ojo A'” activan la situación deseada.

<sup>36</sup> En formato de subíndice se indica el color con el que se han pintado las rectas.

<sup>37</sup> <https://www.geogebra.org/m/kfxfwk4e>. Puntos móviles:  $G$ ,  $P$ ,  $A$  y  $C$ . Al activar “Ojo A'” se nota la contribución del ojo  $A'$  a la percepción del objeto.

No contamos con evidencia que asegure que Ptolomeo realizó tales experimentos. En principio dudamos que pudiese contar con dispositivos que permitieran obtener información confiable. Ewald Hering, en el siglo XIX, propuso algunos experimentos que guardan un estrecho parecido de familia con los de Ptolomeo.<sup>38</sup>

El filósofo árabe conocido como Alhacén (ca. 965 d.C. – ca. 1040 d.C.), aun cuando usaba un lenguaje intramisionista, propuso una miscelánea muy completa de experimentos que comparten el espíritu, el instrumental y los propósitos de Ptolomeo.<sup>39</sup> Alhacén sostenía que la reunión en el nervio común de las formas sensibles capturadas en los dos ojos puede lograrse en una sola región, lo que produce una imagen singular, o puede impresionar regiones diferentes, lo que da origen a visiones múltiples de un solo objeto.<sup>40</sup> Para evaluar las posibilidades, Alhacén diseñó un montaje experimental inspirado en Ptolomeo.<sup>41</sup> La Figura 7 muestra una tablilla rectangular  $ABCD$  diseñada para que los ojos del observador se ubiquen en  $A$  y  $B$ . El semicírculo intermedio sirve para acomodar la nariz. La tablilla debe ubicarse de tal modo que repose en un plano horizontal. En  $Q$ , el corte de las diagonales, se fija un objeto familiar y se le pide al observador que fije su atención en aquel. Así las cosas, los ejes visuales  $BC$  y  $AD$  convergen en  $Q$ .  $HZ$  representa el eje central, a partir del ojo cíclope, concebido al modo de Ptolomeo. En esas condiciones, el experimentador fija objetos similares en  $L$  y en  $S$ . El sensorio percibe una forma simple en  $Q$ . Pero cuando el sensorio, atento a  $Q$ , advierte la presencia de  $L$ , contempla dos imágenes de un solo objeto. Cuando el ojo  $B$  contempla a  $L$ , lo percibe a la derecha del eje visual  $BC$ ; en tanto que el ojo  $A$  percibe a  $L$  a la izquierda del eje visual  $AD$ . En ese orden de ideas, las dos formas del único objeto  $L$  no logran percibirse al mismo lado de los ejes visuales correspondientes. Por ello el observador advierte la presencia de dos formas que no logran reunirse en una. Algo similar ocurre al percibir  $S$ . Por esa razón se espera que el observador contemple doble el eje central  $HZ$ .  $Q$  se observa de manera singular con la mayor nitidez posible;  $K$  y  $T$ , que se encuentran sobre la perpendicular a  $HZ$  por  $Q$ , se observan de manera singular, siempre que no se alejen mucho del eje  $HZ$ , y su claridad se incrementa a medida que se acercan a  $Q$ .

Aun cuando los escritos de Ptolomeo estaban en la base del influyente tratado de Alhacén y casi todos los escritos renacentistas acerca de la óptica eran paráfrasis del texto del filósofo árabe, las ideas de Ptolomeo relativas al principio heurístico que hemos comentado, con excepción, quizá, del tratado de Aguilonius, no fueron ampliamente discutidas o consideradas antes del si-

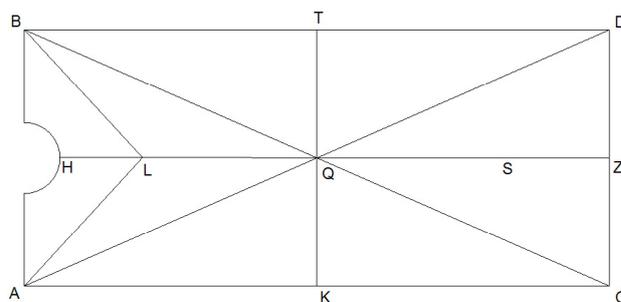


Figura 7. Montaje experimental de Alhacén.

glo XIX.<sup>42</sup> Los pensadores del siglo XVII que se encargaron de cimentar la óptica moderna, Kepler y Descartes los más importantes, se concentraron en el estudio de la refracción y naturaleza de la luz, en la importancia de la retina como el locus de la percepción visual y en los mecanismos físicos y recursos psicológicos para evaluar la distancia y el tamaño de los objetos observados. Si bien estudiaron la percepción binocular, relegaron a un segundo plano, o ignoraron, el principio heurístico de Ptolomeo. El interés por dicho principio renació con la emergencia de la óptica alemana y el desarrollo de la psicología experimental del siglo XIX.

## 2. Hering

Como consecuencia de una airada reacción a mediados del siglo XIX contra la práctica de la medicina en el espíritu de la *Naturphilosophie*, inspirada en la filosofía de Friedrich Schelling (1775-1854), se inició un influyente movimiento que condujo al desarrollo y posterior auge de la óptica alemana. La cabeza inicial del movimiento fue el médico Johannes Müller (1801-1858). Uno de sus más destacados discípulos, el fisiólogo y físico alemán Hermann von Helmholtz, compuso un soberbio tratado de óptica fisiológica –*Handbuch der physiologischen Optik*–. Ewald Hering, quien admiraba profundamente a Johannes Müller aunque no fue su discípulo directo, inició una aguda controversia con Helmholtz acerca de variados puntos relacionados con la fisiología ocular. Helmholtz calificó la controversia como un debate entre enfoques empiristas y asociacionistas –el de Helmholtz–, por un lado, y enfoques innatistas –el de

<sup>38</sup> Hering, E. (1868/1977). *The Theory of Binocular Vision*. New York: Plenum Press. Trad. Bruce Bridgemann; pp. 236-240.

<sup>39</sup> Alhacén. (trad. en 2001). *De Aspectibus (I-III)*. En A. M. Smith (Edit. y Trad.), *Alhacén's Theory of Visual Perception* (pp. 1-816). Philadelphia: American Philosophical Society; III, 2.28-2.86.

<sup>40</sup> *Ibid.* I, 6.69.

<sup>41</sup> *Ibid.* III, 2.26-2.48. Algunos comentaristas atribuyen, sin razón, el montaje al matemático jesuita Christoph Scheiner (1573-1650); a propósito de la atribución incorrecta, véase Raynaud, D. (2016), *Studies on Binocular Vision*. Cham: Springer Verlag; p. 76.

<sup>42</sup> Autores como Kepler y Descartes tenían en alta estima los trabajos de Ptolomeo que conocían seguramente por la edición de F. Risner, que incluía los trabajos de Alhacén y Witelo, (1572), *Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem... Item Vitellonis Thuringopoloni libri decem*. Basile: Per episcopios. Descartes, por ejemplo, usaba la metodología de Ptolomeo para ilustrar una novedosa forma de demostración en las ciencias naturales que difería del tipo de demostración esperada en las matemáticas. Descartes se refirió así a dicha metodología en una carta a Mersenne del 27 de mayo de 1638: «Ptolomeo y Witelo, tienen suposiciones mucho menos ciertas, y de todos modos no debemos rechazar por eso las demostraciones que dedujeron de ellas»; cfr R. Descartes (1638/2898), *Oeuvres (Correspondance)*, en C. Adam y P. Tannery (Eds.), *Oeuvres de Descartes* (vol. ii, p. 142) París: Léopold Cerf (editor); publicadas con el auspicio del Ministerio de Instrucción Pública. A pesar del aprecio por Ptolomeo, no hay en su obra, al menos que yo conozca, mención alguna al principio heurístico de Ptolomeo.

Hering—, por el otro.<sup>43</sup> El innatismo de Hering hunde sus raíces en las estructuras fisiológicas.<sup>44</sup>

Un foco importante de la controversia tenía que ver con el movimiento esperado del par de ojos. Los únicos movimientos independientes permitidos del ojo se reducen a rotaciones.<sup>45</sup> Cuando los ojos rotan y se adelantan los ajustes del cristalino que consiguen la contemplación nítida de una fuente puntual de luz que llama nuestra atención, es porque se logra que el haz se concentre de nuevo en un punto en el sector más sensible de cada una de las dos retinas.<sup>46</sup> Si pudiéramos, en el estilo sugerido por Euclides, trazar el par de rectas entre el punto de convergencia en cada retina y el punto nodal del ojo correspondiente, éstas se tendrían que cortar en el foco puntual de luz que llama nuestra atención.<sup>47</sup> Ninguno de nosotros puede adelantar semejante tarea para establecer la dirección de la visión. Cualquiera que sea la forma en la que somos conscientes de la dirección de nuestra mirada, los resultados covarían con el trazado que hemos imaginado. La coincidencia, cree Helmholtz, no se explica por una especie de feliz armonía preestablecida, como pretende Hering, sino por el aprendizaje basado en asociaciones exitosas.

<sup>43</sup> Helmholtz, H. von. (1909/2005) (3ª ed.). *Treatise on Physiological Optics* (en Adelante *TOF*) (Volúmenes 1, 2 y 3). Mineola: Dover Publications, Inc.; III, § 26, p. 17. El texto se citará con la sigla *TOF*. Parte de la controversia es una extensión de la disputa entre los cartesianos (innatistas) y los berkeleyanos (empiristas) en torno a la fisiología y la naturaleza de la percepción visual.

<sup>44</sup> Hering resistió esta forma de presentar la controversia. R. S. Turner se ha ocupado de las razones de dicha reserva; cfr. R. S. Turner (1994), *In the Eye's Mind*, Princeton: Princeton University Press, pp. 89-93.

<sup>45</sup> Cuando el ojo se mueve, el volumen de materia que se encuentra en la parte posterior de la cavidad no puede alterarse, no se comprime, no se desplaza, no se dilata, no se reacomoda (*TOF*, § 27, p. 38).

<sup>46</sup> Este formidable resultado, restringido a haces de pequeña amplitud angular, fue demostrado por Kepler (1571-1630) apoyado en una ley imprecisa para la refracción (cfr. Kepler, Johannes. (1604/2000). *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*. Santa Fe: Green Lion Press; V, p. 182). Posteriormente, Nicolas Malebranche (1638-1715) demostró el mismo teorema a partir de la ley de Snell-Descartes (cfr. Malebranche, Nicolás. (1712/2009). *Acerca de la investigación de la verdad*. Salamanca: Ediciones Sígueme; pp. 929-935). En el *TOF*, Helmholtz sintetizó una serie de aportes para demostrar que el teorema vale para cualquier serie de esferas organizadas de tal manera que sus centros sean colineales. El ojo es uno de tales sistemas (*TOF*, vol. 1, § 9, pp. 64-80). El sector más sensible de cada una de las retinas es una pequeña depresión llamada *fóvea* y está ubicada en la región conocida como la mancha amarilla.

<sup>47</sup> Helmholtz demostró que si conocemos la ubicación de los dos puntos focales, los dos nodales y los dos centrales de cualquier sistema óptico centrado formado por una secuencia de lentes, no importa su complejidad, tendríamos un protocolo simple para establecer el lugar en donde se puede recoger la imagen de una fuente puntual de luz (*TOF*, vol. 1, § 9, p. 61). Los dos *puntos nodales* son puntos conjugados que satisfacen la siguiente condición: si un rayo incide en el sistema después de pasar por el primer punto nodal ( $N_1$ ), o si su prolongación pasa por dicho punto, emerge finalmente del sistema en la misma dirección y pasa por el segundo punto nodal ( $N_2$ ). A partir de la información anatómica del sistema ocular se puede advertir que los dos puntos nodales se encuentran muy cerca uno del otro. En ese orden de ideas, no se incurre en mayor error si se admite que los dos puntos nodales se funden un solo punto ubicado a unos 0,56 mm al frente de la cara posterior del cristalino (*TOF*, vol. 1, § 10, p. 95). Así las cosas, aunque el sistema ocular esté formado por varias esferas que difieren en sus índices de refracción, se puede sustituir por una única esfera cuyo centro se identifica con el punto medio de los dos puntos nodales. Este ojo medio se conoce como el ojo reducido de Listing.

Uno de los asuntos más debatidos entre Helmholtz y Hering tenía que ver con definir si esa coincidencia se debe a una estructura innata o es el resultado de una asociación exitosa tejida a lo largo de la historia perceptual del sujeto. Helmholtz, el empirista-asociacionista, defendió su posición aduciendo, entre otros argumentos, la lentitud con la que los niños recién nacidos aprenden a coordinar el movimiento de sus brazos cuando quieren aprehender objetos de su interés.<sup>48</sup> El empirista asociacionista sostiene que esas coordinaciones son el resultado de un largo y exitoso aprendizaje. Hering, el innatista, defendió que cada uno de nosotros nace con un sistema de coordinación que asocia activaciones de los sectores inferiores de la retina, por ejemplo, con la percepción de fuentes de luz en el sector superior del campo visual.

En la propuesta de Helmholtz, la evaluación de la profundidad, además de las claves asociadas con el aprendizaje, depende de que sea posible adscribir rotaciones independientes a cada ojo. Helmholtz sostiene que el movimiento de cada ojo es controlado por la voluntad con independencia del movimiento que la voluntad misma determina para el otro ojo. Así las cosas, si queremos concentrarnos en un objeto que llama nuestra atención, debemos aprender a dirigir cada uno de los ojos en la dirección que permite el encuentro de los dos ejes visuales en el punto de interés. Así explica Helmholtz su posición:

Bajo las condiciones ordinarias de visión normal, nosotros siempre dirigimos las dos líneas de fijación a un punto real en el espacio al frente de nosotros, bien sea cerca o lejos. Aun cuando cada ojo tiene su propio mecanismo muscular independiente, y así cuenta con la posibilidad de ejecutar cada clase de movimiento sin considerar el otro ojo, nosotros hemos aprendido a ejecutar [coordinar] tales movimientos tal y como se requiere para lograr con los dos ojos una visión singular y distinta de un punto real.<sup>49</sup>

En oposición al filósofo, Hering se esforzó por defender que los dos ojos no deben concebirse como dos órganos separados que nosotros conseguimos adiestrar para que se dirijan articuladamente en función de una determinación de la voluntad, sino como dos mitades de un único órgano singular. En ese sentido y por razones de comodidad en los análisis, los dos ojos pueden llegar a ser sustituidos, con pleno derecho, por un ojo cíclope que responde a los imperativos de la voluntad. Cada uno de los dos ojos no se considera como una unidad independiente; ellos se asumen como engranajes de un sistema complejo e integrado. Con este propósito en mente, Hering se impuso la tarea de demostrar que: «[l]os dos ojos están de tal manera relacionados que uno no puede ser movido independientemente del otro; más bien, la musculatura de ambos ojos reacciona simultáneamente a uno y el mismo impulso de la voluntad».<sup>50</sup> Así las co-

<sup>48</sup> *TOF*, vol. 3, § 29, p. 247.

<sup>49</sup> *TOF*, vol. 3, § 27, pp. 54-55.

<sup>50</sup> Hering, E. (1868/1977). *The Theory of Binocular Vision*. New York: Plenum Press; p. 17.

sas, los dos ojos se pueden reinterpretar como un órgano singular, olvidando que está constituido por dos partes separadas.

La ingeniosa defensa de Hering consiste en mostrar que si los dos ojos están dirigidos inicialmente a un mismo objeto  $A$  y queremos que a continuación se muevan para lograr una contemplación nítida de otro objeto  $B$ , en otro lugar del campo visual, es posible hacerlo de tal manera que la voluntad puede dar un único comando que provoca movimientos simétricos de cada uno de los ojos.<sup>51</sup> Veamos cómo funciona el argumento geométrico para el caso en el que  $A$  y  $B$  están en el mismo plano principal; es decir, el plano que contiene los dos ejes visuales cuando la cabeza está firmemente dirigida al frente y los ojos se fijan en un objeto muy distante a la misma altura de ellos.<sup>52</sup> El movimiento de los ojos al variar la atención de  $A$  a  $B$ , se puede descomponer en tres fases.

*Primera fase.*  $L$  y  $R$  representan la posición de los ojos izquierdo y derecho (Figura 8);  $LA$  y  $RA$  los ejes visuales que hacen posible que la marca que viene del punto  $A$  deje su rastro precisamente en la fovea de cada una de las retinas. La circunferencia que pasa por  $L$ ,  $R$  y  $A$  hace parte del horóptero asociado con  $A$ .<sup>53</sup>  $A'$ , sobre la circunferencia, se encuentra sobre la mediatriz de  $LR$ . El ángulo  $ALA'$  coincide en amplitud ( $\alpha$ ) con el ángulo  $ARA'$ .<sup>54</sup> Por esa razón, la marca que deja  $A'$  en la retina de  $L$ , cuando el punto de atención se fija en  $A$ , se encuentra en un punto que es correspondiente con el lugar de activación que provoca  $A'$  en la retina  $R$  cuando el punto de atención es  $A$ . Si ahora dejamos que los dos ojos, al unísono, desplacen su atención desde el punto  $A$  hasta el punto  $A'$ , cada uno de ellos debe realizar una rotación, en la misma dirección de las manecillas del reloj, equivalente a una amplitud  $\alpha$ . Estas rotaciones simultáneas pueden estudiarse de una manera más sencilla si asumimos que un ojo cíclope, ubicado en el extremo opuesto del diámetro que contiene a  $A'$ , rota en la dirección de las manecillas del reloj precisamente el mismo ángulo  $\alpha$ .

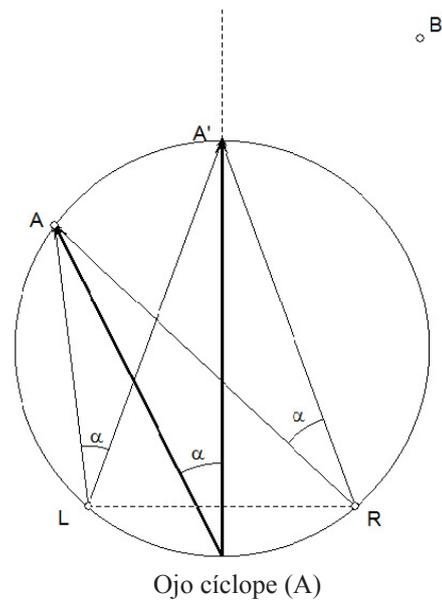


Figura 8. Rotación de los ojos (cambio de fijación de  $A$  a  $A'$ ) ( $M$ ).<sup>55</sup>

*Segunda fase.* Ahora podemos pedir que los dos ojos cambien su atención de  $A'$  por  $B'$  (Figura 9).  $B'$  es un punto sobre la mediatriz de  $LR$  y en la circunferencia que contiene a  $B$ , a  $L$  y a  $R$ , esta circunferencia hace parte del horóptero asociado con  $B$ . En este caso, el ojo izquierdo debe rotar en dirección opuesta a las manecillas del reloj una amplitud angular  $\gamma$  mientras que el ojo derecho rota en la misma dirección de las manecillas del reloj la misma amplitud  $\gamma$ .<sup>56</sup> El nuevo ojo cíclope cambia ligeramente de posición, toda vez que el horóptero asociado a  $A$  no coincide con el de  $B$ . El eje visual asociado al nuevo ojo cíclope se mantiene invariante.

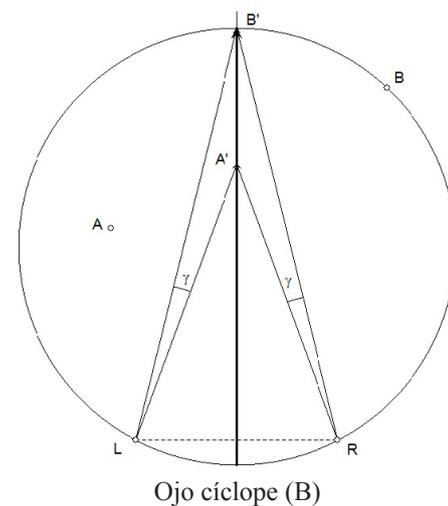


Figura 9. Rotación de los ojos (cambio de fijación de  $A'$  a  $B'$ ) ( $M$ ).<sup>57</sup>

<sup>51</sup> *Ibid.* pp. 17-31.

<sup>52</sup> Si tales puntos se encuentran en planos diferentes al plano principal, la demostración es más compleja y conduce a reconocer ciertas restricciones para la aplicación de la Ley de Hering; *ibid.* pp. 32-40; 59-73.

<sup>53</sup> Una fuente de luz puntual es vista en un lugar singular por los dos ojos cuando los puntos que se activan en las dos retinas son considerados correspondientes; cfr. Raynaud, *op. cit.*, pp. 81-86. R. S. Turner resume así la forma preliminar como Helmholtz concibe el horóptero: «Él [Helmholtz] derivó el horóptero-de-puntos al encontrar el lugar de los puntos para los cuales para una posición dada de los ojos, la latitud y longitud [un nuevo sistema de coordenadas basado en los ángulos medidos a partir de los meridianos aparentes tanto vertical como horizontal] tienen en mismo valor en cada ojo» (R. S. Turner, *op. cit.* pp. 44-45). Es fácil probar que la circunferencia que contiene los puntos  $L$ ,  $R$  y  $A$  satisface esta condición. Posteriormente Helmholtz mostró que el horóptero experimental no coincide en todas sus posiciones con el horóptero matemático; cfr. R. S. Turner, *op. cit.* p. 46.

<sup>54</sup> Para que se dé la equivalencia angular mencionada,  $A'$  debe estar en el horóptero de  $A$ . Hering no lo menciona, pero debe presuponerse. Hering pide que el punto  $A'$  esté a una distancia aproximadamente igual a la de  $A$ ; (1868/1977, p. 17). La igualdad de los ángulos se explica porque se trata de ángulos inscritos que barren el mismo arco  $AA'$ .

<sup>55</sup> <https://www.geogebra.org/m/ekuensm4>. Puntos móviles:  $B$ ,  $A$ ,  $L$  y  $R$ . Active el botón "Líneas visuales  $A'$ ".

<sup>56</sup> La dirección de la rotación cambia si el punto  $B$  se encuentra más cerca al observador que el punto  $A$ .

<sup>57</sup> <https://www.geogebra.org/m/ekuensm4>. Puntos móviles:  $B$ ,  $A$ ,  $L$  y  $R$ . Active el botón "Líneas Transición  $A'B'$ ".

*Tercera fase.* Finalmente, dejamos que los dos ojos, al unísono, desplacen su atención desde el punto  $B'$  hasta el punto  $B$ . En este caso, cada uno de ellos adelanta una rotación, en la misma dirección de las manecillas del reloj, equivalente a una amplitud  $\beta$  (Figura 10). El ojo cíclope rota en la misma dirección un ángulo equivalente a  $\beta$ . La rotación completa, correspondiente al ojo izquierdo, se puede resumir así:  $\alpha - \gamma + \beta$ ; la del ojo derecho, así:  $\alpha + \gamma + \beta$  y la del ojo cíclope, si pudiéramos asumir que se mantiene en una sola posición, así:  $\alpha + \beta$ . No estamos obligados a pensar que el movimiento de los ojos sigue en secuencia las fases descritas, basta admitir que el resultado final se puede descomponer de esa manera.

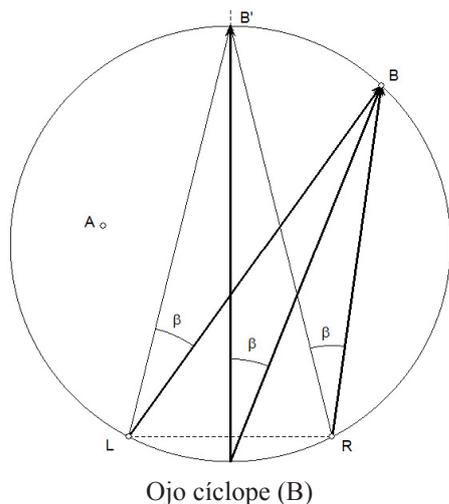


Figura 10. Rotación de los ojos (cambio de fijación de  $B'$  a  $B$ ) ( $M$ ).<sup>58</sup>

Para probar que un objeto que concentra nuestra atención se ubica en el corte del par de ejes visuales, Helmholtz usó un bello experimento sugerido por Hering y que recuerda los experimentos de Ptolomeo.<sup>59</sup> Lo que no explica el autor es que Hering propuso el experimento para oponerse a la tesis de las rotaciones independientes defendida por Helmholtz. Imaginemos esta situación: ambos ojos  $A$  y  $B$  (Figura 11) miran en direcciones paralelas  $Aa$  y  $Bb$  a un objeto muy distante. A continuación se le pide al sujeto cerrar el ojo  $B$  mientras el ojo  $A$  sigue abierto y en la tarea de contemplar el objeto distante  $a$ . Le pedimos ahora al sujeto que atienda a un objeto  $f$  ubicado en la dirección  $Aa$  pero a una distancia mucho menor. El ojo  $A$  realiza todas las tareas de acomodación para conseguir la observación nítida de  $f$ . El horizonte distante se tornará difuso en la observación. El ejercicio supone que no debe darse ningún cambio en la ubicación del eje  $Aa$  ni en la ubicación de la imagen de  $a$  en la retina del ojo  $A$ . El sujeto experimental, sin embargo, reporta un desplazamiento de  $a$  hacia la dirección  $Ac$ . ¿A qué se debe este extraño reporte? Si el ojo  $A$  se acomoda de nuevo para la observación nítida de  $a$ , el sujeto reporta que  $a$  regresa a su posición original.

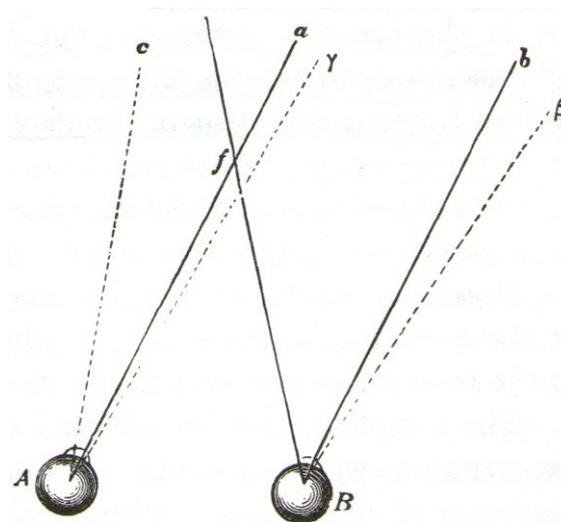


Figura 11. Experimento de Hering.<sup>60</sup>

Cuando el ojo  $A$  se acomoda para observar en forma nítida y singular al objeto  $f$ ,  $B$ , aunque se encuentre cerrado, realiza también movimientos de acomodación coordinados con la actividad de  $A$ . El eje de  $B$  rota entonces en la dirección  $Bf$ . Aunque los párpados de  $B$  estén cerrados, el ojo adelanta movimientos acompasados con la actividad de acomodación llevada a cabo por  $A$ . Este hecho experimental ofrece evidencia en favor de dos conjeturas. La primera es compartida por los dos fisiólogos, la segunda solo es defendida por Hering. En primer lugar, el experimento sugiere que al fijarnos en un objeto que llama nuestra atención, se logra la convergencia de los ejes visuales en la ubicación del objeto. En segundo lugar, el experimento muestra que para fijar nuestra atención en un objeto debemos mover coordinadamente los dos ojos, aun admitiendo que uno de ellos pudiese no ser activo en la percepción.<sup>61</sup> Esto muestra que el movimiento de los ojos no es el resultado de comandos independientes determinados por la voluntad. Ya para el año de 1890, pocos investigadores acompañaban a Helmholtz en la defensa de que el movimiento ocular carecía de bases orgánicas en la musculatura o en ciertos mecanismos innatos.

Hering complementó su defensa mostrando que la estructura muscular está al servicio del movimiento coordinado.<sup>62</sup> La propuesta de la coordinación del movimiento ocular condujo a Hering a defender una tesis más fuerte, a saber, «cada posición específica del punto de fijación en el espacio de fijación binocular se corresponde con un muy específico estado de contracción de los grupos de músculos específicos del ojo». <sup>63</sup> El modelo de Hering defiende que, una vez decidimos cambiar el punto de fijación, el aparato muscular responde, provocando las tensiones que sean del caso, para cambiar, al unísono, la convergencia de los ejes visuales. Ello ocurre en virtud

<sup>58</sup> TOF, vol. 3, § 29, p. 253, fig. 48.

<sup>59</sup> Cfr. E. Hering, *op. cit.*, p. 23. Hering también aduce que cuando un ojo es completamente ciego, de todas formas acompaña los movimientos del ojo sano hasta lograr la percepción precisa de los objetos aun cuando no participe ópticamente.

<sup>60</sup> *Ibid*, pp. 153-188.

<sup>61</sup> *Ibid*, p. 83.

<sup>58</sup> <https://www.geogebra.org/m/ekuensm4>. Puntos móviles:  $B$ ,  $A$ ,  $L$  y  $R$ . Active el botón "Líneas visuales  $B'$ ".

<sup>59</sup> TOF, vol. 3, § 29, pp. 253-254; Hering, *op. cit.*, pp. 28-31.

de la estructura original del aparato de visión en su conjunto. Hering cree que los ojos siguen al nuevo punto de fijación sin que tengamos que aprender a dirigir cada ojo en particular. El sujeto sigue al objeto de su interés sin ocuparse conscientemente de las activaciones musculares necesarias para ello: «La meta de la voluntad no es la posición del ojo en sí mismo sino la percepción clara de un objeto visible; el movimiento no es deseado como tal sino que es dirigido por la voluntad».<sup>64</sup>

¿Hay, de un objeto, dos imágenes, una para cada ojo, que se fusionan antes de que la consciencia se ocupe de ellas, como demanda Aristóteles?<sup>65</sup> O ¿fija la consciencia su atención ora en la imagen derecha ora en la izquierda, y lo hace en una secuencia frenéticamente rápida al punto que crea la ilusión de estar contemplando una imagen unificada? Helmholtz se inclina por la segunda alternativa y supone que esta opción favorece el acercamiento asociacionista que pretende defender. Hering se inclina por la primera. Hay una serie importante de experimentos diseñados para tratar de elegir entre una de las dos alternativas. Es difícil encontrar en la segunda mitad del siglo XIX un reporte experimental que incline definitivamente la balanza en favor de uno de los extremos. Entre los experimentos más notables está el que se realiza con imágenes similares con colores diferentes para cada ojo. Este experimento evoca uno de los montajes de Ptolomeo. Se le pide a un observador que haga uso de unas gafas que cuentan con un buen filtro rojo para el ojo derecho y un buen filtro azul para el ojo izquierdo. Después se le pide, primero, que contemple un diseño ubicado en condiciones óptimas de observación y, segundo, que describa dicho objeto. Los defensores de la mezcla anticipada esperan que el observador reporte la existencia de un objeto con un color que corresponda a la mezcla de los tipos de luz que está recibiendo cada ojo. Los defensores de la segunda alternativa esperan que el observador reporte un frenético y aleatorio cambio de rojo a azul que se corresponda primero con la imagen en el ojo derecho y a continuación con la imagen en el izquierdo. Los reportes recogidos hasta finales del siglo XIX son ambiguos, el mismo Helmholtz, que no puede contar como un sujeto experimental neutral, confiesa que nunca ha podido observar la mezcla de colores esperada de acuerdo a la primera alternativa.<sup>66</sup>

<sup>64</sup> *Ibid.*, p. 41.

<sup>65</sup> Aristóteles concluye lo siguiente: «si alguien dijera que, igual que los ojos son dos, nada impide que suceda igual que el alma, la respuesta sería que de ambos ojos se produce una unidad, y el acto de ambos es uno solo, así que, en nuestro caso, si fuera uno el resultado de la acción de ambas partes, eso sería lo percibido, pero si actúan separadamente, la situación no sería la misma» (Aristóteles. (trad. en 1987). *Acerca de la sensación*. En *Tratados breves de historia natural*. Madrid: Editorial Gredos; 448b26-448b30).

<sup>66</sup> Helmholtz reconoce la dificultad asociada con los reportes experimentales. De un lado los reportes de A. W. Volkman (1801-1877) y G. Meissner (1829-1905) favorecen la perspectiva de Helmholtz; de otro lado, los reportes de H. W. Dove (1803-1879), H. V. Regnault (1810-1878), L. Panum (1820-1885) y Hering favorecen la fusión (cfr. *TOF*, vol. 3, § 32, p. 503). En cuanto a Hering, algunos de los experimentos para favorecer la mezcla de colores con visión binocular se llevaron a cabo sin usar filtros de colores diferentes para cada ojo. En estos experimentos se pide a un sujeto observar un rectángulo, mitad blanco y mitad negro; luego se le pide que desatienda al rectángulo y acomode sus ojos para fijar su atención en un punto

Si bien la tradición en la primera mitad del siglo XX favoreció el enfoque de Helmholtz sobre el de Hering en casi todos los aspectos, salvo en lo relacionado con el movimiento coordinado de los dos ojos que hemos presentado en el artículo, los investigadores en la segunda mitad del siglo han revitalizado la figura de Hering.<sup>67</sup>

### 3. Epílogo

Euclides propuso un artefacto conceptual que permitía enfrentar preguntas de investigación asociadas con la percepción visual con independencia de los compromisos ontológicos que los investigadores quisieran asumir con respecto a los mecanismos causales involucrados. La presuposición central del instrumento asume que la mediación entre objeto y observador transcurre por canales rectilíneos. El observador se concibe en el vértice de una pirámide geométrica y se espera que la evaluación que realiza de la información recogida involucre cálculos con las variables geométricas que provee el artefacto. El uso efectivo del instrumento demanda, no obstante, resolver varias obstrucciones que se presentan en su aplicación. Por ejemplo, no conviene reducir la actividad receptora del sensorio, cualquiera que sea su naturaleza, a lo que pueda ocurrir en un punto geométrico, el vértice de la pirámide. Tampoco conviene ignorar que los efluvios que emanan del ojo o se dirigen a él se quiebran, en virtud de la refracción, al atravesar las esferas cristalinas que conforman la estructura ocular.

En el artículo hemos estudiado las modificaciones más importantes al artefacto conceptual dirigidas a conservar su aplicación en los casos de visión binocular. El sistema de dos ojos cooperando puede ser substituido por uno virtual localizado en alguna posición intermedia. Hemos seguido el principio heurístico que le permite a Ptolomeo fusionar las dos pirámides visuales independientes y hemos evaluado la propuesta de Hering de postular una articulación funcional del sistema muscular que hace posible la rotación coordinada de los dos ojos. Hemos mostrado, siguiendo a Hering, que la base geométrica del mecanismo funcional admite también la posibilidad de sustituir los movimientos independientes y articulados del par de ojos por las rotaciones de un ojo-círculo estratégicamente localizado.

Las modificaciones estudiadas permiten conservar, para las aplicaciones binoculares, los rasgos estructurales centrales concebidos por el artefacto euclidiano. No obstante, el uso cabal del artefacto demanda responder a las otras dos obstrucciones mencionadas con anterioridad.

que se encuentra detrás del rectángulo. De esa forma, el observador tendrá una imagen doble del polígono. Así las cosas, el sujeto contempla un lado del polígono blanco, el otro lado negro y en el centro la mezcla de ambos colores, a saber, un gris (Cf., Hering, E. (1905-11/1964), *Outlines of a Theory of the Light Sense*. Cambridge (Mass): Harvard University Press; p. 24).

<sup>67</sup> Un seguimiento cuidadoso de los aportes de Hering en el estudio del color, por ejemplo, puede seguirse en L. Hurvich (1981), *Color Vision*, Sunderland (Mass): Sinauer Associates Inc. Publishers.

#### 4. Referencias

- Aguilonius, Franciscus. (1613). *Opticorum libri sex*. Antwerp: ex. Officina Plantiniana.
- Alhacén. (trad. en 2001). *De Aspectibus (I-III)*. En A. M. Smith (Edit. y Trad.), *Alhacen's Theory of Visual Perception* (pp. 1-816). Philadelphia: American Philosophical Society. Traducción al inglés con comentarios de los tres primeros libros del *De Aspectibus* de Alhacén, 2 vols.
- Aristóteles. (trad. en 1978). *Acerca del alma*. Madrid: Editorial Gredos. Trad. Tomas Calvo Martínez.
- . (trad. en 1987). *Acerca de la sensación*. En *Tratados breves de historia natural*. Madrid: Editorial Gredos. Trad. Ernesto La Croce y Alberto Bernabé Pajares.
- Borelli, Arianna. (2017). Optical Diagrams as “Paper Tools”: Della Porta’s Analysis of Biconvex Lenses from *De refraction* to *De telescopio*. En A. Borelli, G. Hon y Y. Zik (eds.), *The Optics of Giambattista Della Porta (ca. 1535-1615): A Reassessment* (pp. 57-96). New York: Springer.
- Cardona, Carlos. (2000). *La pirámide visual: evolución de un instrumento conceptual*. Bogotá: Editorial de la Universidad del Rosario.
- Crombie, A. C. (1986/1993). *Estilos de pensamiento científico a comienzos de la Europa Moderna*. Valencia: Seminari d’estudis sobre la ciencia. Trad. Josep Lluís Barona.
- Descartes, René (1638/1898). *Obras (Correspondance)*. En C. Adam y P. Tannery (Eds.), *Oeuvres de Descartes* (vol. ii) París: Léopold Cerf (editor); publicadas con el auspicio del Ministerio de Instrucción Pública.
- Euclides. (trad. en 2000). *Óptica*. Madrid: Editorial Gredos. Trad. Paloma Ortiz García.
- Held, Julius S. (1979). Rubens and Agulinius: New Points of Contact. *The Art Bulletin*, vol 61, No. 2, pp. 257-264.
- Helmholtz, Hermann von. (1909/2005) (3ª ed.). *Treatise on Physiological Optics* (Volúmenes 1, 2 y 3). Mineola: Dover Publications, Inc. Trad. James P. C. Southhall.
- Hering, Ewald. (1868/1977). *The Theory of Binocular Vision*. New York: Plenum Press. Trad. Bruce Bridgemann.
- . (1905-11/1964). *Outlines of a Theory of the Light Sense*. Cambridge (Mass): Harvard University Press. Trad. Leo M. Hurvich & Dorothea Jameson.
- Hurvich, Leo (1981), *Color Vision*, Sunderland (Mass): Sinauer Associates Inc. Publishers.
- Lindberg, David C. (1976). *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*. Chicago: The University of Chicago Pres.
- Kepler, Johannes. (1604/2000). *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*. Santa Fe: Green Lion Press. Trad. William H. Donahue.
- Knorr, W. R. (1985). Archimedes and the pseudo-Euclidean catoptrics: early stages in the ancient geometric theory of mirrors. *Archives internationales d’histoire des sciences*, 35, 28-105.
- Malebranche, Nicolás. (1712/2009). *Acerca de la investigación de la verdad*. Salamanca: Ediciones Sígueme. Trad. Javier Barinaga-Rementería.
- Platón. (trad. en 1992). *Timeo*. En *Diálogos VI*. Madrid: Editorial Gredos. Trad. M. Ángeles Duran y Francisco Lisi.
- Ptolomeo. (trad. en 1996). *Optics*. En M. Smith (edit. y trad.), *Ptolemy's Theory of Visual Perception* (pp. 67-261). Philadelphia: The American Philosophical Society.
- Raynaud, Dominique. (2016). *Studies on Binocular Vision*. Cham: Springer Verlag.
- Risner, Friedrich (1572). *Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem... Item Vitellonis Thuringopoloni libri decem*. Basile: Per episcopios.
- Turner, R. Steven. (1994). *In the Eye's Mind*. Princeton: Princeton University Press.

