No se trata, en definitiva, de un prólogo en el que se den explicaciones doctrinales, lo cual es de agradecer, ya que en una obra de esta talla supondría apartarse de lo que debe ser una traducción realizada con la debida seriedad y respeto que merecen las ideas del autor. Las notas aclaratorias resultan escasas, pero no hay duda que son de gran utilidad.

Decir, por último, que la lectura de este libro no finaliza en su última página, sino que tiene su continuación en la obra capital de Schopenhauer, ya anteriormente citada.

Schopenhauer, en la obra objeto de este comentario, está continuamente remitiendo a una lectura de toda su obra, quizá por ese deseo suyo de vender todos sus libros, olvidados en todas las épocas.

Se hace, por tanto, necesaria una continuación de la lectura de este libro en las demás obras del autor, y en particular en el libro clave: «El mundo como voluntad y representación».

José Luis MARTÍNEZ DE CASTRO

A. G., Hamilton: *Lógica para matemáticos.* Ed. Paraninfo, Madrid, 1981, 243 p.

Este libro de Hamilton tiene como misión introducir al lector con alguna base matemática en el estudio de las propiedades lógicas de los sistemas formales y en el tratamiento lógico de ciertos campos de la matemática. El libro requiere como lectura de apoyo la obra de Mendelson *(Introduction to Mathematical Logic)* y consta de dos partes: una, más elemental, formada por los cuatro primeros capítulos, dedicados a tratar las propiedades de consistencia, completud y decidibilidad de los sistemas formales del cálculo de proposiciones y del cálculo de predicados de primer orden, y un esbozo de la teoría de modelos y la teoría axiomática de conjuntos. Los capítulos restantes, del 5 al 7, versan sobre algunas teorías matemáticas, el teorema de incompletitud de Gödel para la aritmética formal de primer orden, un sistema de cómputo («máquinas de Turing») y el problema de decidibilidad recursiva de los sistemas formales.

En la primera parte, Hamilton pretende caracterizar lo que es un «sistema formal» en general y efectuar un análisis de los procesos demostrativos, para dar una noción de lo que es una «argumentación válida», investigando la naturaleza deductiva de dos sistemas formales concretos, L y K, de la lógica de proposiciones y de la lógica de predicados de primer orden respectivamente.

El sistema L del cálculo de proposiciones contiene un alfabeto de símbolos que cuenta tan sólo con el conjunto adecuado de conectivas $\{\sim, \rightarrow\}$, un conjunto de fórmulas bien formadas —fbfs—, 3 esquemas de axioma y una regla de deducción (Modus Ponens). La limitación del número de conectivas tiene por objeto hacer al sistema más sencillo. De un sistema formal se espera idealmente que, haciendo uso de su alfabeto de símbolos —atendiendo únicamente a sus propiedades formales— axiomas y reglas de operación, podamos comprobar si existe una correspondencia entre el conjunto de fbfs que sean tautologías y el conjunto de teoremas; es decir, si las «verdades lógicas» expresables en el lenguaje del sistema se pueden derivar a partir de los axiomas iniciales y las reglas deductivas del sistema, y si cualquier fbf del sistema obtenida por este procedimiento es una «verdad lógica». La cuestión se centra, pues, en probar que el sistema elegido, L, posee esta propiedad.

El método seguido por Hamilton consiste en lo siguiente:

Primero hay que probar que todo teorema de L es una tautología, es decir, que las fbfs derivables en L son «lógicamente válidas» (Teorema de Corrección para L) y después, probar lo contrario. Pero para esto último hacen falta dos nuevas nociones: extensionalidad y consistencia. La extensionalidad permite obtener mayor número de teoremas al ampliar el conjunto inicial de axiomas del sistema L, pero si L se fuese extendiendo más y más a sistemas con mayor número de teoremas cada vez, llegaría un momento en que se producirían contradicciones al contar con una extensión que incluiría como teoremas suyos para una fbf cualquiera A, tanto A, como su negación, $\sim A$. Para evitar ésto es necesario preservar, a la par que aumentamos el conjunto de teoremas, la consistencia del sistema. Sintácticamente la consistencia se asegura cuando no es posible para cualquier fbf A de una extensión L* que A y $\sim A$ sean ambas derivables en la extensión. Así pues, para mantener la consistencia y tener un sistema completo hay que encontrar el punto en el que no se puedan incluir más fbfs como axiomas adicionales sin volver inconsistente al sistema, y además, para cada fbf A de la extensión, o bien A, o bien $\sim A$ resulte teorema de la extensión. Este punto nos da una extensión L* de L, consistente y completa. Conseguido ésto, se está en disposición de demostrar lo que se pretendía: todas las fbfs de L que son «verdades lógicas» son teoremas de L (Teorema de Adecuación para L). Para ello resulta imprescindible el poder contar con «métodos efectivos» que permitan decidir si una determinada fbf de L es o no un teorema de L. Las tablas de verdad, por ejemplo, constituyen un método tal.

En resumen, por el teorema de Corrección, las fbfs de L que son tautologías son teoremas de L y como L no es completo, gracias a sus extensiones se puede conseguir un sistema formal que sí lo sea, evitando de paso las contradicciones formales dentro de él merced a la consistencia. De esta manera, se puede probar el teorema de Adecuación para L. Hamilton emplea este mismo método, con ligeras variantes, para estudiar las propiedades formales del sistema K de la lógica de predicados de primer orden. Hamilton presenta un lenguaje de primer orden   , para el cual, existe un sistema deductivo K —o más abreviadamente K — que contiene: variables, constantes individuales, las mismas conectivas que L, el cuantificador universal $\forall$, 6 esquemas de axiomas (los 3 primeros son los de L y los 3 restantes son propios de la lógica de predicados al contener el generalizador) y dos reglas deductivas, el Modus Ponens y la regla de generalización de $\forall$.

Ponens y la regla de generalización de

El tratamiento del teorema de Adecuación para K sigue pasos paralelos a la demostración dada para L, pero con algunas variaciones. Hamilton sigue el método dado por Henkin. El problema de la consistencia de las extensiones de K está considerado desde un punto de vista semántico: si S es una extensión consistente de K existe una interpretación I de en la que todo teorema de S es verdadero. Probado ésto y la completud de S como extensión de K, pues K no es completo, se puede ya probar que las fórmulas lógicamente válidas de son teoremas de K.

A partir del capítulo 5, Hamilton hace una interpretación matemática de los símbolos del lenguaje formal ; por lo tanto, los axiomas del sistema deductivo K pasan a convertirse en verdades matemáticas además de ser verdades lógicas. Pero por tratarse de un contexto matemático se necesitan también axiomas «propios» de la teoría que se está usando. Así, Hamilton incluye 3 esquemas de axiomas propios de un sistema matemático de la aritmética de primer orden con igualdad, que serán precisamente los axiomas de la igualdad. Todos los sistemas matemáticos que aparecen en el libro de Hamilton son extensiones de K (teoría de grupos, aritmética de primer orden y teoría de conjuntos formal). A continuación, Hamilton hace una exposición del teorema de incompletitud de Gödel de la aritmética formal de primer orden, el sistema , que posee como modelo el conjunto de los números naturales. Para probar la incompletitud de tal sistema hacen falta nociones nuevas; una de ellas es la de «recursividad». Existen ciertas funciones que son recursivas, como las funciones básicas: cero, sucesor y la función de proyección, para el conjunto N de los números naturales, y las funciones obtenidas a partir de éstas y de las reglas de composición, recursión y minimización, son igualmente recursivas. El sistema N presentado posee un conjunto de axiomas recursivo, que según el teorema de Gödel citado, es incompleto a causa de esta característica. Eso no quiere decir que no pueda haber sistemas de primer orden para la aritmética que sean consistentes y completos, sino que, no existe un sistema tal con un conjunto de axiomas recursivo. Para explicar ésto, Hamilton acude a las ideas de «computación». «decibilidad» y «algoritmo», a las que dedica el último capítulo de su obra.

Siguiendo la tesis de Church de que las funciones (parciales) recursivas son computables mediante un algoritmo, pueden usarse técnicas matemáticas que diluciden si un conjunto dado de axiomas o esquemas de axiomas es o no recursivo y por consiguiente, si posee un algoritmo para una clase particular de problemas. Un algoritmo es un conjunto de instrucciones que establece un procedimiento de cómputo para encontrar una respuesta a una determinada clase de preguntas. Por ejemplo, a una pregunta como: ¿es A verdadera en S/ A fbf

de S? Necesitamos pues, los algoritmos, para «decidir» si una fbf de un sistema dado es un axioma o teorema del sistema. Si ese sistema formal es recursivo, entonces por la tesis de Church existe para él un algoritmo mediante el cual podamos comprobar si una fbf del sistema es o no un teorema del sistema. Ahora bien, en este punto el teorema de incompletitud de Gödel diría que un sistema tal no incluye todas las fbfs verdaderas en la interpretación
tema tal no incluye todas las fbfs verdaderas en la interpretación N.

Uno de los procedimientos algorítmicos que expone Hamilton son las «máquinas de Turing» (un sistema abstracto que refleja procedimientos de cálculo). El propósito de Hamilton es mostrar un método que contribuya a resolver el problema de la decidibilidad recursiva de los sistemas formales. El sistema L del cálculo de proposiciones es recursivamente decidible, porque el sistema de numeración de Gödel le es aplicable; en cambio, la decidibilidad o indecidibilidad recursiva de K dependerá del lenguaje L fijado K , sin letras de función ni constantes individuales, por ejemplo, es recursivamente decidible. el sistema N, bajo la hipótesis de que sea consistente, no es recursivamente decidible de ninguna manera, o sea, no disponemos de ningún método de computación que nos asevere cuáles de las proposiciones de N son teoremas de N.

Alfredo BURRIEZA MUÑOZ

Los textos fundamentales de Wittgenstein. Compilación de Gerd Brand. Versión española de Jacobo Muñoz e Isidoro Reguera. Alianza, Madrid, 1981, 185 p.

La más reciente llegada de textos wittgensteinianos viene de las manos garantes de los profesores Jacobo Muñoz e Isidoro Reguera, a través de una curiosa recopilación llevada a cabo por Gerd Brand con el título de *Los textos fundamentales de Ludwig Wittgenstein,* Alianza Universidad, Madrid, 1981. La conducción al español de las obras de tan importante e influyente autor anda obturada desde hace ya algún tiempo por esa prometida y anunciada traducción mexicana de las *Philosophische Untersuchungen* que no acaba de llegar. Aunque el interesado pueda disponer generalmente de la versión alemana/inglesa o de la italiana, parece excesiva la demora en presentar al lector español obra tan oscura y difícil como importante para conocer de primera mano de dónde y por qué algunas filosofías actuales son lo que son. Mientras tanto, todo lo que viniere a ocupar ese vacío, aunque fueren sólo muestras o retazos, habrá que tomarlo como bueno.

Lo primero que salta a la vista del libro que comentamos es que no se trata de lo que de sólito conocemos como una antología. Esta, en efecto, suele ha-