LA GEOMETRÍA EN EL PENSAMIENTO DE KANT

A Enrique d'Etigny

La peculiaridad más original de la filosofía teórica de Kant es la tesis de que el conocimiento humano puede ir más allá del contenido informativo de nuestros conceptos sin apoyarse en los datos de los sentidos. Esta tesis está íntimamente vinculada a la doctrina kantiana según la cual tenemos acceso a una fuente de conocimientos que no es empírica ni conceptual. Esta fuente, que Kant llama la «intuición pura», nos proporciona según él nuestras representaciones del tiempo y del espacio. Kant concibe a la geometría como la ciencia de las determinaciones del espacio. Kant aduce el conocimiento geométrico cuando quiere proponer un ejemplo incuestionable de que hay conocimientos que rebasan el contenido informativo de los conceptos que combinan, sin apoyarse empero en datos sensoriales. Kant da también otros ejemplos de tales «juicios sintéticos *a priori*», como llama a este género de conocimientos. Pero esos otros ejemplos no tienen el mismo valor y pertinencia que el conocimiento geométrico. Una parte de ellos, los llamados principios de la ciencia natural pura, no siempre han sido reconocidos como válidos y hasta cabe sostener que uno de los propósitos de la filosofía teórica de Kant ha sido el de justificar su validez. La parte restante consiste en verdades aritméticas, las cuales gozan por cierto de universal reconocimiento, pero no es fácil comprender cómo pudieran fundarse en una «intuición pura» del espacio o del tiempo [1]. Parece, por esto, razonable suponer que las verdades geomé-

[1] El pastor Schultz escribió que como «la geometría tiene como objeto el espacio y la aritmética tiene como objeto el contar (y éste sólo puede llevarse

tricas han sido el paradigma de los «juicios sintéticos *a priori*» de Kant y que la reflexión sobre su naturaleza y fundamento ha jugado un papel sobresaliente en la edificación de la doctrina de la *Crítica de la razón pura*.

En el último tercio del siglo XIX la autoridad de Kant y la condición privilegiada que su filosofía atribuye a la geometría clásica solieron invocarse para combatir los sistemas geométricos alternativos, introducidos por Bolyai, Lobachevsky y Riemann, y que muchos filósofos hallaban inquietantes. El descrédito que se quiso arrojar sobre ellos en nombre de Kant revirtió luego sobre éste cuando las nuevas geometrías acabaron de imponerse como matemáticamente legítimas y la teoría general de la relatividad les dio además el espaldarazo de la aplicación física (Einstein, 1916). Los estudios sobre la filosofía de las matemáticas de Kant publicados hacia 1900 nacen al calor de la controversia. Se dirigen a refutar a Kant, como el excelente ensayo de Couturat (1904), o a mostrar que, no obstante las apariencias en contrario, Kant ha sido una especie de precursor filosófico de la matemática moderna (Meinecke, 1906; Cassirer, 1907). En las décadas siguientes, cuando se quiso separar «lo vivo y lo muerto» en la herencia kantiana, fue casi inevitable consignar al cementerio a toda la concepción filosófica de la geometría y con ella a la cardinal teoría del espacio y el tiempo (Walsh, 1947). En los últimos años renace el interés por este aspecto esencial del pensamiento kantiano. Gottfried Martin (1951) y Heinz Heimsoeth (1960) subrayan nuevamente la importancia de los problemas filosóficos del espacio en la constitución de la doctrina crítica. P. F. Strawson trata con más simpatía que comprensión a la teoría de la geometría de Kant en la parte final de *The bounds of sense* (Strawson, 1966). Jules Vuillemin (1969), en una serie de notas más sugestivas que concluyentes, busca interpretarla a la luz de las matemáticas del siglo XIX. Jaakko Hintikka, en una brillante serie de trabajos (1965, 1967, 1969, 1972, 1973), asimila a la teoría moderna de la deducción

a cabo en el tiempo), es evidente de qué manera son posibles la geometría y la aritmética» (Schultz (1784), pág. 24). Pero Kant no se dejó ofuscar por las «evidencias» de su amigo el pastor. El 25 de noviembre de 1788 le escribe: «No obstante la sucesión que se requiere siempre para construir una magnitud, la ciencia del número es una síntesis *puramente intelectual*, que nos representamos en *pensamientos*» (*Ak.*, X, 557; cursiva mía).

lógica uno de los puntos más vilipendiados de la teoría kantiana, la tesis de que la demostración geométrica a cada paso se apoya en la «intuición».

Las páginas siguientes, libres de todo ánimo polémico o apologético, quisieran contribuir a un mejor conocimiento de las reflexiones filosóficas de Kant sobre la geometría. Con este fin he elegido varios textos redactados por Kant en diversos momentos de su vida, cuyo análisis y comentario me ha parecido que podía arrojar luz sobre su pensamiento acerca de este tema.

1. La geometría suprema

A los veintidós años Kant tercia en la disputa entre leibnizianos y cartesianos [2] con su disertación magisterial *Sobre la verdadera manera de calcular las fuerzas vivas* (1746). En el § 9 de la misma expresa que el espacio y la extensión no existirían si «las sustancias no tuviesen fuerza para actuar fuera de sí». Sin dicha fuerza, agrega, «no hay enlace; sin éste, no hay orden, y sin éste, finalmente, no hay espacio» (*Ak.*, I, 23). Kant adopta ostensiblemente la concepción leibniziana del espacio como un mero orden de coexistencia. Pero declara que ve un círculo vicioso en la demostración de la tridimensionalidad del espacio que Leibniz ofrece en el § 351 de la *Teodicea*. A diferencia de Leibniz, el joven Kant no cree que la tridimensionalidad pueda ser establecida por una demostración lógica, digamos, analizando la noción misma de espacio. En el § 10 propone una explicación física de la tridimensionalidad del espacio. Según él, este modo de explicación viene impuesto por la propia concepción leibniziana: si las fuerzas que las sustancias ejercen unas sobre las otras son el fundamento del ser del espacio, ellas serán también el fundamento de sus propiedades, inclusive la propiedad de tener tres dimensiones. Kant prosigue:

---

[2] Sobre la disputa entre leibnizianos y cartesianos acerca de la verdadera manera de calcular las fuerzas vivas, puede consultarse a Erich Adickes (1924), págs. 65-82.

> Según esto sostengo pues que las sustancias en el mundo existente del que somos parte poseen fuerzas esenciales que vinculadas entre sí difunden sus efectos en proporción inversa al cuadrado de las distancias; segundo, que el todo que surge de esto posee en virtud de esta ley la propiedad de ser tridimensional; tercero, que esta ley es arbitraria y que Dios pudo haber elegido otra en vez de ella, por ejemplo la de la proporción inversa al cubo; y cuarto, por último, que *de una ley diferente habría resultado una extensión con otras propiedades y dimensiones. Una ciencia de todas estas posibles clases de espacio sería ciertamente la geometría suprema que un entendimiento finito pudiera desarrollar* (*Ak.*, I, 24; cursiva mía).

Este texto sugiere más preguntas de las que permite contestar con seguridad. Kant obviamente distingue entre una geometría suprema y la familiar geometría de Euclides aplicada por la ciencia de su tiempo en la descripción de los procesos físicos. Llamemos a aquella, geometría general, a esta, geometría física. ¿Cuál es la relación entre ellas y de ambas con la realidad? La geometría general se caracteriza expresamente como la ciencia de un espacio de cualquier número de dimensiones, o, como hoy diríamos, de un espacio n-dimensional. ¿Qué otras características del espacio deja indeterminadas la geometría general? ¿Hay alguna determinación importante que el texto kantiano obligue a suponer que sería común a todos los espacios posibles de que trate la geometría general? La reflexión sobre estas preguntas, aunque inevitablemente plagada de conjeturas, contribuye a arrojar luz sobre la doctrina posterior de Kant sobre el espacio y la geometría. Empecemos por las dos últimas.

Kant contempla en forma explícita «una extensión de otras propiedades y dimensiones». ¿En qué propiedades está pensando, aparte de la dimensión? La sola generalización del número de dimensiones nos sugiere la idea de extender a los espacios de tres o más dimensiones ciertos distingos familiares en el caso de las superficies o espacios bidimensionales. Pero ¿se la sugería a Kant? No creo, por ejemplo, que haya pensado nunca en el distingo entre espacios orientables y no-orientables (en estos últimos, un zapato podría sacarse de un pie y calzarse en el otro después de hacerlo recorrer un trayecto apropiado), desde luego, porque no debe haber conocido las superficies no-orientables, aunque una de ellas, la cinta de Moebius, es fácil de construir [3]. Es claro, en cambio, que le eran familiares superficies como la esfera, sobre las cuales quien se aleja constantemente de un punto dado por el camino más corto acaba retornando a él desde la dirección opuesta a aquella hacia la cual partió. ¿Concibió Kant la posibilidad de espacios de tres o más dimensiones, con una propiedad análoga a ésta de la esfera? Un detalle del texto fija un límite a las variaciones posibles de un espacio a otro que Kant habría admitido: la tridimensionalidad del espacio en que vivimos se debe a que los efectos de las fuerzas con que las sustancias actúan unas sobre otras varían en proporción inversa al cuadrado de las distancias. Esto implica, al parecer, que la distancia comparativa entre las posiciones en el espacio constituye, según Kant, un carácter fundamental e invariable de éste, puesto que de ella depende la determinación de una de esas leyes físicas que supuestamente definen los caracteres variables del espacio. Vale la pena llamar la atención sobre este detalle, por cuanto nos hemos acostumbrado a considerar a la métrica o función que asigna distancias a los pares de puntos de un espacio, como una característica de éste menos básica que el número de dimensiones, por ejemplo, o la orientabilidad, y el debate filosófico contemporáneo sobre estas materias está dominado por la idea de que un mismo espacio, digamos, una misma extensión continua de cierto número de dimensiones, puede admitir métricas alternativas, variando su estructura geométrica según se adopte una u otra definición de distancia [4].

Cuanto más remotos e incomprensibles nos aparezcan los detalles técnicos que presupondría una elaboración precisa de las ideas de Kant, tanto más ha de sorprendernos la modernidad de la concep-

[3] Tómese una cinta rectangular, bastante más larga que ancha, numérense los vértices en el orden en que los recorrerían las agujas de un reloj, únanse los dos bordes opuestos más cortos, cuidando de hacer coincidir los vértices 1 y 3, 2 y 4. Moviendo una D sobre la superficie así obtenida podemos llevarla a coincidir con una Ɑ.

[4] Cf. Grünbaum (1973).

ción general del conocimiento geométrico que había alcanzado a los veintidós años de edad. A esto se refiere la pregunta que formulamos arriba en primer término y que ahora pasamos a considerar. El texto trascrito sugiere inequívocamente cuál es la relación entre la «geometría suprema» que Kant proyecta y la geometría euclidiana que emplean Galileo y Newton: ésta debe concebirse como un caso particular de aquélla, como una especificación resultante de asignar determinados valores numéricos a unos parámetros que la geometría general deja indeterminados. Kant menciona sólo uno de estos, la dimensión, pero insinúa que pudiera haber otros. Parece claro asimismo que la decisión sobre el valor efectivo de los parámetros del espacio real debe basarse, según Kant, en la experiencia. No podríamos, en efecto, determinar *a priori* unas características fundadas en lo que Kant llama expresamente «una ley arbitraria». Incierta, en cambio, es la índole de esa experiencia. ¿Podemos establecer las propiedades universales del espacio por observación directa, como establecemos, por ejemplo, que el sol es más luminoso que la luna, o que el agua de mar es salobre? ¿O la determinación de tales propiedades sólo puede hacerse indirectamente, observando sus consecuencias empíricas particulares? Podría pensarse que el único parámetro que Kant expresamente menciona, a saber, el número de dimensiones, puede ser determinado por observación directa, con total exactitud (gracias a que sólo admite valores enteros: 1, 2, 3, 4, etc.). Pero aun en este caso, como ha señalado Carnap (1922, págs. 66-67), la observación sólo nos autoriza a emitir un juicio acerca de la región del espacio que observamos, y no nos permite saber si ella es o no un subespacio de un espacio de más dimensiones. Con otros parámetros la situación es más grave. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo, mayor que dos rectos en un triángulo esférico, se aproxima indefinidamente a dos rectos según decrece el área del triángulo en comparación con el radio de la esfera sobre la cual está trazado. Las mediciones de triángulos permiten pues, decidir, si una superficie es esférica, pero sólo si se consideran triángulos suficientemente grandes en relación a la curvatura de la superficie[5]. De otro modo, el exceso de la suma de los ángulos sobre dos rectos puede ser tan pequeño que nuestros

[5] La curvatura de una esfera es el valor recíproco del radio.

instrumentos no permitan distinguirlo de cero. Consideraciones análogas pueden aplicarse a la determinación empírica de las propiedades características de un espacio de tres dimensiones (o más). En las obras de su madurez, Kant se muestra muy consciente de la índole esencialmente imprecisa e incompleta del saber empírico[6]. Por otra parte, seguramente se ha percatado de que la medición empírica presupone un saber o, en todo caso, una decisión acerca de las propiedades del espacio. La consideración de estos hechos ¿habrá influido en el abandono por Kant de su incipiente concepción de la geometría física como ciencia empírica? No podemos saberlo con certeza, pues los textos nada nos dicen al respecto, pero esta conjetura parece plausible.

Habíamos preguntado por la relación entre las geometrías que Kant distingue y la realidad. En el caso de la geometría física parece claro que se la concibe como un saber adecuado acerca de propiedades y relaciones de las cosas que pueblan el mundo en que vivimos. Kant entenderá así durante toda su vida el valor cognoscitivo de la geometría euclidiana y aunque en el escrito que comentamos no lo dice, parece que lo presupone. En cuanto a la geometría general, parece que él ve en ella un saber acerca de caracteres comunes a todos los mundos posibles. En el § 8 Kant define *mundo* como *rerum omnium contingentium simultanearum et succesivarum inter se connexarum series*[7] y sostiene que Dios puede muy bien crear muchos mundos, esto es, muchas de estas series, inconexas entre ellas. Al especificar de distintas maneras los parámetros del espacio que la geometría general deja indeterminados obtenemos diversos mundos posibles, cada cual con su peculiar geometría física. Pero también podría haber, en principio, varios mundos o series inconexas de cosas con una misma geometría. Sobre esto Kant da su opinión en el curioso § 11. Con Leibniz, Kant estima que las obras de Dios «poseen toda la grandeza y variedad que pueden abarcar» (*Ak.*, I, 25). Esto le hace pensar, a diferencia de Leibniz, que Dios ha creado más de un mundo. Sin embargo, si estos diversos mundos tuviesen un espacio del mismo tipo, digamos, un espacio tridimen-

[6] Especialmente elocuentes son dos pasajes del *Opus postumum* (*Ak.*, XXI, 61 y 99) que cito en alemán y en español en Torretti (1967), págs. 485 s.

[7] «Serie de todas las cosas contingentes simultáneas y sucesivas conexas entre sí» (*Ak.*, I, 23 n.).

sional, «entonces los otros mundos... podrían estar conectados espacialmente con el nuestro... y habría que preguntarse, por qué Dios ha separado un mundo de los otros cuando al enlazarlos habría comunicado a su obra una perfección mayor; pues, cuanto más enlace, tanta más armonía y concordancia hay en el mundo y en cambio las lagunas y separaciones infringen las leyes del orden y de la perfección» (*Ak.*, I, 25). Kant concluye por esto que sólo puede existir más de un mundo si puede haber más de una clase de espacio. Sólo la diversidad de la estructura geométrica garantiza la incomunicabilidad. Este pasaje, tan ajeno a la manera post-kantiana de pensar que es la nuestra, es interesante para nosotros, sin embargo, porque confiere implícitamente a la geometría general una dignidad que no posee a primera vista. A través de ella ganaríamos acceso teórico a realidades de las que estamos absolutamente desconectados. El interés de esta tesis reside en esto: muestra a Kant tan poco dispuesto en 1746 como lo estará más tarde, a reconocer como ciencia a un saber que no se refiera a algo que, al menos conjeturalmente, exista.

El escrito de 1746 no nos da base para resolver un último interrogante: ¿Cómo establece sus verdades la geometría general? Los conocedores de Leibniz se inclinarán a sobreentender que la verdad en geometría en general se caracteriza sólo por la ausencia de contradicción. Pero ¿podemos atribuir este modo de ver a Kant? La cuestión es delicada. Por un lado, Kant ha comprendido ya en 1746 que el criterio leibniziano de la no contradicción no basta para determinar una estructura tan específica como la del familiar espacio euclidiano: el pasaje que estamos analizando parte de la comprobación de que ni siquiera la tridimensionalidad puede establecerse —como había intentado Leibniz— recurriendo solamente a este criterio. Pero ¿se ha percatado Kant ya entonces del grado de arbitrariedad que el uso exclusivo del criterio leibniziano introduce en las matemáticas? Probablemente no. No es inverosímil que el haberlo barruntado más tarde, asistido tal vez por su amigo Lambert, haya contribuido poderosamente a que Kant dejase atrás el pluralismo geométrico de sus veinte años y procurase dar a la geometría euclidiana del mundo real un fundamento filosófico que certificara su valor cognoscitivo y su unicidad.

2. Contrapartidas incongruentes

En el artículo «Zenón», nota I, de su famoso *Diccionario*, Pierre Bayle expone las consecuencias metafísicas de la divisibilidad infinita del espacio. Por una parte, si el espacio es infinitamente divisible, las cosas espaciales también lo son; no existen átomos, en sentido estricto. «Pues toda extensión, por pequeña que sea, tiene un lado izquierdo y un lado derecho, un lado de arriba y un lado de abajo. Por lo tanto, es una colección de cuerpos distintos. Puedo negar del lado derecho lo que afirmamos del izquierdo. Estos dos lados no están en el mismo lugar. Un cuerpo no puede estar en dos lugares a la vez y, por lo tanto, toda extensión que ocupa varias partes del espacio contiene varios cuerpos» (Bayle, pág. 360). Por otra parte, la divisibilidad infinita de las cosas espaciales no es compatible con su existencia real. Bayle arguye profusamente en pro de esta conclusión. Más conciso y contundente que los suyos, me parece el siguiente argumento, inspirado en el tratamiento kantiano de la cuestión [8]. Toda cosa divisible se compone de partes y subsiste realmente en la medida en que subsisten éstas. La realidad existente en la cosa no puede verse menoscabada, pues, si se suprimen los vínculos que unen a las partes que la forman. Pero si la cosa compuesta es infinitamente divisible, cada una de sus partes también lo es. Al suprimirse todos los vínculos que unen a éstas para formar a aquélla, se disipan las partes mismas y no resta nada subsistente que pudiera señalarse como base de la subsistencia de la cosa. Si hay tanta realidad en la cosa compuesta como queda en pie al suprimirse los vínculos de composición, fuerza es concluir que una cosa infinitamente divisible no tiene ninguna realidad.

La tesis de la irrealidad del espacio y de las cosas espaciales, que Bayle atribuye a Zenón de Elea, puede eludirse, por cierto, rechazando la divisibilidad infinita del espacio real, en que existimos nosotros y los cuerpos que nos rodean. Varios autores del siglo XVIII

---

[8] *Ak.*, I, 105-108; *KrV*, A 434/B 462.

se valen de esta salida [9]. Kant la rehuyó siempre. La geometría clásica supone la divisibilidad infinita del espacio en que recorta sus figuras [10]. La física de Galileo y Newton supone que los cuerpos que ella estudia y el espacio en que se mueven obedecen a las leyes de la geometría clásica. Negar la divisibilidad infinita del espacio real equivale pues a negar que la física de Galileo y Newton hable de los cuerpos reales. Como es sabido, antes que admitir esta restricción del valor cognoscitivo de la ciencia matemática de la naturaleza, Kant preferirá sostener que los cuerpos que de ordinario llamamos reales no poseen ese género de subsistencia independiente que es requisito de la realidad metafísica. Pero antes de elaborar la doctrina que llamará de la idealidad trascendental del espacio y los cuerpos, ensayará una solución diferente de las dificultades de la divisibilidad infinita.

Ella aparece expuesta en la *Monadologia Physica,* la disertación latina que Kant presentó en 1756 a la Facultad de Filosofía de Königsberg como «una primera muestra del empleo de la metafísica unida a la geometría en la filosofía natural» (*Ak.*, I, 473). Se sostiene allí, por un lado, que los cuerpos se componen de sustancias simples o mónadas, y por otro, que el espacio que los cuerpos llenan es infinitamente divisible y por lo tanto no consta de partes simples. ¿Cómo se concilia esta doble afirmación con el argumento que hemos trascrito de Bayle? Kant sostiene que, aunque las mónadas ocupan espacio, no son extensas, y por lo tanto pueden muy bien ser simples e indivisibles no obstante la divisibilidad del espacio que ocupa cada una. La mónada no ocupa el espacio en que está presente llenándolo con una pluralidad de partes sustanciales suyas —como presuponía Bayle— sino con la actividad mediante la cual impide el acercamiento de otras mónadas presentes en los espacios vecinos.

> Si una mónada, como sostenemos, llena un espacio determinado, éste puede ser representado por cualquier otro es-

---

9 Véase, por ejemplo, Crusius (1753), págs. 188-202. Sobre esta materia puede consultarse con provecho a Tonelli (1959), págs. 177-185.

10 Kant ofrece una demostración geométrica de la divisibilidad infinita del espacio en su obra juvenil *Monadologia Physica* (*Ak.*, I, 478). Esa demostración aparece resumida en español en Torretti (1967), págs. 105-108.

pacio finito. Represente pues el pequeño círculo ABCD al pequeño espacio que la mónada ocupa con su actividad; sea BD el diámetro de la esfera de esta actividad, es decir, la distancia a la que impide que otras mónadas, presentes a ella en B y D, se sigan acercando mutuamente. Cuidémosnos de aseverar, empero, que este es el diámetro de la mónada misma, pues ello sería absurdo. Pues *como el espacio se resuelve en puras relaciones externas, lo que es interno a la sustancia*, esto es, la sustancia misma, sujeto de las determinaciones externas, *no está en rigor determinado por el espacio*, sino sólo aquellas determinaciones suyas que se refieren a lo externo pueden lícitamente buscarse en el espacio. Pero, dices, en este pequeño espacio está la sustancia, presente en todo lugar dentro de él, de suerte que al dividirse el espacio se divide la sustancia. Respondo: ese espacio es el ámbito de la presencia externa de este elemento. Quien divide el espacio divide pues la magnitud extensa de su presencia. Pero además de la presencia externa, esto es, de las determinaciones relativas de la sustancia, hay otras internas, y si éstas no existieran, aquéllas no tendrían un sujeto en el cual inherir. Pero las determinaciones internas no están en el espacio, justamente porque son internas. No las divide, pues, la división de las determinaciones externas, y por lo tanto el sujeto mismo, esto es, la sustancia, tampoco resulta dividido (*Ak.*, I, 481; cursiva mía).

La solución kantiana depende, pues, esencialmente de dos supuestos: la concepción de los cuerpos como compuestos de sustancias simples que son centros inextensos de fuerzas que se extienden y la concepción del espacio mismo como un puro sistema de relaciones abstraídas de la interacción de esas fuerzas. En un ensayo de 1762 [11], Kant menciona aún esta solución suya del problema de la divisibilidad infinita del espacio como un «ejemplo del único método seguro de la metafísica» (*Ak.*, II, 286). Pero dos años

[11] «Investigación sobre la nitidez de los principios de la teología natural y de la moral». Una versión española mía de este ensayo aparecerá en *Diálogos*, núm. 27 (1974).

más tarde, en *Sueños de un visionario*, manifiesta ciertas reservas motivadas por la dificultad de incorporar a esta doctrina una solución aceptable de los problemas que suscita la interacción de alma y cuerpo [12]. No podemos determinar en qué medida estas dudas han motivado las indagaciones que conducen a Kant a un descubrimiento que, a sus ojos, refuta definitivamente la concepción relacionista del espacio, quebrando así una de las bases en que descansaba su solución del problema de la divisibilidad.

Kant publica este descubrimiento en 1768 en un breve artículo en un semanario de Königsberg [13]. Concierne a las consecuencias ontológicas de un hecho geométrico familiar: existen cuerpos tales que, si los consideramos por separado, atendiendo a las relaciones espaciales entre sus partes respectivas, nos aparecen como geométricamente indiscernibles, y que, sin embargo, no son congruentes, pues uno de ellos no puede hacerse caber dentro de la región del espacio que ha llenado el otro. Ejemplos aproximados son el pie izquierdo y el pie derecho de una persona, o, mejor, un zapato izquierdo y el zapato derecho correspondiente. Para determinar un ejemplo exacto recurrimos a una construcción sencilla. Sea K un cuerpo cualquiera, Π un plano cualquiera. De cada punto p de K bajamos la perpendicular a Π. Sea q el punto en que esa perpendicular llega a Π. Si prolongamos esa perpendicular al otro lado de Π podemos marcar en ella un punto p', tal que el segmento pq es igual al segmento qp'. Llamamos a p' la imagen de p, abreviado $i(p)$. La correspondencia que asigna a cada punto p de K su respectiva imagen $i(p)$ se llama reflexión de K respecto al plano Π. En virtud de ella, corresponde a K un cuerpo i(K), que llamaremos una *contrapartida* de K. En virtud de nuestro modo de construirla, es claro que no se hallará una diferencia entre K e i(K) si se atiende exclusivamente a las relaciones espaciales entre sus partes respectivas. Sin embargo, por regla general, K e i(K) no son congruentes; K no puede ocupar un espacio que ha ocupado i(K). Kant dice, en

[12] *Ak.*, II, 321-325; cf. carta a M. Mendelsohn del 8 de abril de 1766 (*Ak.*, X, 71). Me refiero a este tema en Torretti (1967), págs. 113-115.

[13] «Sobre el fundamento primero de la diferencia entre las regiones del espacio» (*Ak.*, II, 377-383). He publicado una versión española de este ensayo en *Diálogos*, núm. 22 (1972), págs. 139-146. Analizo su contenido y critico a dos de sus críticos (Couturat y Reidemeister), en Torretti (1967), págs. 119-131.

tal caso, que K e $i(K)$ son *contrapartidas incongruentes* (*inkongruente Gegenstücke*)[14]. En el mundo en que vivimos existen sin duda contrapartidas incongruentes. Tal es el hecho geométrico familiar del que Kant cree poder inferir importantes consecuencias ontológicas. La imposibilidad de que K ocupe el espacio que puede ocupar su contrapartida $i(K)$ es una característica espacial de K. Esta característica no depende, empero, de las relaciones mutuas de sus partes, pues en este aspecto K no se distingue de $i(K)$. Pero si el espacio no fuese más que un puro sistema de relaciones abstraído de la interacción entre las cosas de las que se dice que lo ocupan, K no podría exhibir una característica espacial independiente de las relaciones entre las partes de que consta. La existencia de cuerpos incongruentes con sus respectivas contrapartidas demuestra, pues, según Kant, que la concepción relacionalista del espacio es falsa, y que el espacio es una entidad *sui generis*, que condiciona el modo mismo de ser de los cuerpos que hay en él, los cuales, por lo tanto, no pueden concebirse simplemente como compuestos de sustancias inextensas, conforme a la doctrina de la *Monadologia physica.* El derrumbe de esta doctrina hace necesario buscar otra solución al problema de la divisibilidad infinita del espacio. Kant, como se sabe, establece las bases de su teoría de la idealidad trascendental del espacio y los cuerpos en el curso de los dos años siguientes, publicándolas en 1770, en la célebre disertación latina *Sobre la forma y los principios del mundo sensible y el mundo inteligible.*

La doctrina kantiana de las contrapartidas incongruentes ha sido estudiada por numerosos autores, que generalmente la rechazan, con diversos grados de desdén[15]. Estimo, con todo, que sólo recientemente han aparecido estudios que, sin aceptar las conclusiones que Kant deriva de la incongruencia de las contrapartidas, saben al menos apreciar rectamente el verdadero significado y la importancia de su análisis. Me refiero a los ensayos de Earman (1971) y

---

[14] Digo que K e $i(K)$ son incongruentes, por regla general. La excepción se produce si hay un plano que divide a K en dos partes, cada una de las cuales es el producto de la reflexión de la otra con respecto a ese plano.

[15] Véase Couturat (1904), Mayo (1954), Reidemeister (1957), Lange (1958-59), Pears (1952), Remnant (1963), Bennett (1970). Después de redactado este trabajo han llegado a mis manos los artículos de Block (1974) y Sklar (1974).

Nerlich (1973). Sería impertinente resumir aquí estos trabajos fácilmente accesibles. Me limitaré a comentar una idea importante aportada por Nerlich. Para entenderla, debemos hacer explícito un distingo, implícito en la exposición precedente. Cada cuerpo K puede tener infinitas contrapartidas, pero si es incongruente con una es incongruente con todas. Cabe distinguir pues entre la relación que K tiene en tal caso con cada contrapartida y la propiedad en virtud de la cual tiene con cada una precisamente esa relación. Digamos con Nerlich que un cuerpo K es *enantiomorfo* si es incongruente con cualquiera de sus contrapartidas [16]. La argumentación kantiana puede entonces resumirse así:

1. Hay cuerpos enantiomorfos.
2. La enantiomorfía es un carácter constitutivo del cuerpo enantiomorfo.
3. La enantiomorfía depende de la relación del cuerpo enantiomorfo con el espacio en el cual está.
4. El espacio es un ente *sui generis* y no una mera expresión de las relaciones entre las cosas que están en él (abreviadamente: el espacio no depende ontológicamente de las cosas espaciales).
5. El espacio condiciona el modo mismo de ser de los cuerpos (abreviadamente: los cuerpos dependen ontológicamente del espacio).

La conclusión 4 se desprende, según Kant, de las premisas 1 y 3; la conclusión 5 depende además de la premisa 2; Kant sostiene las tres premisas y por ende las dos conclusiones. Nerlich defiende la conclusión 4 pero sacrifica la conclusión 5, pues, como veremos en seguida, para demostrar 3 (y deducir 4), tiene que socavar la premisa 2. Para el pensamiento maduro de Kant, empero, el resultado más importante es justamente el aserto 5, la pieza decisiva del idealismo trascendental. El razonamiento de Nerlich resulta intuitiva-

---

[16] Si leemos Px como «x es enantiomorfo», Qxy como «x es la contrapartida de y» y Rxy como «x es incongruente con y», la propiedad P puede caracterizarse así:

$$(x)\ (Px \leftrightarrow (y)\ (Qyx \rightarrow Ryx))$$

mente más obvio si en vez de hablar de cuerpos consideramos figuras planas. La contrapartida de una figura plana F se define mediante una construcción igual a la presentada arriba; pero exigimos que el plano Π sea perpendicular al plano de F (esto equivale a efectuar una reflexión en el plano de F respecto de una recta en ese plano). Decimos que F es incongruente con su contrapartida *i*(F) si no se la puede trasportar dentro de la superficie en que está hasta llevarla a ocupar la misma posición que ha ocupado *i*(F)[17]. Consideremos las figuras D y Ɑ. Según nuestras definiciones, son contrapartidas incongruentes. Por lo tanto, S es enantiomorfa. ¿Diremos que esta propiedad es un carácter constitutivo suyo? Una observación muy simple se opone a esta conclusión. Si trazamos la S sobre una cinta de Moebius[18], podemos trasportarla, sin salir de la cinta, hasta llevarla a la posición ocupada por Ɑ. Consideraciones análogas se aplican a los cuerpos. Sólo hay enantiomorfos en un espacio orientable. Si K es un cuerpo enantiomorfo en un espacio de esta índole, hay una región finita R que contiene a K. R puede siempre concebirse como una región orientable de un espacio no orientable[19]. Si R se concibe así, K no es enantiomorfo. Normalmente, pues, sólo podemos decidir si un cuerpo K es o no enantiomorfo si conocemos la naturaleza global del espacio en que está. Nerlich concluye, razonablemente, que la enantiomorfía de un cuerpo depende de su relación con el espacio total, lo que basta para establecer que el espacio es ontológicamente independiente de los cuerpos[20]. Pero el razonamiento de Nerlich supone, como se ha visto,

---

17 Obviamente, siempre es posible llevar a F a la posición de *i*(F), sacando a F de su plano y dándola vuelta. Otro tanto podríamos hacer con las contrapartidas incongruentes del espacio tridimensional si dispusiéramos de una cuarta dimensión.

18 Véase la nota 3.

19 Los espacios no orientables de tres dimensiones no pueden, claro está, representarse plásticamente como la cinta de Moebius. Pero así como ésta se obtuvo identificando, en un orden apropiado, dos lados opuestos de un rectángulo, se pueden construir espacios tridimensionales no orientables identificando, según una norma apropiada, pares de caras de un poliedro. Véase Seifert y Threlfall (1934), págs. 206 y sigs.

20 Adviértase que esta conclusión coincide con el aserto 4, que atribuíamos a Kant. Las cosas espaciales de que éste habla no son sólo los cuerpos, sino también sus partes, que Kant en su juventud concebía en último término como mónadas inextensas. El razonamiento de Nerlich nos lleva a concluir única-

que no se puede establecer la enantiomorfía de un cuerpo con sólo examinar al cuerpo mismo, o a la región del espacio que lo rodea. La enantiomorfía no puede proclamarse sin más, como un carácter constitutivo del cuerpo enantiamorfo (premisa 2). Lo será, por cierto, si los cuerpos dependen ontológicamente del espacio total en que se encuentran. Pero este aserto (número 5), que en la argumentación de Kant debía inferirse de la premisa 2, pasa a ser entonces un antecedente en el cual ésta se puede apoyar. El razonamiento de Nerlich funda, pues, en el fenómeno de la enantiomorfía una tesis de corte newtoniano sobre la independencia ontológica del espacio, pero no nos permite apelar a ese fenómeno para probar la tesis específicamente kantiana, de la dependencia ontológica de los cuerpos con respecto al espacio. Ésta, si vale, tendrá que establecerse por otro camino. Kant, por cierto, no lo ha visto así. Ignorando el distingo entre espacios orientables y no orientables, no ha conocido el respaldo que ese distingo aporta a su propia argumentación, pero tampoco ha visto las limitaciones que impone al alcance de ésta.

3. Un esquema que surge de la naturaleza de la mente

Si el espacio no depende de las cosas espaciales, es una entidad peculiarísima, pues no es propiedad ni relación, pero tampoco cabe llamarlo sustancia. El marco de la ontología tradicional resulta estrecho para encuadrarlo. En la ya mencionada disertación de 1770, Kant propone una respuesta conjunta a la doble cuestión de la naturaleza del espacio y la del tiempo. Esta respuesta reaparece casi inalterada en la primera edición de la *Crítica de la razón pura* (1781) y sirve de base a lo que normalmente llamaríamos la filosofía de la geometría de Kant. Sus líneas generales son bastante conoci-

---

mente que el espacio no depende de los cuerpos, esto es, de las cosas *extensas* que hay en él. Pero no se opone, por ejemplo, a una nueva monadología que cimiente la índole del espacio en la interacción de mónadas inextensas, pero haga depender del espacio mismo, globalmente considerado, algunas de las características de los cuerpos en que se agrupan y reparten las esferas de influencia de esas mónadas.

das. El hombre sólo puede conocer una realidad existente en virtud de modificaciones que padece en su propio estado. La conciencia de una de estas modificaciones, en cuanto se refiere exclusivamente al sujeto que la padece, se llama sensación; en cuanto se refiere, sin intermediarios, al objeto mismo que la modificación hace presente, se llama intuición empírica [21]. El objeto de una intuición empírica se llama fenómeno [22]. Aquello que en el fenómeno corresponde a la sensación se llama la *materia* del fenómeno. Esta materia, que varía con el contenido de las sensaciones que hacen presente al fenómeno, se distingue de la forma del fenómeno que es universal e invariable. Kant ofrece por lo menos tres caracterizaciones generales de la forma. En la disertación de 1770 escribe que en la representación de los sentidos, además de la materia (que aquí simplemente se equipara a la sensación), hay algo «que se puede llamar *forma,* a saber, la figura de lo sensible, que se exhibe, en cuanto lo múltiple que afecta los sentidos es coordinado conforme a una cierta ley natural de la mente» (*Ak.*, II, 392). Esta forma, prosigue Kant, «atestigua una cierta relación o respecto de lo múltiple sentido [*sensorum*], pero no es en verdad propiamente una silueta o esquema del objeto, sino únicamente una cierta ley ínsita en la mente, para coordinar lo múltiple sentido que nace de la presencia del objeto (*non nisi lex quaedam menti insita, sensa ab obiecti praesentia orta sibimet coordinandi*)» (*Ak.*, II, 393). En la primera edición de la *Crítica de la razón pura* (1781) la forma del fenómeno se caracteriza como aquello que «hace que lo múltiple del fenómeno se intuya ordenado en ciertas relaciones» (A 20). En la segunda edición (1787) este pasaje aparece corregido: forma del fenómeno se llama aquello que «hace que lo múltiple del fenómeno pueda ser ordena-

---

21 La *intuición* según Kant es conocimiento (esto es, representación consciente referida a un objeto) *inmediato* de un objeto *individual;* se contrasta con el concepto, que representa su objeto a través de la *mediación* de características *generales,* que el objeto comparte con otros. Véase, por ejemplo, *KrV,* A 320/B 376.

22 Véase *KrV,* A 320/B 376; A 20/B 34. Kant distingue en la *Crítica* entre el objeto de una intuición empírica no determinado conceptualmente, al cual llama *Erscheinung* (*KrV,* A 20/B 34) y el mismo, en cuanto ha sido concebido como objeto conforme a la unidad de las categorías, al cual llama *phaenomenon* (*KrV,* A 248). El distingo es difícil de expresar en español y no tiene importancia en el presente contexto.

do en ciertas relaciones» (B 34)[23]. El texto de 1781 puede entenderse como una expresión abreviada de las ideas de 1770. El texto de 1787 empero dice claramente otra cosa: la forma del fenómeno aquí *hace* posible ordenar de cierta manera la multiplicidad fenoménica, pero no es ella misma un *principio de orden*, una ley o patrón de ordenación o coordinación. Veremos en la próxima sección que este cambio nada insignificante en el concepto kantiano de una *forma* de los fenómenos era indispensable para ajustarlo a la doctrina crítica del entendimiento, presentada ya en 1781, pero aclarada y precisada en 1787. En la sección presente consideraremos la filosofía de la geometría que Kant asocia a su versión original del concepto de una forma de los fenómenos, según aparece expuesta en la disertación de 1770 y en aquellos pasajes de la obra posterior notoriamente inspirados en ella. Como es sabido, Kant sostiene siempre, desde 1770, que hay dos formas de los fenómenos, el tiempo, o forma de los fenómenos del sentido interno[24], y el espacio o forma de los fenómenos del sentido externo. En el presente estudio, nos interesa sólo este último.

No viene al caso repetir aquí los argumentos en virtud de los cuales Kant concluye que eso que ordinariamente llamamos espacio satisface los criterios de su noción de una forma de los fenómenos[25]. Debemos subrayar, en cambio, un distingo importante. La forma de los fenómenos u objetos de la intuición empírica se llama comúnmente en la obra kantiana *forma de la intuición*. Este modo de expresarse es razonable, pues dicha forma no depende de las características individuales de los fenómenos, según se manifiestan en la peculiaridad de las sensaciones que los hacen presentes, sino que constituye un aspecto universal e invariable de nuestra representa-

---

[23] El texto alemán dice en 1781: «dasjenige aber welches macht, dass das Mannigfaltige der Erscheinung, in gewissen Verhältnissen geordnet, angeschaut wird, nenne ich die *Form* der Erscheinung». En 1787 dice: «dasjenige aber welches macht, dass das Mannigfaltige der Erscheinung in gewissen Verhältnissen geordnet werden kann nenne ich die *Form* der Erscheinung».

[24] La forma de los fenómenos del sentido interno es a la vez forma universal de los fenómenos, según Kant «por cuanto todas las representaciones, tengan o no como objeto a entes externos, en sí mismas, como determinaciones de la mente, pertenecen al estado interno» (*KrV*, A 34/B 50). He examinado críticamente esta doctrina en Torretti (1967), págs. 209-214.

[25] Véase *Ak.*, II, 402-406; *KrV*, A 22-30/B 37-45.

ción de los fenómenos, de nuestro conocimiento sensible o intuición empírica de ellos. El espacio es, según esto, una forma de la intuición externa o conocimiento sensible de objetos fuera de mí [26]. Ahora bien, según Kant, el espacio o forma de la intuición externa, es tema él mismo de una *intuición formal* (otro tanto cabe decir del tiempo). Es importante que la similitud verbal de estas caracterizaciones no nos haga perder de vista su diferencia conceptual. No hay nada en la noción de una forma del fenómeno, en ninguna de las tres versiones arriba ofrecidas, que imponga la conclusión de que esa forma se conoce por sí misma, separada del fenómeno, ni la de que su conocimiento es una intuición. En particular, la versión de 1770, que caracteriza a la forma del fenómeno como una ley ordenadora, sugeriría más bien que su conocimiento, si lo hay, es de índole conceptual [27]. Kant aduce el *factum* de la ciencia geométrica para probar que poseemos un conocimiento del espacio y que este conocimiento es intuitivo. Utiliza esta prueba para corroborar su tesis de que el espacio es una forma de la intuición. Examinemos esto con más detenimiento.

La geometría es un conocimiento de configuraciones espaciales, independiente de la materialidad de los fenómenos que las exhiban. Prescindiendo de toda información particular que puedan suministrar las sensaciones, la geometría determina propiedades y relaciones de tales configuraciones espaciales, que necesariamente posee todo objeto que revista la configuración respectiva. El conocimiento geométrico bien puede considerarse, pues, como un conocimiento del espacio. Tal conocimiento es *formal*, pues no depende de lo que Kant llama la *materia* del fenómeno. Pero ¿es lícito sostener que es intuitivo? Kant funda este aserto en tres consideraciones: en primer lugar, la verdad de las proposiciones geométricas no se puede cimentar en un análisis de los conceptos que figuran en ellas; en

---

26 *Externo* (*äusserlich*) o *fuera de mí* (*ausser mich*) es según Kant una expresión ambigua; puede significar ya sea «lo que existe separado de nosotros *como cosa en sí*», ya sea «lo que meramente pertenece al *fenómeno* externo», esto es, al que es representado *en el espacio* (*KrV*, A 373). Cuando se dice que el espacio es la forma de la intuición externa, se usa la expresión en este último sentido (cf. *KrV*, A 23/B 38, bajo el número 1 de la «exposición metafísica» del espacio). La calificación del espacio como forma de la intuición *externa* no tiene pues valor informativo alguno.

27 El distingo kantiano entre intuición y concepto se explicó en la nota 21.

segundo lugar, hay conocimientos geométricos que no se pueden ni siquiera describir mediante conceptos; por último, la demostración geométrica procede apoyada a cada paso en la intuición [28]. En la sección 5 nos referimos a este último punto. Examinemos ahora a los dos primeros.

Kant sostiene en la disertación de 1770 que «ninguna agudeza mental es capaz de describir discursivamente, esto es, de reducir a características intelectuales» la diferencia entre contrapartidas incongruentes; sólo mediante «una cierta intuición pura» puede advertirse la diversidad o incongruencia entre ellas, en virtud de la cual, como veíamos arriba, los cuerpos que están en esta relación no pueden caber en un mismo lugar, a pesar de que son indiscernibles en «todo lo que es dable expresar por caracteres inteligibles a la mente a través del lenguaje» [29]. La misma idea reaparece en el § 13 de los *Prolegómenos*. «La diferencia entre cosas semejantes e iguales pero incongruentes (por ejemplo, caracoles cuyas espirales se desenvuelven en sentidos opuestos) no puede hacerse comprensible mediante ningún concepto, sino sólo a través de la relación con la mano derecha y la izquierda, que nos remite inmediatamente a la intuición» (*Ak.*, IV, 286). Este es el único ejemplo propuesto por Kant de un conocimiento geométrico que no es posible expresar discursivamente, empleando términos generales. Este uso de las contrapartidas incongruentes —el único que se les da en el más difundido de los escritos teóricos de Kant, los *Prolegómenos*— ayuda a explicar la postura desdeñosa de algunos autores hacia la teoría kantiana de las contrapartidas. No es verdad que la geometría no disponga de recursos conceptuales para describir la diferencia entre

---

[28] Las tres consideraciones aparecen claramente presentadas en el párrafo C del § 15 de la disertación de 1770, dedicado a establecer que la representación del espacio es una «intuición pura» (*Ak.*, II, 402-403).

[29] «Quae iaceant in spatio dato unam plagam versus, quae in oppositam vergant, discursive describi, scilicet ad notas intellectuales revocari nulla mentis acie possunt, ideoque, cum in solidis perfecte similibus atque aequalibus, sed discongruentibus, cuius generis sunt manus sinistra et dextra (quatenus solus secundum extensionem concipiuntur) aut triangula sphaerica e duobus hemisphaeriis oppositis, sit diversitas, per quam impossibile est, ut termini extensionis coincidant, quanquam per omnia, quae notis, menti per sermonem intelligibilibus, efferre licet, sibi substitui possint, patet: hic non nisi quadam intuitione pura diversitatem, nempe discongruentiam, notari posse» (*Ak.*, II, 403).

las contrapartidas. Arriba explicamos el concepto de contrapartida mediante una construcción que asignaba en forma exclusiva a cada punto de un cuerpo un punto del espacio fuera de él. Esta asignación puede entenderse como la restricción al cuerpo considerado de lo que se llama una transformación del espacio en sí mismo, esto es, una correspondencia que asigna, en forma exclusiva, a cada punto m del espacio, un punto imagen m' (que puede ser idéntico a m o diverso de él). Consideremos la familia de transformaciones que asignan a cada figura espacial una contrapartida suya. Obviamente, estas transformaciones preservan las distancias; vale decir, si m' y n' son las imágenes de dos puntos cualesquiera m y n, la distancia entre m' y n' será igual a la distancia entre m y n. Pero no todas las transformaciones que preservan las distancias —llamémoslas *isometrías*— asignan a cada figura espacial una contrapartida suya (piénsese, por ejemplo, en una rotación de todo el espacio alrededor de una recta fija). Distinguimos dos clases de isometrías: las isometrías de la primera clase transforman a cada figura espacial en una figura congruente con ella; las de la segunda clase transforman a cada figura espacial en una contrapartida suya, que, como sabemos, por regla general será incongruente con ella. Es claro que para expresar discursiva o conceptualmente la diferencia entre un cuerpo y sus contrapartidas basta describir conceptualmente la diferencia entre las isometrías de la primera y de la segunda clase. Esto puede hacerse como sigue. Dados tres planos mutuamente perpendiculares, cada punto del espacio puede ser identificado indicando sus distancias a estos tres planos. Los valores númericos de esas distancias se llaman las coordenadas del punto (relativamente al sistema de referencia definido por los tres planos y a la unidad de distancia elegida). Para caracterizar una transformación del espacio que asigna a cada punto m una imagen m' basta expresar las coordenadas de m' como funciones de las coordenadas de m. Si la transformación es una isometría, las coordenadas de m' son funciones lineales de las coordenadas de m (pues una isometría, obviamente, transforma rectas en rectas), cuyos coeficientes satisfacen cierto requisito. Sean (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de m, (x'_1, x'_2, x'_3) las de m'. Entonces una isometría (del espacio euclidiano) queda caracterizada por el siguiente sistema de ecuaciones

$$x'_i = k_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

sujeto a la condición de que la matriz de los coeficientes a_{ij} sea ortogonal, esto es, que el producto de esta matriz por su traspuesta sea igual a la matriz unidad. Como el determinante de la matriz unidad es 1, el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de éstas, y el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta, es obvio que el determinante de la matriz de los a_{ij} es igual a 1 o a -1. Si es igual a 1, la isometría es de la primera clase; si es igual a -1 la isometría es de la segunda clase [30]. La diferencia entre un cuerpo y sus contrapartidas se puede concebir pues en términos de la diferencia entre números positivos y negativos. Si bien los números de que hablamos aquí son números reales, para concebir la diferencia indicada hasta remitirse a la teoría más simple de los números enteros. Éstos se conciben como pares ordenados de números naturales [31]. Se dirá que la noción de orden supone, si no una intuición del espacio, en todo caso una intuición del tiempo. Sin pretender negar el posible origen psicológico de la noción de orden en la experiencia vivida de la sucesión temporal, quisiéramos recordar empero que el concepto de par ordenado puede definirse sin apelar a la noción de orden. Puede *estipularse* que el par ordenado (a, b) no es otra cosa que el con-

---

30 El lector matemático excusará la latitud, el lector filosófico el tono dogmático de estas explicaciones. Me interesaba dejar en claro a este último que la diferencia entre las contrapartidas incongruentes puede describirse sin apelar a una supuesta intuición del espacio. Para no alargarme demasiado he recurrido al final a conceptos que algunos hallarán esotéricos. Una matriz es una familia de familias de números. Si es finita (como en nuestro caso en que los índices i, j toman los valores 1, 2 y 3) cada familia puede desplegarse como una columna de números; la familia de familias como una secuencia de columnas, esto es, como un tablero rectangular. Exigir que la matriz $[a_{ij}]$ sea ortogonal equivale a postular las ecuaciones siguientes:

$$1 = (a_{11})^2 + (a_{21})^2 + (a_{31})^2 = (a_{12})^2 + (a_{22})^2 + (a_{32})^2 = (a_{13})^2 + (a_{23})^2 + (a_{33})^2$$
$$0 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}$$

La traspuesta de una matriz es la matriz obtenida invirtiendo los índices. El concepto de determinante de una matriz se halla explicado en cualquier texto de álgebra. Para nuestros propósitos basta entender que se trata de un número asociado a la matriz, conforme a una regla.

31 Así concebidos, los enteros que llamamos 1 y —1 son los pares de naturales (1, 0) y (0, 1).

junto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, obviamente distinto de $(b, a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$[32]. Hemos bosquejado una manera de expresar conceptualmente la diferencia entre un cuerpo y sus contrapartidas, apelando a nociones que, aunque son relativamente sencillas, no eran familiares en tiempos de Kant. Pero podríamos llevar nuestra crítica aún más lejos: mientras la geometría no dispone de recursos conceptuales para expresar esa diferencia, tiene simplemente que ignorarla. Así, Euclides entiende que dos triángulos en que son respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son geométricamente equivalentes, sin pararse a distinguir si el mayor de los lados iguales precede o sigue al menor cuando el ángulo entre ambos se describe, digamos, en el sentido en que marchan las manecillas de un reloj (*Elementos*, libro I, prop. 4). La ciencia geométrica no puede interesarse sino en lo que puede concebir; las diferencias inconcebibles le son lisa y llanamente indiferentes.

Si bien no podemos aceptar la tesis kantiana de que poseemos conocimientos geométricos inaccesibles a nuestra facultad intelectual, no cabe sino aplaudir su clara y reiterada aseveración de que las verdades de la geometría no pueden establecerse por mero análisis de los conceptos geométricos. Esta es la tesis que en la *Crítica* y los *Prolegómenos* expresa diciendo que las verdades de la geometría son (en buena parte) proposiciones sintéticas, esto es, proposiciones cuyo contenido informativo rebasa el de los conceptos combinados en ellos[33]. Aunque casi todas las proposiciones geométricas

---

32 Escribimos $\{a, b\}$ para indicar el conjunto cuyos elementos son a y b. El orden es indiferente: $\{a, b\} = \{b, a\}$.

33 En la disertación de 1770 Kant aduce tres ejemplos para ilustrar esta tesis: «en el espacio no hay más que tres dimensiones; entre dos puntos no hay sino una recta única; desde un punto dado sobre una superficie plana se puede describir un círculo con un radio dado» (*Ak.*, II, 402). Vimos en la sección 1 que Kant había reconocido el carácter sintético del primer ejemplo en su escrito primerizo de 1746. Éste y el segundo reaparecen en *KrV*, A 239/B 299 y B 41. El tercer ejemplo no vuelve a aparecer aunque es el único que trascribe literalmente un postulado de Euclides (el postulado 3). En la *Crítica* hallamos ejemplos nuevos: la recta es la línea más corta entre dos puntos (B 16; también en *Ak.*, IV, 269), tres puntos yacen siempre en un plano (A 732/B 761), la suma de dos lados de un triángulo es siempre mayor que el tercero (A 25/B 39). Un cuarto ejemplo equivale al segundo de la disertación: dos rectas no pueden encerrar un espacio (B 65; A 220/B 268). Curiosamente, Kant cita a ambos, uno tras otro, como si expresasen verdades diferentes, en A 163/B 204.

puedan demostrarse deduciéndolas de otras conforme a las leyes de la lógica, la deducción tiene que remitirse en último término a proposiciones indemostrables. Éstas, según Kant, incluyen necesariamente no sólo definiciones, que fijan el sentido de los términos, sino asertos de los que cabe preguntarse si son verdaderos o falsos. La verdad de estos asertos, en la que tiene que apoyarse todo el edificio deductivo de la geometría, es evidente, según Kant. No cabe duda, según él, de que los conceptos que figuran en estos asertos se combinan *necesariamente* como los asertos expresan. Pero esta necesidad no puede conocerse con sólo atender a los conceptos mismos. Para fundarla hay que recurrir a una fuente de conocimiento extraconceptual. Ésta no puede ser sino una clase de intuición, distinta de la intuición empírica, pues es capaz de fundar verdades necesarias [34]. Tal es, según Kant la intuición formal del espacio.

La negación de un aserto sintético no puede envolver una contradicción. La tesis kantiana sobre el carácter sintético de las verdades de la geometría implica, pues, que es posible edificar un sistema deductivo coherente adoptando como premisas indemostrables algunos de los asertos básicos de la geometría ordinaria y la negación de los restantes. Distintas combinaciones de premisas indemostrables generarían distintos tipos de geometría. Sabemos que Kant había comprendido esta posibilidad desde el mismo momento en que reconoció que la tridimensionalidad del espacio no puede demostrarse, como había pretendido Leibniz, por análisis de conceptos y que, por ende, la geometría contiene verdades sintéticas [35]. Sin embargo, en las obras de su madurez la ignora por completo y nunca vuelve a hablar de una «geometría suprema» que reuna una pluralidad de geometrías. Sólo en un paréntesis del § 15 D del escrito de 1770 enuncia brevemente la razón de este cambio radical de postura. Da allí por supuesto que la ciencia fundada en nuestra intuición del espacio no es otra que la geometría clásica, y comenta:

> Quien se esfuerce en idear mentalmente cualesquiera otras relaciones que las que [nuestro concepto de espacio]

---

34 Véase, en especial, el § 7 de los *Prolegómenos* (*Ak.*, IV, 281).

35 En 1746, claro está, Kant no usa esta terminología.

prescribe, pierde su labor, pues se ve compelido a utilizar este concepto mismo en apoyo de su ficción [36].

¿Qué significan estas palabras? Cabe entender que aluden al aserto de Kant mencionado arriba (pág. 28), según el cual la demostración geométrica tiene que apoyarse a cada paso en la intuición. En la sección 5 comentaremos diversas interpretaciones de este aserto. Señalemos por ahora que en la *Crítica de la razón pura* aparece íntimamente asociado a la concepción kantiana de la matemática como una ciencia que tiene que «construir» sus conceptos, o sea, «exhibir una intuición que les corresponda *a priori*» [37]. Es obvio que si la única intuición no empírica disponible para la «construcción» de conceptos geométricos es la intuición formal del espacio que según Kant «prescribe» las relaciones características de la geometría euclidiana, toda pretendida geometría alternativa queda fatalmente englobada en ella. Esta concepción «constructivista» de la matemática adoptada por Kant debe probablemente bastante a la influencia de Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático y filósofo amigo de Kant, a quien éste saluda, en su carta del 31 de diciembre de 1765, como «el primer genio de Alemania capaz de hacer una contribución importante y duradera al género de investigaciones» con que Kant mismo se ocupa (*Ak.*, X, 54). Lambert observó agudamente que Euclides emplea como sinónimos las expresiones «por definición» y «por hipótesis», pues «mientras la posibilidad del concepto no ha sido demostrada, la definición es solamente una hipótesis» [38]. La posibilidad del concepto se establece construyéndolo. En los años en que Lambert mantiene correspon-

[36] Vale la pena atender a los términos precisos del original: «qui relationes quascunque alias, quam per ipsum [conceptum spatii] praecipiuntur, mente effingere allaboraret, operam luderet, quia hoc ipso conceptu in figmenti sui subsidium uti coactus esset» (*Ak.*, II, 404 s.). Ésta no es, dicho sea de paso, ni la primera ni la última vez que Kant llama *concepto* a nuestra representación del espacio a pocas líneas de aseverar que ella es intuitiva y no intelectual.

[37] *KrV*, A 713/B 741. En una nota del escrito contra Eberhard dice Kant: «In allgemeiner Bedeutung kann alle *Darstellung* eines Begriffs durch die (selbsttätige) Hervorbringung einer ihm korrespondierenden Anschauung Konstruktion heissen» (*Ak.*, VIII, 192 n.).

[38] Lambert, carta a G. J. von Holland de 11 de abril de 1765. Citado por Stäckel y Engel (1895), pág. 142.

dencia con Kant se interesa vivamente por la discusión en torno al postulado 5 de Euclides [39] y redacta, al parecer en 1766, una *Teoría de las Paralelas* que Johann Bernouilli publicó póstumamente veinte años más tarde [40]. En esta obra, Lambert considera tres geometrías (bidimensionales) alternativas, cuyas diferencias es fácil caracterizar con ayuda de una sencilla figura: dadas dos rectas que se cortan perpendicularmente en el punto A, marcamos un punto en cada una —llamémosles B y C— en cada uno de los cuales levantamos una perpendicular; las perpendiculares se cortan en D; ABCD es un cuadrilátero con ángulos rectos en A, B y C; en la geometría euclidiana, el ángulo en D es recto necesariamente; las otras dos geometrías consideradas por Lambert se caracterizan porque el ángulo en D es respectivamente obtuso y agudo [41]. Lambert observa que la geometría del ángulo obtuso está realizada en la superficie de una esfera (si consideramos a los círculos máximos como rectas sobre esa superficie) y agrega: «De esto casi me atrevería a inferir que la tercera hipótesis se cumple en el caso de una superficie esférica imaginaria» (esto es, una cuyo radio es un múltiplo de $i = \sqrt{-1}$) [42]. Las realizaciones indicadas por Lambert hacen patente sin duda, en su modo de ver, la posibilidad de estas concepciones geométricas anómalas. La geometría del ángulo agudo se funda en la negación del postulado 5 combinada con la afirmación de todos los demás principios de la geometría euclidiana. Será elaborada medio siglo después por el húngaro Bolyai y el ruso Lobachevsky. Éste

---

39 El postulado 5 de Euclides puede parafrasearse así: dadas tres rectas en un plano, L, M, N, tales que L corta a M en *m* y a N en *n*, M y N se cortan en aquel lado de L en que los ángulos internos en *m* y *n* suman menos de dos rectos. Desde la antigüedad se cuestionó la evidencia de este postulado, demandándose que se lo demostrara, por cuanto asevera la existencia de un punto de intersección de dos rectas que podría caer muy lejos de la región del plano que somos capaces de visualizar.

40 Reproducida en Stäckel y Engel (1895), págs. 152-207. Bernouilli declara en una nota que el escrito fue redactado en septiembre de 1766.

41 Girolamo Saccheri (1667-1733) había examinado una figura similar a la propuesta por Lambert (exactamente, la figura que se obtiene completando ABCD con su reflexión respecto de la recta AB), e intentando demostrar la falsedad de lo que llamó las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo, para establecer la verdad de la hipótesis euclidiana del ángulo recto.

42 «Ich sollte daraus fust den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor» (Stäckel y Engel (1895), pág. 203).

demostrará que, tal como se desprende de la sugerencia de Lambert, las fórmulas trigonométricas de este sistema pueden obtenerse directamente de las fórmulas familiares de la trigonometría esférica con sólo reemplazar en ellas el radio r de la esfera por el número imaginario ir. La realización de la geometría de Bolyai y Lobachevsky sobre una esfera de radio imaginario, genialmente anticipada por Lambert, no es lo que Kant llamaría una construcción del concepto en la intuición del espacio, pero constituye, me parece, un buen ejemplo de lo que Kant denomina, con una expresión que adopta de Lambert, una «construcción simbólica del concepto»[43]. La realización de la geometría del ángulo obtuso sobre una esfera ordinaria ilustra exactamente la noción kantiana de una construcción intuitiva espacial.

Propongo, a título de conjetura, que al redactar el pasaje de la disertación sobre las geometrías no euclídeas (trascrito en la nota 36), Kant ha tenido presente de algún modo la concepción lambertiana de cómo puede realizárselas constructivamente y exhibir así su posibilidad. El pasaje no sugiere que Kant haya tenido una idea muy precisa de ella, pero sí, verosímilmente, una idea vaga, como las que uno puede formarse por una alusión hecha de paso en una carta o por indicaciones someras comunicadas en una conversación. No es difícil imaginarse que Kant, que desde joven se había interesado por la cuestión de las geometrías alternativas a la euclidiana, se enterase de este modo, quizás a través de un amigo común, de los rudimentos de la concepción lambertiana, digamos de la idea misma de una realización constructiva de una geometría no euclídea. La observación contenida en el pasaje que comentamos se aplica con particular justeza al caso más obvio de la realización de la geometría del ángulo obtuso sobre una esfera, más apropiado que el otro para mencionarse en una conversación entre personas cultas pero no especializadas en matemáticas. La realización propuesta en este

[43] *KrV*, A 717/ B 745. Es curioso anotar que en su carta a Kant del 13 de octubre de 1770, en que comenta la disertación publicada por Kant ese año, Lambert destaca el «conocimiento simbólico» como una «cosa intermedia entre la sensación y el verdadera pensamiento puro». Gracias a él, dice, podemos trascender los límites de nuestro pensar efectivo. Lambert agrega esta curiosa frase: «El signo $\sqrt{-1}$ representa una quimera impensable [*ein nicht gedenkbares Unding*], y sin embargo puede muy bien usárselo para descubrir teoremas» (*Ak.*, X, 110).

caso presupone evidentemente, al parecer, una representación del espacio euclidiano. No hay nada en los escritos de Kant que corrobore mi conjetura, a pesar de que contiene aquí y allá referencias a ideas y escritos de Lambert. De la correspondencia que sostuvieron entre 1765 y 1770 quedan tres cartas de Lambert a Kant y tres de Kant a Lambert [44]; en estas seis cartas no hallamos ni una remota alusión a nuestro tema. Pero aunque mi conjetura sea falsa, creo que podemos afirmar, sin temor de equivocarnos, que el pasaje que examinamos resume los comentarios que Kant habría hecho si hubiese conocido la concepción lambertiana de las geometrías no euclídeas y su realización constructiva. Esta última, diría Kant, demuestra por cierto la posibilidad de dichas geometrías, pero exhibiéndolas como parásitas de la geometría euclídea. Sin embargo, la concepción lambertiana puede emplearse para combatir esta conclusión. Según ella, en efecto, las mismas representaciones intuitivas que tradicionalmente han servido de base a la construcción de los conceptos de la geometría euclídea pueden dar pie también a una realización constructiva de los conceptos de otras geometrías. No parece razonable inferir, con Kant, que la geometría euclídea tiene una primacía sobre las otras. Antes bien, el hecho anotado sugiere que la intuición formal del espacio, que se deja concebir igualmente bien de una u otra manera, no «prescribe», como pretende Kant, las relaciones postuladas en la geometría clásica, ni determina, por lo tanto, inequívocamente la verdad geométrica, sino que suministra tan sólo una multiplicidad ordenable, que el pensamiento geométrico puede estructurar de diversas maneras. Con esta sugerencia introducimos un enfoque del problema que hará su aparición casi un siglo después, en la obra de Bernhard Riemann. En la próxima sección mostraremos que este enfoque no carece de antecedentes en la filosofía madura de Kant. Antes de abordarla, veamos brevemente cómo Kant utiliza su prueba de que la geometría descansa en una intuición formal del espacio para corroborar su tesis de que el espacio mismo es una forma de la intuición.

La intuición formal del espacio es intuición pura o *a priori*, pues no depende de las características particulares y cambiantes —la

44 Cartas 33, *34*, 37, *39 a*, *57* y 61 en la edición académica (en cursiva, las de Kant).

«materia»— de los objetos espaciales cuya «forma» revela, independientemente de su presencia actual. «Si nuestra intuición —dice Kant— fuese tal que representase cosas *tal como son en sí mismas* no tendría lugar ninguna intuición *a priori* (...). Pues lo que está contenido en el objeto en sí sólo puedo saberlo si me está presente y me está dado. (...). Hay pues una sola manera cómo puede ser posible que mi intuición preceda a la actualidad del objeto y constituya un conocimiento *a priori,* a saber, si ella no contiene nada más que la forma de la sensibilidad que precede en mi sujeto a todas las impresiones actuales con que me afectan los objetos» [45]. No vamos a entrar aquí en una consideración crítica de este razonamiento, que citamos únicamente para mostrar cómo la filosofía de la geometría interviene en la fundamentación de una de las piezas esenciales de la doctrina crítica. De él se desprende inmediatamente la caracterización ontológica del espacio ofrecida en la disertación de 1770:

> *El espacio no es algo objetivo* y real, ni sustancia, ni accidente, ni relación; *sino como un esquema subjetivo* e ideal y que surge de la naturaleza de la mente según una ley estable, para coordinar a cabalidad todo lo externamente sentido.
>
> Aunque el *concepto del espacio* como un ente o afección objetivo y real es imaginario, sin embargo, *relativamente a todo lo sensible* no sólo es *verísimo* sino que es el fundamento de toda verdad en la sensibilidad externa. Pues las cosas no pueden aparecer a los sentidos bajo ningún aspecto, salvo *mediante* la facultad *mental que coordina todas* las sensaciones según una ley estable ínsita en su naturaleza [46].

---

45 *Prolegómenos,* § 9 (*Ak.,* IV, 282). Cf. *KrV,* B 41.

46 *Ak.,* II, 404. Esta doctrina del espacio garantiza la aplicabilidad de la geometría a la descripción exacta de los fenómenos naturales. Kant prosigue: «Como nada absolutamente puede darse a los sentidos, salvo en conformidad con los axiomas primitivos del espacio y sus consecuencias (según preceptúa la geometría), aunque el principio de éstos es subjetivo, concordará [lo dado a los sentidos] necesariamente con ellos, porque sólo en esa medida concuerda consigo mismo, y las leyes de la sensibilidad serán leyes de la naturaleza, *en cuanto ésta puede presentarse a los sentidos.* La naturaleza está sometida,

4. Algo tan uniforme e indeterminado

Mientras la *forma* de la intuición se concibe como una suerte de esquema para coordinar la *materia* que suministran los sentidos, los términos *materia* y *forma* preservan en el lenguaje kantiano algo de su sentido aristotélico tradicional: la *forma* es lo determinante, la *materia* lo determinable. Pero según la doctrina crítica madura, todo enlace, y por ende, toda ordenación, ya se trate de un enlace entre conceptos o de un enlace de lo múltiple de la intuición, es un acto del entendimiento (*KrV*, B 130). Sólo la espontaneidad mental así denominada puede ser la sede de un principio determinante. La forma de la intuición, reconocida como el carácter intrínseco y universal de la receptividad de la mente, no puede concebirse entonces como un principio de orden, sino sólo como *aquello que hace posible* la ordenación de la materia sensible según las normas prescritas por el entendimiento [47]. Las formas de la intuición sensible externa e interna hacen posible que lo múltiple suministrado por los sentidos sea combinado en una intuición empírica ajustada a tales normas, gracias a que ellas mismas, las formas del espacio y el tiempo, vale decir, la doble «multiplicidad dada *a priori*» que Kant ahora llama de ese modo, son materia de la actividad determinante y estructuradora del entendimiento [48]. Esta rectificación

---

pues, exactamente [*ad amussim*], a los preceptos de la geometría, en lo que respecta a todas las propiedades del espacio allí demostradas, no por una hipótesis ficticia, sino dada intuitivamente, como condición subjetiva de todos los fenómenos a través de los cuales la naturaleza pudiera manifestarse a los sentidos» (*Ak.*, II, 404).

[47] Véase arriba la nota 23 y el texto que remite a ella.

[48] No podemos entrar aquí en una explicación de esta doctrina. Para refrescar la memoria de quienes ya la conocen, traduzco aquí algunos pasajes decisivos: «Porque hay en nosotros, como base *a priori* de la intuición sensible, una cierta forma que descansa en la receptividad de nuestra capacidad representativa (sensibilidad), puede el entendimiento, como espontaneidad, determinar el sentido con lo múltiple de las representaciones dadas, ajustándose a la unidad sintética de la apercepción, y así pensar *a priori* una unidad sintética de la apercepción de lo múltiple de la intuición sensible, como la condición a la cual todos los objetos de nuestra intuición humana necesariamente han de someterse. (...) Esta síntesis de lo múltiple de la intuición sensible,

nada desdeñable de conceptos fundamentales debe tenerse en cuenta en la interpretación de la filosofía kantiana de la geometría. Ni la «Estética trascendental» de la *Crítica de la razón pura*, ni el capítulo de los *Prolegómenos* titulado «¿Cómo es posible la matemática pura?» tienen explícitamente en cuenta esta rectificación. Pero no faltan los pasajes, en ambas obras, que pueden ayudarnos a esclarecer sus consecuencias, en lo que concierne a nuestro tema.

La fuente del conocimiento geométrico es según Kant la intuición formal del espacio. Hasta aquí ésta nos ha aparecido como una mera toma de conciencia de la forma de la intuición externa, sin que ninguna iniciativa intelectual intervenga en su constitución. Parecería que el pensamiento geométrico hubiera de limitarse a tomar nota de las características evidentes de la multiplicidad espacial, adoptándolas como punto de partida de sus demostraciones. Esta concepción se ajusta a la doctrina sostenida en la disertación de 1770, sobre el uso meramente lógico del entendimiento en las ciencias cuyos conceptos y principios son proporcionados por la intuición sensible pura o empírica[49]. Pero no es compatible con la doctrina propiamente crítica de la función de la actividad intelectual en la constitución del conocimiento humano y de sus objetos propios. En una nota agregada en la segunda edición de la *Crítica*, Kant explica (pero no acaba de aclarar) cómo debe entenderse ahora la intuición formal del espacio:

---

que es posible y necesaria *a priori*, puede denominarse síntesis figurativa. (...) Para distinguirla del enlace puramente intelectual, debe llamársela síntesis trascendental de la imaginación (...). Como toda nuestra intuición es sensible, la imaginación pertenece a la sensibilidad, debido a la condición subjetiva bajo la cual únicamente ella puede proporcionar a los conceptos del entendimiento una intuición que les corresponda; pero *como su síntesis es un ejercicio de la espontaneidad, la cual es determinante y no, como el sentido, solamente determinable*, y por ende puede determinar *a priori* al sentido en su forma (*den Sinn seiner Form nach*) ajustándose a la unidad de la apercepción, *la imaginación es una facultad para determinar la sensibilidad a priori* y *su síntesis (...) tiene que ser (...) un efecto del entendimiento sobre la sensibilidad* y la primera aplicación del mismo (a la vez que la base de todas las otras) sobre los objetos de la intuición posible para nosotros» (*KrV*, B 150-152; cursiva mía). Véase también el importantísimo tercer párrafo del § 26 (B 160-161).

[49] «Usus autem intellectus in talibus scientiis quarum tam conceptus primitivi, quam axiomata sensitivo intuitu dantur, non est nisi *logicus*, h. e. per quem tantum cognitionis sibi invicem subordinamus quoad universalitatem conformiter principio contradictionis, phaenomena phaenomenis generalioribus, consectaria intuitus puri axiomatibus intuitivis» (*Ak.*, II, 410 s.).

> El espacio, representado como *objeto* (como efectivamente se requiere en la geometría) contiene más que la mera forma de la intuición, a saber, una *recolección* [*Zusammenfassung*] de lo múltiple dado según la forma de la sensibilidad, en una representación *intuitiva*; de modo que la *forma de la intuición* da sólo lo múltiple, pero la *intuición formal* da la unidad de la representación (*so dass die Form der Anschauung bloss Mannigfaltiges, die formale Anschauung aber Einheit der Vorstellung gibt*) (*KrV*, B 160 n.).

Kant prosigue con este pasaje que, a pesar de su oscuridad, dice lo que necesitamos saber:

> En la Estética simplemente incluí esta unidad en la sensibilidad, sólo para advertir que precede a todo concepto, aunque presupone por cierto una síntesis que no pertenece a los sentidos, en virtud de la cual, empero, todos los conceptos del espacio y el tiempo vienen a ser posibles [*zuerst möglich werden*]. Pues, ya que el espacio o el tiempo son *dados* como intuiciones solamente en virtud de ella (en cuanto el entendimiento determina a la sensibilidad), la unidad de esta intuición pertenece *a priori* al espacio y al tiempo, y no al concepto del entendimiento (*KrV*, B 161 n.).

No es fácil conciliar con otros pasajes de la *Crítica* esta idea de una representación cuya *unidad* es *preconceptual* [50]. Pero esta dificultad no afecta a la conclusión a que queremos llegar. Kant nos dice aquí claramente que su exposición de la doctrina del espacio en la Estética trascendental tiene carácter provisorio, pues la intuición del espacio atribuida allí a nuestra receptividad sensible sólo puede darse «en cuanto el entendimiento determina a la sensibilidad». La «intuición pura», que según la disertación de 1770 exhibe la estruc-

---

[50] Recuérdese el pasaje en que culmina el decisivo § 10 de la *Crítica*: «La misma función que confiere unidad a las diversas representaciones *en un juicio*, confiere asimismo unidad a la mera síntesis de representaciones diversas *en una intuición*, etc.» (*KrV*, A 79/B 105). Expresada en toda su generalidad, esa función se llama categoría. Véase asimismo el § 20.

tura común a toda intuición empírica, se analiza ahora en dos componentes: la multiplicidad dada *a priori* con nuestra sensibilidad y la unidad estructurante que le impone el entendimiento [51]. Las leyes del espacio, tema de la geometría, sólo vienen a estar dadas con el segundo de estos componentes. Para apreciar con justeza la filosofía kantiana de la geometría y su lugar en la historia tiene suma importancia establecer en qué precisa medida la índole de la multiplicidad dada *a priori* restringe, según Kant, la libertad del entendimiento para prescribir las leyes del espacio. La obra de Kant no ofrece, por desgracia, una respuesta bien definida a esta cuestión. Pero será útil que tomemos nota de sus palabras, antes de ensayar completarlas con una conjetura.

En un pasaje de la primera parte de los *Prolegómenos*, leemos lo siguiente:

> Como el espacio, según lo piensa el geómetra, es exactamente [*ganz genau*] la forma de la intuición sensible que hallamos *a priori* en nosotros y que contiene el fundamento de la posibilidad de todos los fenómenos externos (en lo que respecta a su forma), éstos tienen que concordar necesariamente y con la máxima precisión con las proposiciones del geómetra, que éste no extrae de ningún concepto inventado [*aus keinem erdichteten Begriff*], sino del fundamento subjetivo de todos los fenómenos externos, a saber, de la sensibilidad misma (*Ak.*, IV, 288).

Sabemos ya que estas formulaciones que ignoran el papel de la espontaneidad intelectual en la constitución del «espacio, según lo piensa el geómetra», deben reputarse provisorias. Pero parecería

51 Permítaseme citar un pasaje más en apoyo de este distingo: «La mera forma de la intuición sensible externa, el espacio, no es por sí sola un conocimiento [*ist... noch gar keine Erkenntnis*], sino que da únicamente lo múltiple de la intuición *a priori* para un conocimiento posible. Pero para conocer algo en el espacio, por ejemplo, una línea, tengo que trazarla, efectuando así sintéticamente un determinado enlace de lo múltiple dado, de modo que la unidad de este acto es a la vez unidad de la conciencia (en el concepto de una línea) y así solamente viene a conocerse un objeto (un espacio determinado)» (*KrV*, B 137 s.). Obsérvese que Kant aquí declara que la unidad de la conciencia es conceptual.

que, como quiera que se las reformule, no podrá eludirse el aserto de que, según la doctrina kantiana, la estructura geométrica de los fenómenos depende estrechamente de la índole misma de nuestra sensibilidad y de lo múltiple que ella proporciona *a priori*[52]. Sin embargo, en un largo pasaje del mismo libro, cuya importancia para el estudio de la filosofía kantiana de la geometría no ha sido destacada como merece —tal vez porque saca de quicio a las cómodas ideas fijas en que reposa su interpretación habitual—, Kant sostiene que la forma *a priori* del sentido externo no aporta sino el material sobre el cual se ejerce la actividad estructuradora del entendimiento, pero que las leyes que organizan ese material son introducidas en él por el entendimiento mismo. Kant parte allí de la tesis, sostenida en el texto anterior, de que todos los fenómenos físicos se ajustan necesariamente a las verdades de la geometría, las cuales expresan, por lo tanto, leyes naturales *a priori*. Cita como ejemplo el conocido teorema según el cual, si dos cuerdas cualesquiera se cortan en el interior de un círculo, el producto de los segmentos en que la primera corta a la segunda es igual al producto de los segmentos en que la segunda corta a la primera[53]. Menciona luego la generalización de este teorema a las cónicas[54]. Comenta, por último, un supuesto fundamento geométrico de la ley newtoniana según la cual la atracción universal de los cuerpos materiales es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias. Tras estos preparativos, Kant prosigue:

> He aquí, pues, una naturaleza que reposa sobre leyes que el entendimiento conoce *a priori*, sobre todo a partir de

---

[52] Compárense estos pasajes de la *Crítica de la razón pura* que expresamente tienen en cuenta la función del entendimiento en la constitución de la geometría: «Sobre esta síntesis sucesiva de la imaginación productiva en la generación de figuras [para aclarar esta expresión, cf. nota 48; también nota 51] se funda la matemática de la extensión (geometría) con *sus axiomas, los cuales expresan las condiciones de la intuición sensible a priori* bajo las cuales únicamente puede establecerse el esquema de un concepto puro del fenómeno externo; vgr. entre dos puntos puede haber sólo una línea recta, dos líneas rectas no encierran un espacio, etc.» (*KrV* A 163/B 204; cursiva mía).

[53] Euclides, *Elementos*, libro III, proposición 35.

[54] En este caso, en vez de igualdad, hay una proporción fija (dependiente de la cónica) entre los productos de los segmentos en que se cortan las cuerdas. Cf. G. Salmon, *A Treatise of Conic Sections*, New York, Chelsea, s. f., pág. 150.

principios universales de la determinación del espacio. Me pregunto entonces: ¿residen estas leyes naturales en el espacio y las aprende el entendimiento cuando sólo busca indagar el rico sentido contenido en aquél? ¿O residen en el entendimiento y en el modo como éste determina al espacio conforme a las condiciones de la unidad sintética en que todos sus conceptos vienen a parar? *El espacio es algo tan uniforme, tan indeterminado en lo que respecta a todas sus propiedades particulares, que ciertamente no ha de buscarse en él ningún patrimonio de leyes naturales.* En cambio, aquello que determina el espacio a la forma circular, a la figura del cono y de la esfera, es el entendimiento, en cuanto contiene el fundamento de la unidad de la construcción de las mismas. *La mera forma universal de la intuición que se llama espacio es pues el sustrato de toda intuición determinable como referida a objetos particulares, y en él reside sin duda la condición de la posibilidad y la variedad de éstos; pero la unidad de los objetos es determinada exclusivamente por el entendimiento,* según condiciones que residen en su propia naturaleza (*Ak.*, IV, 321 s.; cursiva mía).

El lector familiarizado con la matemática actual sentirá la tentación de concluir que, según Kant, la multiplicidad dada *a priori* con la forma de la intuición externa son los puntos del espacio cuya estructura el entendimiento es libre de definir, sin otras restricciones que las impuestas por la cardinalidad de esa colección de puntos [55]. Pero esta interpretación fácil y aparentemente tan obvia del texto que acabamos de leer, que haría de Kant un precursor de Bourbaki, entra en conflicto con expresas declaraciones suyas. El espacio, según él, no se relaciona con sus componentes como una *clase* con sus *miembros*, sino como un *todo* con sus *partes* [56]. En otras palabras, la multiplicidad dada *a priori* a la actividad estruc-

[55] Kant habría admitido en todo caso que dicha colección es infinita; naturalmente, no conocía el distingo, debido a Georg Cantor, entre diversos cardinales infinitos.

[56] *KrV*, A 25/B 39; B 136 n.

turadora del entendimiento no es una multiplicidad de puntos sino una multiplicidad de espacios.

> El espacio consta sólo de espacios, el tiempo de tiempos. Puntos e instantes son sólo límites, esto es, meras posiciones que los deslindan; pero estas posiciones presuponen siempre aquellas intuiciones que deben delimitar o determinar, y con meras posiciones como componentes que pudieran estar dados antes que el espacio o el tiempo, no es posible constituir ni el espacio ni el tiempo (*KrV*, A 169 s/ B 211).

Me parece, por esto, que la multiplicidad dada *a priori* que Kant atribuye a la forma de nuestro sentido externo debe entenderse como una multiplicidad de espacios parciales. Lo dado *a priori* consistiría, en rigor, en la posibilidad de deslindar tal multiplicidad de espacios. La naturaleza misma del sentido externo impondría ciertas restricciones a la libertad del entendimiento en la actualización de esa posibilidad. Creo lícito conjeturar que Kant habría aceptado que todos los espacios parciales, como quiera que el entendimiento los deslinde, tienen que satisfacer las condiciones siguientes:

> 1. *Todo espacio parcial está delimitado por una frontera*[57]. Ésta puede considerarse como perteneciente a él o como estando entera o parcialmente fuera de él; esto último ocurre, por ejemplo, si se trata de una cavidad dentro de un cuerpo bien delimitado. Llamaremos *interior* de un espacio parcial a la parte del mismo que no coincide con la frontera.

57 «Raum und Zeit sind quanta continua, weil kein Teil derselben gegeben werden kann, ohne ihn zwischen Grenzen (Punkten und Augenblicken) einzuschliessen, mithin nur so, dass dieser Teil selbst wiederum ein Raum, oder eine Zeit ist» (*KrV*, A 169/B 211). Este pasaje documenta suficientemente nuestro primer aserto y casi hace ineludibles los que le siguen, pero contiene una confusión: los límites que encierran una parte del espacio de tal modo que *ella misma* sea un espacio no son puntos sino superficies, cuyas partes pueden ser deslindadas a su vez por líneas, cuyas partes, por último, son deslindables por puntos (véase aserto 2).

2. *En el interior de cada espacio parcial cabe discernir puntos indivisibles*[58] que son límites de límites de límites de algún espacio parcial[59].

3. Si x es un punto en el interior del espacio parcial A contenido en el espacio parcial B, x está en el interior de B.

4. Si x es un punto en el interior de los espacios parciales A y B, cabe deslindar un espacio parcial C contenido en A y en B, tal que x está en el interior de C.

5. Si x es un punto en el interior de un espacio parcial A, cabe deslindar un espacio parcial B contenido en A, tal que x está en el interior de B y todos los puntos discernibles en B están en el interior de A.

Kant nunca hizo explícitas estas condiciones, excepto la primera; pero es difícil imaginarse que hubiera puesto en duda las otras. Ahora bien, si el entendimiento, al deslindar espacios parciales no puede menos que ajustarse a las condiciones antedichas, hemos de concluir que la forma de la intuición externa impone, según Kant, al entendimiento la necesidad de determinar la multiplicidad que ella le brinda *a priori* como un espacio topológico tridimensional *cuyo sistema de entornos consta de todos los espacios parciales* que el entendimiento pueda deslindar[60]. Puestas las cosas en estos

---

[58] Kant no parece hacerse mayor cuestión de la posibilidad de discernir puntos en el espacio. Admite como obvio que la imaginación gobernada por el entendimiento puede trazar líneas que comienzan y terminan en puntos (véase la nota 51). En cambio, los autores del siglo XX que intentan elaborar una teoría matemática del espacio que no lo conciba, según la costumbre dominante, como una colección de puntos, conceden suma importancia a la *construcción de los puntos a partir de los espacios parciales, cuya deslindabilidad dan por supuesta.* Una exposición sumaria de estos intentos, con referencias a la literatura, se hallará en Menger (1940).

[59] «El límite de un sólido es una *superficie*, el de una superficie una *línea*, el de una línea un *punto*. Hay, pues, tres clases de límites en un espacio, como hay tres dimensiones» (*Ak.*, II, 403 n.).

[60] Si concebimos, según es habitual, un espacio como un conjunto de puntos, una estructura topológica se define en un espacio E asignando a cada punto x de E una colección de partes de E, llamadas *entornos* de x, que cumplen los siguientes requisitos: 1) Si A es un entorno de x, x es un punto de A. 2) Si A es una parte de E que contiene un entorno de x, A es un entorno de x. 3) Si A y B son entornos de x, la intersección de A y B es un entorno

términos, estimo que no sería infiel a Kant agregar que la forma de nuestra sensibilidad especifica todavía más la estructura topológica del espacio. Seguramente habría sostenido que, en virtud de esa forma, ninguna colección finita de espacios parciales puede abarcar el espacio entero (de suerte que el espacio no es compacto). Probablemente habría admitido además que, si p y q son dos puntos diferentes, cabe siempre deslindar dos espacios parciales P y Q, sin una parte común, tales que p se halla en el interior de P y q en el interior de Q (de modo que se trata de un espacio de Hausdorff). Me parece, en cambio, que las propiedades métricas del espacio, esto es, las propiedades que suponen la definición de una distancia entre los puntos o de una medida (volumen, área, longitud) de los espacios parciales, superficies y líneas, no pueden depender, en la filosofía madura de Kant, de la mera forma de la sensibilidad. En efecto, las nociones de distancia y de medida envuelven la noción de número, que, según Kant, no es otra cosa que el esquema de las categorías de la cantidad (*KrV*, A 142/182), esto es, «la síntesis pura [de la multiplicidad dada *a priori*], conforme a una regla de unidad (...) que expresa la categoría». Además, en el pasaje de los *Prolegómenos* que motiva estos comentarios, Kant dice expresamente que sólo el entendimiento puede determinar el espacio a la forma circular o a la figura de la esfera. Puesto que una esfera es un espacio parcial cuyos puntos fronterizos equidistan todos de un punto determinado, la determinación de la esfera presupone una definición de distancia y resulta inmediatamente de ella. Si la definición de distancia dependiera de la forma misma de la intuición, la multiplicidad dada *a priori* poseería de suyo una articulación en esferas, en contradicción con el texto citado.

Consideremos con más calma esta cuestión. Definir un concepto de distancia entre puntos equivale a asignar a cada par de puntos p y q un número real no negativo $D(p, q)$ tal que, cualesquiera que sean los puntos p, q, r, se cumplen las condiciones siguientes: $D(p, q)$

---

de x. 4) Si A es un entorno de x, A contiene un entorno de x, B, tal que A es un entorno de cada punto de B. Para verificar que la colección de los espacios parciales que puede deslindar el entendimiento, si cumple las cinco condiciones enunciadas arriba, constituye el sistema de entornos de un espacio topológico, basta considerar que un espacio parcial es un entorno de un punto dado sólo si este punto se halla en su interior.

$= O$; si $p \neq q$, $D(p, q) = D(q, p) > O$; $D(p, r) \leqslant D(p, q) + D(q, r)$. Como hemos visto, la definición de un concepto de distancia en un espacio hace posible determinar esferas con centro en cada punto. Ello confiere inmediatamente al espacio una estructura topológica definida así: entornos de cada punto son todas las esferas con centro en ese punto; además, si A es un entorno y A es parte de B, B es un entorno; finalmente, la parte común a dos entornos es un entorno. Llamemos a esta estructura, la topología inducida por la definición de distancia. Es razonable pensar que Kant habría entendido que la forma de la intuición impone en todo caso una condición a la definición de distancia que pueda estipular el entendimiento, a saber, que la topología inducida por ésta debe coincidir con la topología impuesta por la forma de la intuición (esto es, que los entornos de ambas topologías deben ser los mismos). Esta condición es restrictiva, pero deja siempre latitud para una gran variedad de definiciones de distancia, que no difieren trivialmente entre ellas, pero inducen la misma topología[61]. Kant, por cierto, nada sabía de esto, y no parece haber adivinado que al realzar el papel del entendimiento en la constitución del espacio geométrico abría de nuevo la posibilidad de legitimar una pluralidad de geometrías. Pero al sostener que el espacio es algo tan uniforme, tan indeterminado en lo que respecta a toda propiedad particular (*etwas so Gleichförmiges und in Ansehung aller besondern Eigenschaften so Unbestimmtes*), que no se puede buscar en él la fuente de las leyes que fijan las propiedades de la esfera o de las secciones cónicas, Kant se manifiesta decididamente como un precursor de Riemann[62].

---

[61] Diríamos que dos definiciones de distancia difieren sólo trivialmente entre ellas si las esferas determinadas conforme a una de ellas coinciden con las determinadas conforme a la otra.

[62] Riemann sostendrá que en el caso de una multiplicidad continua como el espacio, el fundamento de las relaciones métricas no puede residir en la multiplicidad misma. Con palabras que recuerdan al Kant de 1746, sugiere que se busque dicho fundamento en las fuerzas enlazantes que actúan sobre esa multiplicidad (*in darauf wirkenden bindenden Kräften*; Riemann (1854), pág. 20). En nuestros días, Adolf Grünbaum ha rectificado el aserto de Riemann, afirmando que para que sea válido no basta que la multiplicidad en cuestión sea continua; es necesario que sea además homogénea o uniforme (Grünbaum, (1973), págs. 16 y sigs.). Conviene observar que Riemann emplea la misma palabra alemana *Mannigfaltigkeit* usada por Kant y que he traducido *multiplicidad*. En la matemática actual esta palabra alemana designa un concepto técnico

La elaboración matemática y filosófica de estas ideas revivirá el problema que Kant creía haber resuelto definitivamente en 1770, con su doctrina de la intuición pura: ¿Cuál es la geometría verdadera? Conscientes como él de que no se podía resolverlo mediante experimentos, cuyo mismo diseño e interpretación presuponen la adopción de una geometría, los epistemólogos convencionalistas —Poincaré, Dingler— responderán cortando el nudo gordiano: el problema no tiene sentido, las «condiciones *a priori*» de la manifestación de la verdad no pueden calificarse de verdaderas o falsas.

No hemos considerado hasta aquí el modo como el entendimiento ha de efectuar, según Kant, la determinación del espacio. Según Kant, el entendimiento humano es una facultad comparativamente rígida, que opera con arreglo a un número limitado de normas invariables. ¿No podría esta rigidez del entendimiento garantizar, en el pensamiento de Kant, la unicidad de la estructura métrica impuesta por el entendimiento al espacio? Sugerimos en la sección 3 que Kant ha sabido algo acerca de la posibilidad de representar intuitivamente concepciones geométricas incompatibles. Si sólo una de ellas corresponde a la estructura naturalmente exhibida por la intuición, las demás pueden descartarse como espurias o parásitas. Pero todas tienen los mismos derechos, si la multiplicidad dada *a priori* con la forma de la intuición no posee de suyo una estructura, o en todo caso, si no posee una estructura métrica. Sea de ello lo que fuese, el modo como el entendimiento determina a la forma del sentido externo para constituir la intuición formal del espacio sería un capítulo importantísimo en la filosofía de la geometría de Kant, si éste le hubiera prestado la atención que merecía. Pero su obra no nos proporciona sino muy exiguas indicaciones al respecto. Ensayemos resumirlas. El entendimiento determina la multiplicidad sensible (pura o empírica) cuando la refiere a la «unidad objetiva de la apercepción», combinando lo múltiple en una síntesis con arreglo a las categorías. La aplicación de las categorías a la multiplicidad pura del espacio y el tiempo se efectúa a través de los «esquemas trascendentales». En la articulación del objeto de la geo-

---

preciso, que se inspira en ideas de Riemann pero que aún no había sido elaborado por éste; para designar ese concepto usamos en español la palabra *variedad* (en francés, *variété*; en inglés, *manifold*).

metría intervienen solamente las categorías de la cantidad, cuyo esquema, según Kant, es el número. ¿Qué entiende Kant por *número*? Leemos en la *Crítica de la razón pura* que «el número es una representación que abarca [*zusammenbefasst*] la adición sucesiva de uno a uno (homogéneo)» (*KrV*, A 142/B 182). Esto sugiere que Kant entiende por *número* lo que llamamos *enteros positivos*. Se sabe desde el siglo v a. C. que los enteros positivos son totalmente inadecuados para concebir las relaciones geométricas. Así, por ejemplo, es imposible concebir como una relación entre enteros la proporción entre la base y la diagonal de un cuadrado. Por lo tanto, los números a través de los cuales se efectúa según Kant la aplicación de las categorías de la cantidad a la multiplicidad espacial, no pueden ser los enteros positivos. Pero en la edad moderna se usa comúnmente *número* en una acepción más amplia. Simon Stevin decía que «nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chascune chose» y Newton declaraba abiertamente:

> Por número no entendemos la multitud de las unidades, sino la relación [*ratio*] abstracta de una cantidad cualquiera a otra cantidad del mismo género que se toma como unidad. Es de tres clases: entero, racional [*fractus*] e irracional [*surdus*]. *Entero*, el que mide la unidad; *racional*, el que mide una parte submúltiplo de la unidad; e *irracional*, aquel con el cual la unidad es inconmensurable[63].

Sólo esta clase de números —conocida ya en el siglo XVIII bajo la denominación de números reales— puede desempeñar la función que Kant le asigna como «esquema de la cantidad» y caracterizarse como «la unidad de la síntesis de lo múltiple de una intuición homogénea en general» (*KrV*, A 143/B 182). Las oscuridades de la noción ingenua de número real moverán a Weierstrass, Méray, Cantor y Dedekind a fundamentarla, mediante una audaz construcción, en la noción de número racional, fácilmente derivable a su vez de la noción de entero. Pero Kant no puede haber tenido esto presente

---

[63] Newton, *Arithmetica Universalis*, Leiden, 1732, pág. 4. Citado por Gericke (1970), pág. 71 s. La cita de Stevin, tomada del mismo libro (pág. 70), proviene de su obra *L'Arithmétique*, Leiden, 1685, def. II.

cuando ofreció, a renglón seguido, las dos caracterizaciones del número que acabamos de citar. Como no podemos suponer que ignorara la existencia de magnitudes inconmensurables, debemos atribuir la primera de esas caracterizaciones a falta de reflexión. Ahora bien, si aceptamos que el número que es el «esquema de la cantidad» no es otro que el número real, la concepción kantiana del *modus operandi* del entendimiento en la determinación del objeto de la geometría expresa muy bien el predominio casi exclusivo, en la geometría de la época, del método de las coordenadas introducido en el siglo XVII por Descartes y Fermat. De acuerdo con ese método, cada punto del espacio se representa por un trío de números reales y el estudio de las figuras geométricas, sus propiedades y relaciones puede apoyarse en los poderosos recursos del álgebra y el análisis. El método conduce naturalmente a la noción de un espacio de un número arbitrario de dimensiones y facilita la introducción de múltiples definiciones de distancia, posibilitando así la «geometría suprema» soñada por Kant en su juventud.

5. Guiado siempre por la intuición

Para terminar nos referimos, como habíamos anunciado, a la tesis kantiana sobre la intervención necesaria de la intuición en las demostraciones geométricas. Advirtamos, ante todo, que la intuición en que se apoya, según Kant, toda demostración geométrica no puede ser otra que esa intuición formal del espacio que Kant concibe en su madurez como estructurada por el entendimiento. Kant no hace referencia a esto en los textos en que explica su tesis sobre el ingrediente intuitivo de las demostraciones geométricas, pero los pasajes analizados en la sección precedente hacen inevitable esta conclusión. A la luz de ella vendría a resultar que en las demostraciones geométricas el entendimiento no puede extraer de la intuición mucho más de lo que él mismo introduce en ésta al constituirla. Seguramente Kant no quería sugerir eso cuando escribió en 1770 que «la geometría no demuestra sus proposiciones universales pensando el objeto por un concepto universal, como se hace en el orden racional [*in rationalibus*], sino presentándolo a la vista por una intuición singular, como se hace en el orden sensible [*in sensitivis*]» (*Ak.*, II, 403). Pero en este punto como en tantos otros las enseñanzas de la disertación de 1770 que la *Crítica* recoge deben reinterpretarse para ajustarlas a su nuevo contexto. La tesis que comentamos se presenta en él como una consecuencia inmediata del hecho de que, según Kant, la geometría (como en general la matemática) establece sus conocimientos mediante lo que él llama «construcción de conceptos». La construcción de conceptos geométricos, consistente como sabemos[64] en determinar un objeto que les corresponda en la intuición formal del espacio, no puede entenderse sino como el ejercicio en concreto de la actividad del entendimiento que constituye dicha intuición formal[65]. El matemático, escribe Kant, «emprende su camino siguiendo intuiciones que exhibe *a priori* ajustándose a los conceptos [*nach Anschauungen, die er a priori den Begriffen gemäss darstellet*]» (*KrV*, A 717s./B 745 s.). Cuando la *Crítica* afirma, pues, que las demostraciones matemáticas tienen que avanzar siguiendo siempre «el hilo de la intuición pura» (A 425/B 451), no nos cabe sino entender que ese hilo lo tiende el entendimiento.

La explicación más completa del tema que nos ocupa aparece en la sección de la Metodología de la *Crítica de la razón pura* donde Kant compara el método de la filosofía con el método de las matemáticas. En un ensayo redactado en 1762[66], donde también desarrolla esta comparación, Kant había escrito que «la matemática

---

[64] Véase la nota 37 y el pasaje que remite a ella.

[65] Para persuadirse de esto aconsejo releer el pasaje citado en la nota 51. Muy elocuente es también el siguiente ejemplo con que Kant ilustra la construcción de conceptos geométricos en el escrito contra Eberhard: «Cuando Arquímedes circunscribió un polígono de noventa y seis lados en torno al círculo e inscribió otro igual dentro de él, para demostrar que el círculo es menor que el primero y mayor que el segundo y calcular estas diferencias de tamaño, ¿supuso [*legte ... unter*] o no una intuición bajo su concepto de dicho polígono regular? Inevitablemente la supuso [*legte... zum Grunde*], mas no porque trazara efectivamente el polígono (lo que habría sido un requisito innecesario y absurdo), sino en cuanto conocía la regla de la construcción de su concepto, y con ella su facultad de determinar la magnitud del mismo tan aproximadamente como quisiera a la del propio objeto, y por ende, de dar a éste en la intuición ajustándose al concepto» (*Ak.*, VIII, 212).

[66] Citado en la nota 11.

considera en sus soluciones, demostraciones y conclusiones lo universal bajo los signos en concreto», y había ilustrado este aserto con el siguiente ejemplo:

> En la geometría, para conocer las propiedades de un círculo, se dibuja uno, en el cual, en lugar de todas las líneas posibles que se cortan en su interior, se trazan dos. Se demuestran las relaciones que hay entre éstas y se contempla en concreto en ellas la regla universal de las relaciones entre todas las líneas que se cortan en todos los círculos [67].

La misma idea reaparece en la *Crítica*:

> El conocimiento matemático contempla pues lo particular sólo en lo universal, el matemático lo universal en lo particular o más bien en lo singular, pero *a priori* y mediante la razón, de suerte que, según como esto particular se determine bajo ciertas condiciones universales de la construcción, así también hay pensar como universalmente determinado el objeto del concepto, al cual esto particular corresponde sólo a modo de esquema (*KrV*, A 714/B 742).

Kant propone un ejemplo, que aclara mejor que sus formulaciones abstractas lo que nos quiere decir:

> Désele a un filósofo el concepto de un triángulo y pídasele ~~que averigue a su manera qué relación hay entre la~~ suma de sus ángulos y el ángulo recto. No tiene nada más que el concepto de una figura encerrada por tres líneas rectas y en ella el concepto de otros tantos ángulos. Por mucho que reflexione sobre este concepto no logrará extraer de él nada nuevo. Puede analizar y esclarecer el concepto de la línea recta, o el de ángulo, o el del número tres, pero

[67] *Ak.*, II, 278. Es interesante observar que el ejemplo se refiere al mismo teorema (Euclides, III, 35) considerado en el pasaje de la segunda parte de los *Prolegómenos* que trascribimos y comentamos en la sección anterior (nota 53).

> no puede llegar a otras propiedades que lisa y llanamente no están contenidas en estos conceptos. Hágase cargo del problema un geómetra. En el acto empieza por construir un triángulo. Porque sabe que dos ángulos rectos equivalen conjuntamente a la suma de todos los ángulos contiguos que pueden trazarse desde un punto sobre una línea recta, prolonga un lado de su triángulo y obtiene dos ángulos contiguos que sumados equivalen a dos rectos. Divide entonces aquél de estos dos ángulos que es exterior [al triángulo], trazando una línea paralela al lado opuesto del triángulo y ve que aquí surge un ángulo exterior contiguo que es igual a un ángulo interior, etc. Llega así por una cadena de inferencias, guiado siempre por la intuición, a una solución totalmente evidente y a la vez universal del problema (*KrV*, A 716 s./B 744 s.).

Hintikka ha señalado que esta concepción del método matemático debe entenderse a la luz de las explicaciones de Proclo sobre la estructura de las proposiciones y problemas en los *Elementos* de Euclides [68]. Ella consta de seis partes: enunciado (*prótasis*), exposición (*ékthesis*), especificación (*diorismós*), construcción (*kataskeué*), demostración (*apódeixis*) y conclusión (*sumpérasma*). El enunciado formula los datos y lo que se busca; la exposición exhibe separadamente los datos y los prepara para emplearlos en la investigación; la especificación presenta separadamente y aclara lo que se busca; la construcción agrega a los datos lo que hace falta para hallar lo que se busca; la prueba saca la inferencia requerida razonando científicamente a partir de lo que se ha admitido; la conclusión retorna al enunciado, confirmando lo que se ha demostrado. Proclo dice que, aparte del enunciado y la conclusión, el único elemento imprescindible es la demostración, que hemos de concebir como un procedimiento puramente lógico [69]. En efecto, toda la clari-

68 Hintikka (1967), pág. 126. Las explicaciones de Proclo aparecen en su comentario al libro I de los *Elementos*, págs. 203 y sigs. de la edición Friedlein (págs. 159 y sigs. de la versión inglesa citada en la bibliografía).

69 Este carácter estrictamente lógico de la demostración propiamente dicha es reconocido por Kant, cuando dice que «las inferencias del matemático

dad que puede suministrar la exposición puede estar contenida ya en el enunciado, el cual puede incluir todos los datos requeridos, sin que sea menester completarlos por construcción. Parecería que Proclo piensa que la estructura de la proposición o problema es más perfecta cuando se reduce a *prótasis*, *apódeixis* y *sumpérasma*, que cuando incluye los otros elementos enumerados. Kant, en cambio, opina, como hemos visto, que las fases que Proclo llama *ékthesis* y *kataskeué*, al exhibir los datos y completarlos según las posibilidades que esa misma exhibición hace presentes [70], constituyen el aspecto distintivo del método matemático, sin el cual éste no es capaz de procurarnos conocimientos realmente nuevos.

La «construcción» en el sentido kantiano (que comprende la *ékthesis*, más la *kataskeué* cuando ésta es necesaria) exhibe intuitivamente los datos en que ha de apoyarse la demostración. ¿En qué estriba la necesidad de esta base intuitiva? Tradicionalmente se ha entendido que lo importante para Kant era el carácter a-lógico de la intuición; según esta interpretación el pensamiento geométrico debía su fecundidad al hecho de que se nutre de una fuente extra-intelectual. Se razonaba así [71]: En los *Elementos* de Euclides no todos los supuestos indemostrables de que dependen las demostraciones se han hecho explícitos en los axiomas y postulados. Sólo en 1882, un siglo entero después de la *Crítica de la razón pura*, aparecerá un tratado, las *Lecciones de geometría moderna* de Pasch, que verbaliza todos los supuestos en que descansa. En esta obra, como en todas las axiomatizaciones de la geometría que la suceden [72], los teoremas se derivan de los axiomas por medios puramente ló-

---

proceden todas conforme al principio de contradicción» (B 14; sobre el significado del «principio de contradicción» en Kant, véase Torretti (1967), página 236 n.). Pero para Kant la demostración propiamente tal o *apodeixis* no puede prescindir del apoyo intuitivo de la *ekthesis* y, si hace falta, de la *kataskeué*. «En la matemática es la intuición *a priori* la que guía mi síntesis y allí todas las inferencias pueden ser conducidas inmediatamente por la intuición pura» (*KrV*, A 782 s./B 810 s.).

70 En el último ejemplo citado, la *ékthesis* consiste en trazar el triángulo; en la *kataskeué* se prolonga uno de sus lados más allá de su intersección con otro y se traza por esa intersección la paralela al tercero.

71 Véase, por ejemplo, mi propio tratamiento de este tema, en Torretti (1967), págs. 190-192.

72 Tales como Hilbert (1899), Veblen (1904), Hjemslev (1907), Huntington (1913).

gicos sin que se requiera ningún apoyo visual[73]. Pero en los *Elementos* de Euclides esto no es posible. Por ejemplo. en la proposición 1 del libro I se resuelve el problema de construir un triángulo equilátero trazando un segmento AB y luego dos círculos de radio AB, con centro respectivamente en A o en B; si los círculos se cortan en C, ABC es un triángulo equilátero. Pero ¿se cortan acaso los círculos? Si atendemos a la figura, parece obvio que sí. Pero los axiomas y postulados expresamente formulados por Euclides no lo garantizan. Ejemplos como éste, se dice, habrían persuadido a Kant de que la demostración geométrica tiene que apoyarse en el despliegue constructivo de los datos y avanzar guiada a cada paso por la intuición. Hintikka observa que ningún texto de Kant documenta explícitamente esta interpretación[74]. Por otra parte, tampoco hay ninguno que explícitamente respalde la interpretación ofrecida por él, que hemos de explicar en seguida. Antes de abordarla, consideremos un argumento de más peso contra la interpretación tradicional. Es claro que los supuestos intuitivos de las demostraciones de Euclides no verbalizados en los postulados y axiomas, tienen que ser verbalizables. Una demostración puede apoyarse en premisas tácitas, cuya misma evidencia mueve a sobreentenderlas; pero estas premisas se tienen que *poder expresar* si así se desea, de otro modo la demostración no sería válida: una verdad inefable no puede servir de base a una inferencia lógica[75]. Por lo tanto, la necesidad de apoyar las demostraciones geométricas en construcciones *ad hoc*

---

[73] Pasch, que era empirista y pensaba que los axiomas geométricos «se fundan en observaciones incesantemente repetidas, que se han grabado más firmemente que las observaciones de otras clases», declara que ellos «deben abarcar completamente el material empírico que va a elaborar la matemática, de modo que después de establecerlos no vuelve a ser necesario remitirse a las percepciones sensibles» (Pasch (1926), pág. 16). Basta reemplazar «observación», «empirie» y «percepción sensible» por «intuición pura» para poner de manifiesto la decisiva diferencia metodológica entre la matemática moderna y la concepción kantiana.

[74] Hintikka (1967), pág. 119, n. 3. Se dice allí que «there does not seem to be a scrap of evidence for attributing to Kant the 'observation' (...) that the geometers of his day could not prove their theorems by unaided arguments, but required an appeal to the figure». El tono de Hintikka me parece un tanto arrogante, habida cuenta de la exigua base textual de su propia interpretación.

[75] Por esto, como observamos arriba (pág. 31), la geometría no puede interesarse sino en lo que puede concebir.

puede irse eliminando por la vía de verbalizar e incorporar a los axiomas los supuestos intuitivos que esas construcciones exhiben. La doctrina kantiana, en la interpretación tradicional, se revela lisa y llanamente insostenible. Esto es, se nos revela así a nosotros, que sabemos gracias a Pasch y Hilbert que basta un número finito y más bien pequeño de oraciones para codificar las premisas de las que se deducen todas las proposiciones de Euclides. A la luz de este saber, si el papel que Kant atribuye a la intuición en las demostraciones geométricas no es otro que el que dice la interpretación tradicional, es claro que Kant estaba equivocado y que esas demostraciones pueden llevarse a cabo sin tal ayuda, en cuanto se disponga de un sistema axiomático adecuado. Pero ¿se sabía acaso antes de establecerlo que se podía disponer de un sistema así? Es evidente que la investigación geométrica no podría prescindir del apoyo de la intuición, en el sentido aquí considerado, si los supuestos intuitivos a que las diversas demostraciones tácitamente apelan constituyesen un patrimonio inagotable.

La interpretación propuesta por Hintikka tiene la ventaja de que, en virtud de ella, la doctrina de Kant que estamos examinando resulta ser verdadera. Según él, no hay que subrayar la índole a-lógica de la intuición, sino su carácter de representación singular. Ella es indispensable en las demostraciones geométricas en cuanto éstas tienen que llevarse a cabo siempre con referencia a un caso particular[76]. Los textos kantianos citados arriba destacan suficientemente esta propiedad de las demostraciones geométricas. El empleo de la intuición en este sentido es de veras imprescindible, dice Hintikka, por cuanto la geometría descansa en generalizaciones (universales o existenciales) y, como ha quedado en evidencia gracias a las investigaciones de la lógica contemporánea, la inferencia lógica a partir de premisas generales no puede prescindir de la ejemplificación[77]. Hintikka reconoce que no todos los asertos de Kant sobre

---

76 «Kant's characterization of mathematics as based on the use of constructions has to be taken to mean merely that, in mathematics, one is all the time introducing particular representatives of general concepts and carrying out arguments in terms of such particular representatives, arguments which cannot be carried out by the sole means of general concepts» (Hintikka (1967), pág. 121).

77 Cualquier buen manual reciente deja esto en claro. Véase, por ejemplo, Mates (1965), capítulo 7, reglas US y ES. La comprensión actual de la estruc-

este tema se encuadran cómodamente en su interpretación. Para Kant, al fin y al cabo, la representación singular que sirve de base a una demostración geométrica tiene que ser una intuición espacial; pero la ejemplificación requerida para la inferencia lógica se efectúa con sólo disponer de un *nombre* al que se atribuyen los predicados que aparecen en la premisa general. Además, en el pensamiento de Kant, la intuición de lo singular se contrasta con el *concepto* universal; en la inferencia lógica, el caso particular ejemplifica una *proposición* general[78]. Kant quiere mostrarnos que la mera combinación de conceptos no puede proporcionar conocimientos nuevos, que surgen en cambio al llenárselos del contenido que aporta la multiplicidad dada *a priori*; gracias a la construcción intuitiva del concepto logra el geómetra «ir más allá de él a propiedades que ese concepto no contiene, pero que le pertenecen [*über ihn zu Eigenschaften, die in diesem Begriffe nicht liegen, aber doch zu ihm gehören, hinausgehen*]»[79]. Pero la inferencia por ejemplificación no va más allá de los conceptos incluidos en la premisa general que se ejemplifica; el ejemplo propuesto se limita a ilustrar dichos conceptos en un objeto cualquiera, designado por un nombre arbitrario, en el cual no se considera ninguna determinación que no esté contenida en aquellos conceptos. Por estas razones, me parece bastante exagerado pretender que la caracterización kantiana de la matemática como basada en la construcción de conceptos *no significa más que* lo que Hintikka dice que significa. Aquí, como casi siempre,

---

tura y los requisitos de la inferencia lógica procede sobre todo de los trabajos de Gentzen (1934) y Jaśkowski (1934).

[78] Dada una generalización existencial de la forma «Existe un objeto con la propiedad P», ejemplificamos diciendo: «Sea *u* un objeto con la propiedad P».

[79] Prosiguiendo la citada comparación entre el filósofo y el matemático, escribe Kant: «Pues no debo atender a aquello que pienso efectivamente en mi concepto de triángulo (esto no es más que la mera definición); antes bien, debo ir más allá de él a propiedades no contenidas en este concepto pero que le pertenecen. Esto solamente es posible si determino mi objeto conforme a las condiciones ya sea de la intuición empírica o de la intuición pura. Lo primero daría sólo una proposición empírica, que no poseería universalidad ni menos necesidad, y no viene a cuento. El segundo procedimiento es el matemático; en este caso, la construcción geométrica, mediante la cual añado [*hinzusetze*] en la intuición pura, al igual que en la empírica, lo múltiple que pertenece al esquema de un triángulo en general y, por ende, a su concepto» (*KrV*, A 718/B 746).

Kant teje su pensamiento con hilo de muchos ovillos. No hay que fiarse del intérprete que prefiere saber de uno solo.

ROBERTO TORRETTI

Universidad de Puerto Rico.

OBRAS CITADAS

Ak.: *Kants gesammelte Schriften, herausgegeben von der Preussischen (bzw. Deutschen) Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1902.

KrV, A: *Kritik der reinen Vernunft* von Immanuel Kant, Riga, Hartknoch, 1781.

KrV, B: *Kritik der reinen Vernunft* von Immanuel Kant, Zweyte hin und wieder verbesserte Auflage, Riga, Hartknoch, 1787.

Adickes, Erich (1924), *Kant als Naturforscher*, Band I, Berlin, W. de Gruyter.

Bayle, Pierre, *Historical and Critical Dictionary*. Selections translated... by Richard H. Popkin, Indianapolis: Bobbs-Merrill, 1965. (No teniendo a mano una edición del texto original, remito a esta traducción fácilmente accesible.)

Bennett, Jonathan (1970) «The difference between right and left», *American Philosophical Quarterly*, 7, págs. 175-191.

Bock, N. J. (1970), «Why do mirrors reverse Right/Left and not Up/Down?», *Journal of Philosophy*, 71, págs. 259-277.

Carnap, Rudolf (1922), *Der Raum*, Berlin, Reuther & Reichardt.

Cassirer, Ernst (1907), «Kant und die moderne Mathematik», *Kantstudien*, 12, págs. 1-49.

Couturat, Louis (1904), «La philosophie des mathématiques de Kant», *Rev. de Metaph. et de Morale*, 12, págs. 321-383.

Crusius, Christian August (1753), *Entwurf der notwendigen Vernunftwahrheiten*, Leipzig, Gleditschen.

Earman, John (1971), «Kant, incongruous counterparts and the nature of space and time», *Ratio*, 13, págs, 1-18.

Einstein, Albert (1916), «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie», *Annalen der Physik*, 49, págs. 769-822.

Gentzen, Gerhard (1934), «Untersuchungen über das logische Schliessen», *Mathematische Zeitschrift*, 39, págs. 176-210, 405-431.

Gericke, Helmut (1970), *Geschichte des Zahlbegriffs*, Mannheim, Bibliographisches Institut.

Grünbaum, Adolf (1973), *Philosophical problems of space and time*, Second, enlarged edition, Dordrecht, Reidel.

Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols., New York, Dover, 1956.

Heimsoeth, Heinz (1960), *Atom, Seele, Monade*, Heidelberg, Carl Winter.

Hilbert, David (1899), *Die Grundlagen der Geometrie*, 10e Aufl. Stuttgart, Teubner, 1968.

Hintikka, Jaakko (1965), «Kant's 'new method of thought' and his theory of mathematics», *Ajatus*, 27, págs. 37-47.

Hintikka, Jaakko (1967), «Kant on the mathematical method», *The Monist*, 51, págs. 352-375 (mis citas remiten a L. W. Beck, *Kant Studies Today*, Lasalle, Open Court, 1969, donde este ensayo aparece en las págs. 117-140).

Hintikka, Jaakko (1969), «On Kant's notion of intuition (*Anschauung*)», en T. Penelhum y J. J. Macintosh (eds.), *The First Critique*, Belmont, Wadsworth.

Hintikka, Jaakko (1972), «Kantian intuitions», *Inquiry*, 15, págs. 341-345.

Hintikka, Jaakko (1973), *Logic, Language-Games and Information. Kantian themes in the philosophy of logic*, Oxford, Clarendon.

Hjemslev, J. (1907), «Neue Begründung der ebenen Geometrie», *Mathematische Annalen*, 64, págs. 449-474.

Huntington, Edward V. (1913), «A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion», *Mathematische Annalen*, 73, págs. 522-559.

Jaśkowski, Stanislaw (1934), «On the rules of suppositions in formal logic», *Studia logica*, 1, págs. 5-32.

Lange, Heinrich (1959), «Über den Unterschied der Gegenden im Raume», *Kantstudien*, 49, págs. 479-499.

Martin, Gottfried (1951), *Immanuel Kant: Ontologie und Wissenschafstheorie*, Köln, Kölner Universitäts-Verlag.

Mates, Benson (1965), *Elementary logic*, New York, Oxford University Press.

Mayo, Bernard (1958), «The incongruity of counterparts», *Philosophy of Science*, 25, págs. 109-115.

Meinecke, Wilhelm (1906), «Die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie in ihrem Verhältnis zu Kants Theorie der mathematischen Erkenntnis», *Kantstudien*, 11, págs. 209-232.

Menger, Karl (1940), «Topology without points», *Rice Institute Pamphlets*, 27, n.º 1, págs. 80-107.

Nerlich, Graham (1973), «Hands, knees and absolute space», *Journal of Philosophy*, 70, págs. 337-351.

Pasch, Moritz (1926), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Zweite Auflage, Berlin, Springer.

Pears, David F. (1952), «The incongruity of counterparts», *Mind*, 61, págs. 78-81.

Proclo, *A commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Translated... by Glenn R. Morrow, Princeton, Princeton University Press, 1970.

Reidemeister, Kurt (1957), «Über den Unterschied der Gegenden im Raum», en Reidemeister, *Raum und Zahl*, Berlin, Springer, págs. 53-69.

Remnant, Peter (1936), «Incongruous counterparts and absolute space», *Mind*, 72, págs. 393-399.

Riemann, Bernhard (1854), *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (neu herausgegeben und erläutert durch H. Weyl, New York, Chelsea, 1973).

Salmon, G., *A Treatise of Conic Sections*, New York, Chelsea, s. f.

Schultz, Johannes (1784), *Erläuterungen über des Herrn Professor Kant Critik der reinen Vernunft*, Königsberg, C. G. Dengel.

Seifert, H., y Threlfall, W. (1934), *Lehrbuch der Topologie*, New York, Chelsea, s. f.

Sklar, Lawrence (1974), «Incongruous counterparts, intrinsic features, and the substantiviality of space», *Journal of Philosophy*, 71, págs. 277-290.

Stäckel, Paul y Engel, Friedrich (1895), *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss*, Leipzig, Teubner.

Strawson, P. F. (1966), *The Bounds of Sense*, London, Methuen.

Tonelli, Giorgio (1959), *Elementi metafisici e metodologici in Kant (1754-1768)*, Torino, Edizioni di 'Filosofia'.

Torretti, Roberto (1967), *Manuel Kant. Estudio sobre los fundamentos de la filosofía crítica*, Santiago, Universidad de Chile.

Veblen, Oswald (1904), «A system of axioms for geometry», *Transactions of the American Mathematical Society*, 5, págs. 343-384.

Vuillemin, Jules (1969), «The Kantian Theory of Space in the light of groups of transformations», en L. W. Beck (ed.), *Kant Studies Today*, La Salle, Open Court, págs. 141-159.

Walsh, W. H. (1947), *Reason and experience*, Oxford, Clarendon.