REFLEXIONES SOBRE EL CÁLCULO LÓGICO

Wittgenstein ha sido uno de los pensadores que han contribuido, tanto por su obra en sí misma considerada cuanto por la influencia ejercida con posterioridad, al desarrollo de esta interesante modalidad de razonamiento que es el cálculo lógico. Podemos decir que en alguna medida —y desgraciadamente esa "alguna" es muy reducida— el viejo sueño leibniziano del "calculemos" se ha hecho realidad.

No es este el momento de analizar con detalle los condicionamientos que han hecho posible el nacimiento y el progreso de este cálculo, ni tampoco cuáles son sus características. Pero sí es interesante destacar que, a semejanza de lo que acontece en el razonamiento matemático, del que, en nuestra opinión, el razonar calculístico lógico es una especial modulación, se pueden distinguir dos modalidades de calcular lógico:

a) La constituida por los llamados "procedimientos decisorios".
b) La integrada por todos aquellos procedimientos calculísticos que no constituyen procedimientos decisorios.

Se conoce, como es bien sabido, por "procedimiento decisorio" en Lógica a un procedimiento de índole mecánica, integrado por un conjunto finito de operaciones, que permite resolver afirmativa o negativamente sobre el valor de una expresión lógica. En realidad, estos procedimientos ya han sido estudiados desde muy antiguo por los matemáticos, que los denominaron "algoritmos".

El "algoritmo" —definido como un método sistemático de cálculo— tiene las siguientes características:

1.ª Es un procedimiento para resolver un problema, es decir, para dar respuesta a un interrogante.
2.ª Esta respuesta podría hallarse por un procedimiento distinto del algorítmico, pero ese procedimiento es más largo, menos eficaz y más incierto.
3.ª El uso del algoritmo permite dar respuesta al interrogante con facilidad y exactitud.
4.ª La validez del algoritmo tiene que ser demostrada, y esa demostración no constituye a su vez un algoritmo.

Un caso típico de algoritmo es el llamado "algoritmo de Euclides"; en él se aprecian con nitidez las características antes señaladas. En efecto:

1.ª Con él se da respuesta a un problema, a un interrogante, el de cuál sea el máximo común divisor de dos números a y b.
2.ª Naturalmente que la respuesta a la pregunta anterior puede ser hallada por un procedimiento no algorítmico; por ejemplo, por el método de ensayos directos, aplicable con rapidez y exactitud cuando a y b sean números pequeños, pero que, en el caso de ser grandes, constituiría un proceso trabajoso y muy incierto.
3.ª El uso del algoritmo de Euclides permite, mediante sucesivas divisiones, en número finito, hallar con facilidad y exactitud la respuesta al interrogante, es decir, el m. c. d.
4.ª La validez del algoritmo de Euclides tiene que ser demostrada, demostración que no es algorítmica. Es decir, la respuesta a la pregunta sobre la validez o invalidez del algoritmo no se resuelve con un algoritmo. Efectivamente, el algoritmo de Euclides se basa en la tesis de que

$$a = b\,q + r \Rightarrow (a, b) = (b, r),$$

donde q es el cociente de a entre b, y r el resto. Y esta implicación se demuestra de un modo no algorítmico.

La facilidad y exactitud de decisión que supone el procedimiento algorítmico haría pensar que el ideal razonador consistiría en poder responder a todo interrogante mediante la aplicación de un algoritmo.

Sin embargo, este ideal se presenta como irrealizable, ya que ni siquiera en el campo matemático, tan formalizado, es posible.

En el ámbito de la lógica simbólica también se usa el algoritmo, es decir, el procedimiento decisorio. Por lo menos al nivel de la lógica proposicional. Tal es el caso de las matrices de verdad, mediante las cuales se puede dar respuesta, de un modo mecánico y exacto, a la pregunta sobre si una determinada fórmula lógica constituye una ley lógica, una contradicción o una fórmula indefinida.

Ahora bien, no todos los procedimientos que usa la Matemática para dar respuesta a una pregunta son decisorios; es más, la inmensa mayoría de ellos no lo son. Así, por ejemplo, no hay un algoritmo que nos permita contestar a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la expresión matemática que, utilizando únicamente el número 2 y las diversas notaciones algebraicas, permite expresar cualquier entero positivo? [1]. Y tampoco puede darse con él respuesta al interrogante sobre la verdad o falsedad de la "conjetura de Goldbach" [2].

Análogamente, en la esfera de la lógica simbólica la mayoría de las respuestas no se dan mediante un procedimiento decisorio. Sin embargo, el moderno cálculo lógico permite encontrar solución precisa a una serie de interrogantes que la mente humana, privada del calculismo, se vería ante una dificultad —y en muchos casos imposibilidad— de resolver.

Planteemos, por ejemplo, la cuestión de la compatibilidad o incompatibilidad de una pluralidad de proposiciones, ligadas entre sí por unas determinadas relaciones. Designemos a las proposiciones por *p, q, r, s, t* y queremos hallar los valores de verdad de las mismas precisos para

---

[1] Este interrogante es el que se habían planteado los matemáticos de Göttingen y que fue resuelto por Dirac con la expresión:

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\ldots,$$

en la que el número de radicales es igual a N.

[2] Goldbach había comprobado que en los casos observables cualquier número par era igual a la suma de dos números primos ($4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 5 + 3$, etc.). Goldbach planteó a Euler la cuestión de demostrar si esta propiedad era válida para todo número par o no. Ni Euler ni hasta el momento presente nadie ha podido dar respuesta a esta pregunta.

que sea compatible el sistema lógico contruido con ellas sobre los siguientes supuestos:

1) *p* es verdadera.
2) Si *t* es falsa, *p* y *q* son falsas y *r* o *s* son verdaderas.
3) Si *p* es verdadera y *q* o *r* son falsas, *s* es verdadera.
4) Si *q* es falsa, *p* es falsa.
5) Si *r* es verdadera, *s* es falsa.
6) Si *s* es verdadera, *r* es falsa.

La versión en la terminología del álgebra booliana de las implicaciones precedentes es:

2) El complementario de T implica la intersección (o producto lógico) de la intersección de los complementarios de P y Q y de la reunión (o suma lógica) de R y S.
3) La intersección de P con la reunión de los complementarios de Q y R implica S.
4) El complementario de Q implica el complementario de P.
5) R implica el complementario de S.
6) S implica el complementario de R.

Lo que, traducido a notación simbólica, da:

2) $\overline{T} \subset (\overline{P} \cap \overline{Q}) \cap (R \cup S)$[3].
3) $P \cap (\overline{Q} \cup \overline{R}) \subset S$.
4) $\overline{Q} \subset \overline{P}$.
5) $R \subset \overline{S}$.
6) $S \subset \overline{R}$.

---

[3] La reunión de clases, llamada operación *o*, tiene siempre en álgebra de conjuntos o clases carácter inclusivo. En cuanto a la implicación aquí utilizada, es la implicación matemática —que en lógica se conoce como implicación de Lewis—; en este tipo de implicación, cuya notación es $A \subset B$ o también $A =\rangle B$, la implicación sólo es verdadera si A y B son verdaderas. Por el contrario, en la implicación lógica o filoniana, cuya notación es $A \supset B$, la implicación sólo es falsa si A es verdadero y B falso; en todos los demás casos —A verdadero y B verdadero, A falso y B verdadero, A falso y B falso— la implicación es verdadera.

De 2) se sigue $\bar{T} \subset \bar{P} \cap \bar{Q}$ y $\bar{T} \subset R \cup S$.

De 3), en virtud de la distributividad, $(P \cap \bar{Q}) \cup (P \cap \bar{R}) \subset S$.

De 4) se sigue $P \subset Q$.

De 5) y 6) se sigue $R = \bar{S}$ y $\bar{R} = S$.

De que $\bar{T} \subset \bar{P} \cap \bar{Q}$ se sigue que $\overline{P \cap \bar{Q}} \subset T$, y [en virtud de la ley de De Morgan $\overline{\bigcap (A, B, C\ldots)} = \bigcup (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\ldots)$ —el complementario de una intersección es la reunión de los complementarios—] que $P \cup Q \subset T$, por lo que $P \subset T$ y $Q \subset T$.

Por otra parte, de $\bar{T} \subset R \cup S$ se sigue que $\overline{R \cup S} \subset T$, es decir, que $\bar{R} \cap \bar{S} \subset T$ [en virtud de la otra ley de De Morgan, según la cual $\overline{\bigcup (A, B, C\ldots)} = \bigcap (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\ldots)$ —el complementario de una reunión es la intersección de los complementarios—].

Ahora bien, como $\bar{S} = R$, $\bar{R} \cap R \subset T$, de donde $\emptyset \subset T$ (ya que la intersección o producto lógico de una clase con su complementaria es una clase vacía).

De que $(P \cap \bar{Q}) \cup (P \cap \bar{R}) \subset S$, se sigue que $P \cap \bar{Q} \subset S$ y que $P \cap \bar{R} \subset S$, pero de $P \subset Q$ se sigue que $P \cap \bar{Q} = \emptyset$, de donde $\emptyset \subset S$.

De $\bar{R} = S$ se sigue que $P \cap S \subset S$.

De $\emptyset \subset T$, $\emptyset \subset S$ y $P \cap S \subset S$ se sigue que las condiciones de compatibilidad del sistema lógico son

$$\begin{cases} P \subset Q \subset T \\ R = \bar{S}, \end{cases}$$

es decir, que la verdad de *P* implica la de *Q* y *T*, y que *R* y *S* son incompatibles.

Por último, es de destacar que estos procedimientos de cálculo no sólo tienen un alto interés teórico, sino que tienen interesantes aplicaciones de tipo práctico.

Así, por ejemplo, en el juego del *nim* (tal como lo llamó el matemático Charles Leonard Bouton) puede utilizarse un procedimiento decisorio que asegura, al que lo conoce —y siempre, claro es, que el contrario lo ignore—, el ganar en el juego.

En cuanto a las condiciones de compatibilidad de un sistema lógico antes estudiadas, tienen, por ejemplo, aplicación práctica en la determinación de los relés electromagnéticos.

JOSÉ BARRIO GUTIÉRREZ