La aplicación física de la geometría astral como confirmación de la teoría kantiana del conocimiento

The physical application of astral geometry as confirmation of the Kantian theory of knowledge

Juan Cano de Pablo

Recibido: 28/08/2006
Aceptado: 10/11/2006

Resumen

La aparición de las geometrías no euclidianas o astrales parecían contradecir la filosofía de la matemática de Kant. Éste había contemplado la posibilidad de una geometría suprema, pero la desechó por que no se relacionaba sintéticamente con la experiencia. Sin embargo, a principios del siglo XX Albert Einstein desarrollo la Teoría de la relatividad e hizo de ella una teoría de la gravitación. Esta teoría, conocida como Teoría de la relatividad general, confiere al Universo una estructura no euclídea. En este artículo se plantea que tal dotación de sentido físico a un tipo de geometría astral (Geometría esférica o Riemanniana), hace que los recelos que Kant manifestó hacia una posible geometría diferente de la que se nos presenta en la intuición se disipen. La Teoría de la relatividad restablece, de esta manera, la conexión necesaria entre la nueva geometría y la experiencia.

Palabras clave: Geometría euclídea, geometría no euclídea, Teoría de la relatividad, juicios sintéticos *a priori*, matemática.

Abstract

The appearance of the non-Euclidean or astral geometries seemed to contradict the philosophy of the Kant´s mathematics. He had considered the possibility of a supreme geometry, but he discarded it due to it was not synthetically related with the experience. However, at the beginning of the XX century Albert Einstein developed the Theory of the Relativity and made it a theory of gravitation. This theory, known as Theory of the General Relativity, confers to the Universe a non Euclidean structure. In this article it is outlined that such an endowment of physical sense to an astral (spherical Geometry or Riemanniana) geometry kind, makes that the mistrust that Kant manifested with respect to a possible geometry different to that which the intuition presents to us, will vanish. The Theory of Relativity so recovers the necessary connection between the new geometry and the experience.

Keywords: Euclidian Geometry, Non-Euclidean geometry, Theory of the relativity, *a priori* synthetic judgements, mathematical.

La importancia de la filosofía de Kant es incuestionable, pero su validez tras la aparición de las geometrías no euclídeas o astrales quedó en entredicho. El problema radica en que estas geometrías no son intuitivas, por lo que la intuición pura deja de poder ser aplicable. Según Kant la matemática es una ciencia que procede por construcción de conceptos, lo cual implica que la intuición en necesaria, de lo contrario sus juicios no serían sintéticos *a priori*. Sin embargo, si la matemática es una disciplina analítica se reactiva la separación entre la mente y el mundo externo. De esta manera la perspectiva trascendental del conocimiento queda anulada, no pudiéndose explicar satisfactoriamente cómo sus juicios coinciden con los del mundo externo.

1. Origen y características de la geometría astral

La geometría no euclídea viene de la falta de evidencia del quinto postulado de Euclides. De esta particularidad ya se habían percatado los sucesores del alejandrino, pues habla de una prolongación "indefinida" de las rectas. El estoico Posidonio de Rodas o de Apamea (*ca.* 135 - *ca.* 51 a.C.), Gemino (*fl. ca.* 70 a.C.) y el neoplatónico Proclo buscaron su demostración a partir de los otros postulados, pero no dieron con ella. Entre los matemáticos árabes que buscaron la demostración destacan Ibn Al-Haitham, más conocido como Alhazen (965-1039), Omar Khayyam (*ca.* 1050-1123) y Nasir Eddin Al Tusi (1201-1274). Entre los italianos mencionaremos a Federico Commandino (1506-1575), Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) y al jesuita Girolamo Saccheri (1667-1733). Este último ensayó una demostración indirecta consistente en una *reductio ad absurdum* del postulado presuponiendo que era falso. El camino emprendido le llevó muy cerca de resolver el problema, pero una falacia en sus deducciones dejó las cosas como al principio. Tampoco J. H. Lambert (1728-1777) o A. M. Legendre (1752-1833) consiguieron demostrarlo o refutarlo. El conde de Lagrange (1736-1813), "pirámide de los matemáticos" según Napoleón, parecía haber dado con la clave del problema, pero cuando estaba comunicando sus conclusiones en la Academia Lagrange interrumpió su exposición y jamás la retomó.[1] A principios del s. XIX y separadamente, el húngaro Janos Bolyai (1802-1860) y el ruso Nicolái Ivánovitch Lobachevsky (1793-1856) dejaron a un lado el procedimiento de *reductio ad absurdum* del postulado y lo tomaron directamente como falso. Al sustituir el postulado por otro diferente constituyeron un nuevo sistema geométrico. Al parecer, Gauss había descubierto la nueva geometría treinta años antes en el transcurso de unas investigaciones sobre superficies mediante coordenadas intrínsecas.[2] Sin embargo, Gauss no publicó sus resultados porque la había elaborado "para sí mismo" y por temor al "griterío de los beocios". El nuevo postulado se basa en el supuesto de que por un punto exterior a una recta pueden trazarse infinitas paralelas a ésta. Los resultados de Lobachevsky fueron publicados por primera vez en el *Kazan Messenger* de 1829 con el título "Sobre los principios de la geometría". Bolyai, por su parte, envió sus reflexiones a su padre, quien las publicó bajo el título *Ciencia absoluta del espacio* en forma de apéndice a un tratado que había escrito y que llevaba un largo título en latín que comenzaba con la palabra *Tentamen*.[3] Este *Tentamen* lleva un *imprimatur* fechado en 1829, pero no apareció hasta 1832.

A mediados de siglo, Bernhard Riemann (1826-1866) cambió de nuevo el postulado, suponiendo que por el punto mencionado no puede trazarse paralela alguna a la recta dada. El espacio ideado por Riemann tiene un grado de curvatura positivo constante, distinguiéndose así del espacio de Bolyai-Lobachevsky, en el cual la curvatura constante es negativa. Posteriormente, Riemann elaboró una teoría generalizada de los espacios de curvatura variable.[4] La expresión "geometría riemanniana" hace referencia en física a esta geometría generalizada de la cual las antiguas

---

[1] Al parecer dijo: "Il faut que j´y songe encore" (Tengo que pensarlo un poco más). *Vid.,* Gonseth, F., *Les fondements des mathématiques: de la géometrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme.* Libreirie scientifique, Paris, 1926.

[2] Conocidas más tarde como coordenadas gaussianas.

[3] Farkas Bolyai, padre de Janos Bolyai, pasó casi toda su vida intentando demostrar el postulado de las paralelas. Cuando vio que su hijo seguía sus mismos pasos le mandó por carta la siguiente advertencia: "Por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque, lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida". *Apud.,* Boyer, C. B., *Historia de la matemática*. Versión de Mariano Martínez Pérez, Alianza, Madrid, 2001, p. 674.

[4] W. K. Clifford en su libro *The common sense of exact sciences* (1955) otorgó a la suposición de que el espacio no es homoloide (de curvatura constante) un significado físico.

geometrías riemanniana y de Bolyai-Lobachevsky constituyen, junto con la geometría euclidiana, los casos especiales más simples. Riemann aprovechó estos avances y concibió el espacio como un continuo de un número arbitrario de dimensiones, convirtiendo el espacio de tres dimensiones de la intuición en un caso dentro de la infinita serie de posibilidades abierta. Ciertamente se trata de un caso entre otros muchos, sin embargo el espacio euclidiano no es un caso más, sino un caso especial, dado que es el más sencillo de los espacios tridimensionales posibles.

Las críticas a las nuevas geometrías fueron numerosas, pero la más importante era que no se podía asegurar que no encerraran alguna contradicción. Esta objeción fue eliminada por Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1868 y tres años más tarde, de manera más evidente por Felix Klein (1849-1925), discípulo de Julius Plücker (1801-1868) al realizar modelos euclidianos de espacios no euclidianos. La existencia de esos modelos conlleva que si la nueva geometría resulta ser contradictoria, también lo será la geometría euclidiana. Klein fue el que dio los nombres de *geometría hiperbólica* y *geometría elíptica* a las geometrías de Bolyai-Lobachevsky y Riemann respectivamente.

Podemos resumir las particularidades de las nuevas geometrías dependiendo de su curvatura, del quinto postulado y de sus diferentes negaciones en el siguiente cuadro:

TIPOS DE GEOMETRÍA	Suma de los ángulos de un triángulo	Relación de la circunferencia con el diámetro	Grado de curvatura	Número de paralelas
HIPERBÓLICA	< 180º	P<	K<0	?
EUCLIDIANA	180º	P	K=0	1
ELÍPTICA	>180º	P>	K>0	0

Veamos el contenido de esta tabla. El quinto postulado de la geometría intuitiva permite el paso de una y sólo una paralela por un punto exterior a una recta dada. Si cambiamos esta condición por esta otra: “por un punto exterior a una línea recta puede pasar más de una línea recta exterior a ella”, nos encontramos con una geometría hiperbólica o de Bolyai-Lobachevsky. Pero si la condición es esta otra: “por un punto exterior a una línea recta no puede pasar ninguna paralela a ella”, estamos frente a una geometría elíptica (o esférica) de Riemann.

Vemos que en la geometría hiperbólica o “trombónica” hay un número infinito de paralelas, mientras que en la geometría elíptica no hay paralelas. La geometría hiperbólica describe la geometría de un plano que está formado sólo por los puntos interiores de un círculo, en el que todas las posibles líneas rectas son cuerdas del círculo. Como se ve en la figura 1, se puede dibujar un número infinito de líneas paralelas a la línea *L* que pasen por el punto *P* sin que se corten.[5]

[5] Los ejemplos que muestran las figuras 1 y 2 son sólo para hacernos una idea de lo que pueden

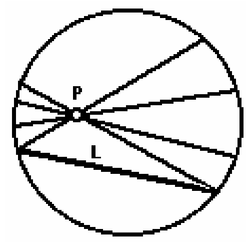


Figura 1

Pensemos ahora en una esfera (caso límite de una elipse). Consideremos su superficie como análoga a un plano. Imaginemos que las rectas son los segmentos de los círculos máximos de la esfera (líneas geodésicas) puesto que son la distancia más corta entre dos puntos. Como vemos, la geodésica forma parte de un círculo máximo. Los círculos máximos son las curvas que se obtienen al seccionar por medio una esfera. En esta geometría no hay paralelas como muestra la figura 2.

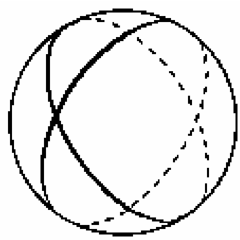


Figura 2

Estas dos geometrías también se diferencian al sumar los ángulos de un triángulo. En la geometría euclidiana la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, es decir, 180º. En la geometría hiperbólica de Bolyai-Lobachevsky, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180º. En la geometría elíptica de Riemann, la suma supera los 180º.[6] Siguiendo el ejemplo de la esfera se ve el porqué de estas diferencias.

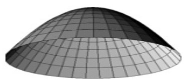
Otra diferencia es la razón de la circunferencia del círculo a su diámetro. Riemann pensó que si interpretamos el “plano” como la superficie de una esfera, y una “línea recta” como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera obtendremos un modelo de su geometría. Un círculo en el espacio riemanniano se asemeja a un casquete esférico.[7] En este círculo la razón mencionada es menor que π. Sin embargo, en el espacio de Bolyai-Lobachevsky tal razón es mayor que π.

significar las geometrías euclidianas, pero simplemente describen casos particulares de la geometría que se puede realizar sobre una esfera, no de los espacios métricos curvos en general.

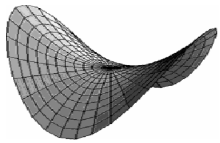
[6] En concreto, la suma de los ángulos de un triángulo esférico puede ser cualquier valor entre 180º y 540º, dependiendo del tamaño y de la forma del triángulo.

[7] Un casquete esférico es un tipo de paraboloide de revolución, es decir, una superficie obtenida al girar una parábola respecto de su eje.

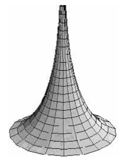
Eugenio Beltrami demostró que también había a mano un modelo análogo para esta geometría. Para el espacio hiperbólico se cumplen las propiedades de la seudoesfera,[8] por eso un círculo del espacio hiperbólico se asemeja a una silla de montar (paraboloide hiperbólico).



Casquete



Paraboloide hiperbólico



Seudoesfera

Desde la perspectiva kantiana, una geometría tal debería seguir siendo sintética *a priori* porque la matemática toda se basa en la intuición. Sin embargo, esta geometría no es intuitiva. La idea fundamental de Kant de entender los axiomas y teoremas de la geometría euclidiana como juicios sintéticos *a priori* que explicitan las propiedades del espacio en virtud de su idealidad, se pueden encontrar en la *Dissertatio* (§ 15) y en diversos lugares de la *Crítica de la razón pura* (B 40, A 39/B 56, A 439/B 467). Sin embargo, en la disertación de 1746 sobre *La verdadera manera de calcular las fuerzas vivas*[9], Kant dejo abierta una posibilidad para la existencia de otras geometrías.

> Dios hubiera podido elegir otra [se refiere a la Ley de Gravitación Universal], por ejemplo, la proporción inversa al cubo de las distancias; […] por último, que de otra ley, se habría derivado una extensión de otras propiedades y dimensiones. Una ciencia de todas estas posibles clases de espacios sería con toda seguridad la más alta geometría abordable por un entendimiento finito. La imposibilidad que percibimos en nosotros mismos para figurarnos un espacio de más de tres dimensiones, me parece estribar en que nuestra alma recibe igualmente las impresiones externas según la ley de la doble relación inversa de las distancias, y en que su naturaleza misma está hecha de modo que no sólo sufre, sino que actúa fuera de sí de esta manera.[10]

[8] Superficie de revolución engendrada por una tractriz al girar alrededor de su asíntota. Se conoce como "seudoesfera" debido a que tiene curvatura constante negativa, mientas que la esfera tiene curvatura constante positiva.

[9] El título completo es *Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas y crítica de las demostraciones de las que Leibniz y otros mecánicos se han servido en este litigio, junto con algunas consideraciones previas que conciernen a las fuerzas de los cuerpos en general.*

[10] *Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas*. Traducción y Comentario de Juan Arana Cañedo-Argüelles, Peter Lang, Berna, 1988, § 10, pp. 35-36. (Ak., I, 24-25). En adelante citaremos esta obra como *Gedanken.*

En efecto, puede haber otras geometrías, pero si carecen de enlace con los objetos de la experiencia funcionarán en el vacío, por así decir:

> Así pues, aunque conocemos *a priori* en los juicios sintéticos muchas cosas acerca del espacio en general o de las figuras que en él diseña la imaginación productiva (de modo que, realmente, no nos hace falta en este sentido ninguna experiencia), si no tuviésemos que considerar el espacio como condición de los fenómenos que constituyen la materia de la experiencia externa tal conocimiento sólo equivaldría a entretenernos con un mero fantasma. En consecuencia, dichos juicios sintéticos *a priori* se refieren, aunque sólo mediatamente, a la experiencia posible, o más bien, a la misma posibilidad de la experiencia, y la validez objetiva de su síntesis se basa únicamente en tal referencia.[11]

Pero… ¿Qué pasaría si la geometría astral fuera dotada de significación física?

2. Aplicación física de la geometría astral

Ya en el breve escrito *Nuevo concepto del movimiento y del reposo* Kant negaba que el movimiento y el reposo sean absolutos. Sin embargo, esa posición no tiene por qué implicar que el espacio sea un sistema de relaciones entre los objetos que lo pueblan. Aunque el espacio fuera previo a los objetos, la homogeneidad de sus partes no permitiría determinar si un cuerpo se mueve o reposa de manera absoluta.

> Entonces comienzo a percatarme de que algo me falla en los términos de *movimiento* y de *reposo.* No los debo emplear nunca en sentido absoluto, sino siempre en sentido relativo. Nunca debo decir: un cuerpo está en reposo. Y jamás debo hablar de que se mueve, sin nombrar, al mismo tiempo, los objetos respecto a los cuales él cambia su relación. Aunque yo quisiera imaginarme un espacio matemático, vacío de toda creatura, como una relación de los cuerpos, tampoco esto me ayudaría nada. Porque ¿con qué distinguiré sus partes y sus distintos lugares, si no están ocupados por nada corpóreo?[12]

Esta afirmación de Kant se ha pasado casi siempre por alto. Suele decirse que fue Ernst Mach (1838-1916) el primer filósofo que habló en contra del espacio absoluto de Newton, a la vista está que no. Mach dirá lo mismo que Kant un siglo después al considerar el espacio y el movimiento absolutos “puros objetos de pensamiento, meras construcciones mentales que no pueden ser producidas en la experiencia”.[13] Ciertamente Einstein se inspiró en Mach y aunque conocía muchos de los escritos de Kant nunca se refirió a éste.

---

[11] *KrV.,* A 157/B 196.

[12] Kant, *Del movimiento y del reposo.* En *Opúsculos de filosofía.* Introducción, traducción y notas de Atilano Domínguez, Alianza, Madrid 1992, pp. 101-102. (Ak., II, 17).

[13] Mach, E., *The Science of Mechanics.* Open Court Pub. Co., La salle, I11., 1942, p. 280.

Albert Einstein publicó el 26 de septiembre de 1905 en *Annalen der Physik* un artículo titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento". Para empezar, la nueva concepción del mundo físico que planteaba el artículo eliminaba una hipótesis no justificada por hecho experimental alguno, la existencia de un éter. En el éter no se pueden fijar puntos y seguir su trayectoria o su reposo, es pues imposible medir la velocidad de la Tierra respecto a él. Carece de sentido relacionar velocidad alguna con este fluido imponderable. Einstein no entra en consideraciones acerca de la existencia o la entidad del éter, simplemente excluye, por superflua, tal hipótesis en su conjunto.[14]

El resultado del experimento de Michelson-Morley podía significar dos cosas: que el éter esté dotado de un movimiento solidario con la tierra, o que no disponemos de medios suficientes para saber si existe algo en reposo absoluto en el Universo y, por tanto, si nuestros sistemas de referencia están dotados o no de movimiento. Esta imposibilidad aparecía ya en un libro: *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano* (1632),[15] en el que Galileo, por boca de Salviati, expresa que mediante experimentos mecánicos es imposible poner de manifiesto si un sistema está en reposo o si se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. Esta dificultad fue superada por el propio Galileo en lo que se conoce como *"principio de relatividad de Galileo"*, el cual dice que las leyes físicas son las mismas para un observador que esté en reposo absoluto que para uno que se mueva con movimiento rectilíneo y uniforme. Aunque también puede enunciarse de esta otra forma: las leyes físicas son las mismas para dos observadores que se hallen en movimiento rectilíneo y uniforme uno respecto del otro. Permítasenos una tercera formulación: *Es imposible, mediante cualquier experiencia mecánica, en el interior de un sistema cerrado, distinguir su movimiento uniforme y rectilíneo del estado de reposo.*

Galileo enunció la imposibilidad de los fenómenos mecánicos para distinguir el reposo del movimiento rectilíneo y uniforme en el seno de un sistema, pero tampoco se puede lograr mediante fenómenos ópticos ni por medios electromagnéticos. Einstein generalizó el principio galileano negando categóricamente que se pueda distinguir dentro de un sistema entre reposo y movimiento rectilíneo uniforme mediante experimento físico alguno. Por este motivo cualquier sistema de este tipo (galileano (K)) es válido para describir las leyes de la naturaleza. El principio de la relatividad especial postula que las leyes según las cuales cambian los estados de los sistemas físicos, son independientes de a cual de dos sistemas de coordenadas, en transición uniforme uno con respecto al otro, se refieran estos cambios de esta-

[14] Cfr. Papp, D., *Einstein: historia de un espíritu*. Espasa-Calpe, Madrid, 1985, p. 97.

[15] Cfr. Galileo Galilei, *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. Vol. VII de las *Opere*, pp. 140-143, 197, 273-275, 401. Traducción de Antonio Beltrán Marí, Alianza (RBA), Barcelona, 2002.

do. Este principio se encuentra implícito en las ecuaciones de Lorentz, pero Lorentz preserva el éter para que siga manteniendo su función de espacio absoluto. Como los efectos del éter no pueden ser evidenciados debido a la contracción que sufre la materia en el sentido de la marcha (contracción Lorentz-Fitzgerald), Einstein convierte tal contracción en un postulado de su teoría. En este sentido la diferencia entre las propuestas de Lorentz y Einstein es, pues, que éste no deduce el *principio de relatividad* de los principios fundamentales de la teoría sino que lo postula:[16]

> [Nos vemos conducidos] a la conjetura… de que… para todos los sistemas de coordenadas en los que las ecuaciones mecánicas son válidas [sistemas de referencia inerciales], también lo serán las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica… Elevaremos esta conjetura (cuya sustancia será llamada a partir de ahora “principio de relatividad”) a la categoría de un postulado…[17]

El principio de relatividad no es una propiedad de la teoría, sino un requisito imprescindible. Al igual que Kant, Einstein sigue el consejo de Goethe:

> El mayor arte dentro de la vida académica y mundana consiste en transformar los problemas en postulados: así se sale triunfante.[18]

Einstein elaboró la relatividad examinando las teorías precedentes, no partiendo de experimentos.[19] De todos modos, lo que ahora nos interesa es cómo hace de la estructura del universo una geometría no euclídea.

La Teoría de la relatividad especial postula la equivalencia sólo de los sistemas galileanos, es decir, sistemas dotados de movimiento rectilíneo y uniforme. Todos los sistemas galileanos son equivalentes para la descripción de las leyes de la naturaleza. Ocurre aquí lo que siempre sucede al teorizar, que se toma un modelo ideal, el cual se aproxima a lo que realmente se da en el mundo, pero jamas lo encontramos fuera de las ecuaciones. Los sistemas que en realidad nos encontramos, al menos en la Tierra, no son galileanos porque están sometidos a la aceleración que les imprime la fuerza de gravedad. Para que la teoría tuviera una validez general debía, pues, dar cuenta también de los sistemas acelerados, es decir, debía ser una *teoría de la gravitación*.

---

[16] Otra diferencia es que las transformaciones de Lorentz no forman grupo, mientras que las de Einstein sí lo forman. Esto se debe a que Einstein no admitía la existencia de sistemas de referencia privilegiados como era el caso del éter. Cfr. Sánchez Ron, J. M., *El origen y desarrollo de la relatividad*. Alianza, Madrid, 1983, p. 67.

[17] Einstein, A., “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. En *Annalen der Physik*, 17, pp. 891-921, 1905. *Apud.,* Sánchez Ron, J. M., *Op., cit.,* 62.

[18] Cfr. Cassirer, E., *Zur modernen Physik*. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1972, p. 25.

[19] Cfr. Bunge, M., *Controversias en física.* Tecnos, Madrid, 1983, p. 90.

Según Newton, la fuerza gravitatoria es directamente proporcional al producto de la masa de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que media entre ellos, y se propaga con velocidad infinita.[20] La particularidad de esta fuerza hizo desconfiar tanto a Newton como a muchos físicos posteriores, puesto que hacía una distinción excesivamente marcada entre los fenómenos mecánicos y los fenómenos gravitatorios. A Einstein le preocupaba este punto e ideó un experimento mental para demostrar que la separación entre fenómenos mecánicos y fenómenos gravitatorios era, en realidad, injustificada. La gravedad se puede traducir, como toda fuerza, en una aceleración, por eso imaginó lo que sucedería si se eliminasen los efectos de la aceleración a que estamos sometidos constantemente por la gravedad. Para ello imaginó a una persona dentro de un cajón que puede ascender y descender a 9,8 m/s^2 para provocar y contrarrestar el efecto gravitatorio. Digamos que ese cajón es, por ejemplo un ascensor, este está en reposo sobre la Tierra, si la persona que va dentro deja caer un objeto cualquiera, como una llave, ésta caerá con una aceleración de 9,8 m/s^2 correspondiente a la gravedad que están experimentando. Supongamos ahora que el ascensor ha sido transportado por una nave espacial a una región libre de fuerzas gravitatorias y se le deja libre. Ahora ni el hombre ni su llave experimentan peso alguno, ambos flotan en el interior del ascensor como pompas de jabón. Supongamos ahora que la nave espacial tira del cable del ascensor con una aceleración de 9,8 m/s^2 poniéndolo así en marcha. La situación vuelve a ser igual que la que se daba en la superficie terrestre. El suelo del ascensor ejerce presión sobre los pies del hombre y la llave deja de flotar para quedar tirada por el suelo. De regreso a la Tierra, el ascensor queda suspendido de una torre muy alta de la que comienza a descender 981 centímetros cada segundo, es decir, en caída libre. En su interior las masas se tornan nuevamente ingrávidas y flotan igual que lo hicieron en el espacio exterior antes de ponerse el ascensor en marcha. Además de estas comprobaciones, el hombre del ascensor llevó consigo una linterna que usó para comprobar la curvatura que experimenta un haz de luz sometido a las diferentes situaciones acaecidas. Cuando el ascensor estaba en reposo en la superficie terrestre proyectó el haz de luz comprobando que estaba ligeramente curvado por la acción de la gravedad. En el espacio ingrávido el haz de luz se proyectó en línea recta cuando se encontraba en reposo, pero se curvó cuando el ascensor aceleró. Cuando el ascensor bajó de lo alto del edificio como si se lo dejara caer, el haz de luz se proyectó de manera rectilínea. Un observador que se encontrara fuera del ascensor interpretaría las cosas tal y como las hemos contado. Pero el suje-

[20] En forma algebraica, la ley se expresa así: $F_g = G\,(Mm/r^2)$. Donde G es la constante de gravitación y M la masa del Sol. Cfr. Newton, I., *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Introducción, traducción y notas de Eloy Rada, Alianza. Ensayo, Madrid, 1998, vol. 2, (en 059), Libro III, Proposición VII, Teorema VII, p. 635.

to de dentro sólo experimentaría la acción de la gravedad y su ausencia de manera periódica.[21]

Supongamos ahora que la tierra girase 17 veces más rápido de lo normal, es decir, que diera una vuelta sobre su eje en 85 minutos. La fuerza gravitatoria estaría contrabalanceada y equilibrada en el ecuador por la acción de la fuerza centrífuga. El campo gravitatorio estaría localmente suprimido por este hecho mecánico. En el ecuador no habría gravedad, todo flotaría y un objeto que arrojáramos proseguiría su trayectoria rectilínea en el espacio. Nosotros mismos podríamos despegar de la Tierra dando un pequeño salto. Variando las aceleraciones podemos recrear toda suerte de campos gravitatorios.

La interpretación que se da a una fuerza depende del conocimiento que tengamos de cómo se origina. Además, la fuerza gravitatoria depende del estado de movimiento del observador, es relativa al sistema de coordenadas al que se la refiere. Hemos visto cómo sus efectos son anulados mediante un dispositivo mecánico, lo cual hizo pensar a Einstein que los fenómenos gravitatorios y los mecánicos son solamente dos maneras de entender la misma cosa.

Sir Arthur Stanley Eddington (1882-1944) razonó en 1928 que un cuerpo atraído por la Tierra observaría la fuerza de gravedad no como una atracción, sino como un fenómeno que hace que todo lo demás ascienda aceleradamente:

> La fuerza de la gravitación no puede ser una fuerza que actúe sobre un cuerpo, pues, en caso contrario, sería posible discernir sobre cual de los dos cuerpos se ejerce susodicha fuerza.[22]

Parece, pues, que la gravitación no es, en rigor, una fuerza y que la aceleración y la gravedad son equivalentes.

En efecto, imaginemos que dos objetos de diferentes masas son arrollados por un coche que está acelerando. Desde el sistema de referencia del vehículo veremos a ambos objetos acercarse con idéntica aceleración independientemente de que uno tenga una masa mucho mayor a la del otro. Idéntico fenómeno ocurre cuando soltamos esos dos mismos objetos desde una torre si despreciamos la resistencia del aire. Eso es lo que Galileo quiso probar con su famoso “experimento de Pisa”.[23] A

---

[21] Cfr. Cecil Dampier, W., *Historia de la ciencia y sus relaciones con la filosofía y la religión.* Traducción de Cecilio Sánchez Gil, Tecnos, Madrid, 1997, pp. 431-434.

[22] Eddington, A.S., *La naturaleza del mundo físico.* Edit. Sudamericana, Buenos Aires, 1945, p. 148.

[23] Sobre si este experimento se realizó o no ver los siguientes artículos de Alexandre Koyré: *Galileo et l’expérience de Pise: Exprès d’une légende.* Annales de l´Université de París, París, 1937, pp. 442-453. *De motu gravium de Galileo: de l’expérience imaginaire et de leur abus.* Revue d´historie des sciences et de leurs applications, Paris, Presses Universitaires de France, t. XIII. 1960, pp. 197-245. *Traduttore-traditore: Exprès de Copernic et Galileo.* Isis, 1943, vol. XXXIV. Núm. 95, pp. 209-210. Todos ellos recogidos en Koyré, A., *Estudios de historia del pensamiento científico.* Traducción

este hecho se debe que el hombre del ascensor no pueda distinguir si se encuentra en reposo en un campo gravitatorio, o si se mueve con aceleración constante en un campo carente de gravedad.

En física se distinguen dos tipos de masa: la masa inerte o inercial y la masa pesante o gravitacional. Por masa inerte se entiende la resistencia que los cuerpos manifiestan a ser puestos en movimiento o a ser acelerados si ya se están moviendo. Por masa gravitatoria o pesante se entiende la tendencia de los cuerpos a ser atraídos hacia abajo debido a la acción de la gravedad. Que ambas masas eran proporcionales se desprendía del hecho de que los cuerpos pesados son también más inertes.

Newton conocía esta sorprendente proporcionalidad entre ambas masas, pero tanto él como sus sucesores no le prestaron toda la atención que merecía.[24] El que sí prestó atención a este hecho fue Einstein, el cual vio en él la manifestación de un único efecto físico y lo hizo un principio de su teoría, el *principio de equivalencia*. Una vez eliminada la idea de concebir la gravedad como una fuerza, la inercia se desveló como la única directriz del movimiento. Recordemos que el mundo para la Teoría de la relatividad es espacio-temporal. Recordemos también que según la ley de inercia, la trayectoria que siguen los cuerpos abandonados a sí mismos, es decir, en ausencia de fuerzas, es la más corta entre dos puntos. Recordemos, por último, que la gravedad no es una fuerza para Einstein. Entonces ¿por qué se curvan las trayectorias en los campos gravitacionales? La respuesta de la nueva teoría es que el espacio-tiempo se curva por la acción de objetos masivos. Los objetos no curvan sus trayectorias por la acción de una fuerza fantasmal, sino que es la estructura geométrica del espacio-tiempo la que se encuentra curvada, en ella reside la clave. Los objetos siguen su trayectoria rectilínea, sólo que esa "recta" está curvada.

Que un objeto vaya en línea recta o que describa una curva no depende ya de que sus movimientos se encuentren sometidos o no a la acción de fuerza alguna, sino que depende de la geometría del espacio-tiempo. En un espacio plano la gravitación toma forma de inercia, y en un espacio curvo la inercia se manifiesta como gravitación. Se eliminan así las diferencias establecidas por la Física newtoniana, dando cuenta una sola ley de la inercia y de la gravitación, dos caras de una misma moneda.

Gracias al principio de equivalencia es posible enunciar un *principio de covarianza general*, puesto que toda aceleración puede ser interpretada como producida por un campo gravitatorio.[25]

---

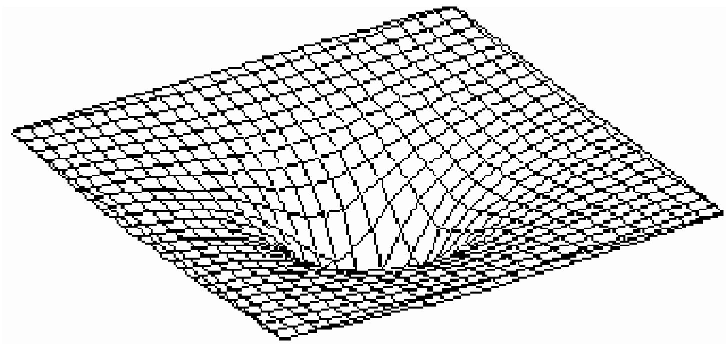
de Encarnación Pérez Sedeño y Eduardo Bustos, Siglo XXI, México, 1990.

[24] Esta proporcionalidad fue evidenciada, como hemos dicho, por Galileo en el experimento de Pisa y posteriormente por el barón húngaro Roland von Eötvös mediante experimentos muy precisos con péndulos. Cfr. Ducrocq, A., *La aventura del cosmos.* Traducción de Antonio Rivera, Labor, Barcelona, 1968, pp. 59-62.

[25] En un *campo* no intervienen fuerzas instantáneas a distancia, sino que los sucesos se propagan

3. Gravitación, una geometría astral.

La teoría de Einstein establece que la gravitación se debe a la curvatura espacio-temporal provocada por la materia. Esto significa que tanto la estructura geométrica del espacio, como el transcurrir del tiempo, se verán alterados por la acción de dichas masas. La fuerza de atracción de la que habla la mecánica newtoniana no es sino la deformación que sufre el espacio y el tiempo, o hablando con más propiedad, el espacio-tiempo. El valor de tal deformación varía de un punto a otro por tratarse de un espacio curvo, es decir, no euclídeo, pero como regla general se traduce en una contracción del espacio y una dilatación del tiempo.



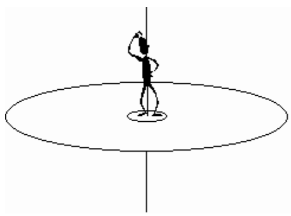
Deformación del espacio tiempo por la presencia de un cuerpo masivo.

La velocidad de propagación de la perturbación provocada por un objeto masivo no es infinita, sino que tiene como máximo la velocidad de la luz. En los lugares donde el influjo de las masas es despreciable la geometría vuelve a ser plana, es decir, euclídea. Se pone así de manifiesto la íntima relación del espacio, el tiempo y la masa. Si a esto le añadimos que la masa es energía concentrada (o la energía masa diluida) según se expresa en la ecuación $E = mc^2$, podemos hacernos una idea de la colosal síntesis einsteiniana. Además se trata de magnitudes relativas, todas ellas varían con la velocidad. El tiempo varía conforme a la expresión $\frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, el espacio según $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, y la masa sigue esta fórmula $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Sólo si el tiempo fuera absoluto la masa sería constante, ya estuviera en reposo o en movimiento.

Hemos dicho que los campos gravitatorios contraen el espacio y dilatan el tiempo haciendo más pequeñas las reglas o varillas métricas y atrasando los relojes. Pero para entender mejor estos fenómenos nos serviremos de un experimento mental ideado por Einstein, nos referimos al que expone en el § 23 de *Sobre la Teoría de la*

por la suma de pasos infinitesimales de un punto a otro, los fenómenos físicos no se ven afectados por fuerzas, sino por el espacio que las rodea, el cual, para explicar los fenómenos físicos que se dan en él, ha de tener una geometría propia.

relatividad especial y general con el título *El comportamiento de relojes y reglas sobre un cuerpo de referencia en rotación.* Más conocido como *"el experimento del disco"*. Este experimento ideal consiste en imaginar una superficie circular que gira alrededor del eje vertical que pasa por su centro, es decir, como un disco de vinilo en el tocadiscos, o más acorde con los nuevos tiempos un DVD en su correspondiente lector. Midamos ahora la relación entre el borde del disco y su diámetro. Para ello supondremos, dado lo breve de la medición, que la trayectoria del punto del borde elegido es rectilínea. Evidentemente, antes de comenzar a rotar el disco la relación nos daba como resultado el número π, pero ¿qué sucede ahora? Nosotros nos situamos en el centro del disco, el cual se halla en reposo. Tomamos nuestro metro y medimos el perímetro, nuestra regla, al estar en movimiento, se contrae. Luego medimos el diámetro, ahora nuestra regla no se contrae porque se encuentra en dirección normal al movimiento del disco. La relación encontrada nos arroja un valor mayor que el del número π, puesto que el diámetro es el mismo pero el perímetro es mayor al haber "encogido" la regla.



Si ahora buscamos la misma relación para las infinitas circunferencias concéntricas que se dan dentro del disco, encontraremos que para cada una de ellas tenemos un valor diferente. Si llamamos π al valor que se obtiene del cociente entre el perímetro y el diámetro, diremos que π tiene un valor diferente para la circunferencia descrita por cada punto del radio de nuestro disco giratorio. Esto sucede porque la velocidad angular es menor según nos acerquemos al centro, haciéndose cero en el eje, donde nos encontramos nosotros.

Con la sola rotación hemos tornado la geometría de una superficie de euclídea a no euclídea, pero aún hay más. Pongamos un reloj en el centro del disco y otro en la periferia. Cuando el disco estaba en reposo ambos marchaban a lo unísono, pero ahora el reloj del borde atrasa debido a su velocidad. Si instalamos relojes por los puntos interiores del radio del disco observaremos, paralelamente a lo que ocurría con el valor de π, que los segundos se contraen a medida que nos acercamos a su eje central.

Lo que sucede en el disco sucede también, en virtud del principio de equivalencia, en la cercanía de grandes masas. Tan sólo hay que hacer una salvedad. El experimento del disco describe un campo centrífugo, en este tipo de campos son las longitudes en la dirección tangencial al movimiento las que se acortan, permaneciendo invariables en el sentido radial. Los campos gravíficos (Φ), sin embargo, funcionan a la inversa, es decir, las longitudes se acortan en la dirección radial y no en la tangencial, obteniendo así un diámetro mayor cuanto mayor sea la intensidad del campo observado. Debido a esto, en un campo gravitatorio el cociente entre el perímetro y el diámetro nos arroja un número menor que π, o si se prefiere, π será menor que su valor canónico.

Si queremos reformular lo dicho para los ángulos interiores de un triángulo, diremos que para un campo centrífugo valen más que dos rectos, pero para un campo gravífico su valor es menor que dos rectos. En ambos campos el V postulado de Euclides no funciona, pero para un campo centrífugo el número de paralelas que podrían pasar por un punto exterior a una recta dada es infinito, mientras que en un campo gravífico no puede pasar ninguna. Por otro lado, el grado de curvatura para un campo centrífugo es menor que cero, para el gravífico es mayor que cero. Resumiendo, un campo centrífugo tiene una geometría hiperbólica, mientras que el campo gravitatorio tiene una geometría esférica. Si nos fijamos en una superficie esférica el valor de π es menor que su valor canónico, no hay paralelas y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que dos rectos. Einstein extrajo como conclusión que la gravedad curva esféricamente al mundo dotándolo de una geometría no euclideana.

4. ¿Cómo manejar un espacio curvo? Coordenadas gaussianas y cálculo tensorial

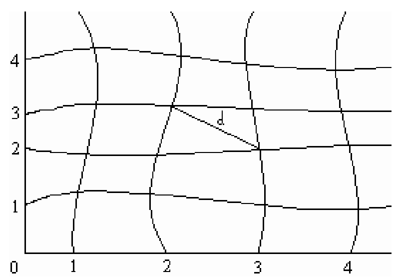
Imaginemos un espacio-tiempo gelatinoso y una cuadrícula flexible rodeando su superficie. Las cuadrículas aparecerían deformadas, curvándose de múltiples maneras. Pese a eso, si numeramos la red de cuadrículas podemos localizar cada punto de la red mediante dos números, al igual que hacemos en una superficie plana. Las coordenadas resultantes reciben el nombre de *coordenadas gaussianas* en honor de su creador Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Como el espacio-tiempo es tetradimensional, necesitamos cuatro coordenadas para definir un punto del nuevo Universo.

No podemos representarnos una imagen de esta estructura, pero podemos dar cuenta de ella merced a la matemática. Estos puntos son espacio-temporales por lo que los llamaremos puntos-suceso. Con este sistema aún no sabemos nada de las relaciones de medida (métrica), pues las coordenadas de nuestra red no nos lo permiten debido a su deformación. Hasta ahora sólo podemos estar informados, lo cual no es poco, sobre las relaciones de orden (topología) de este gigantesco "molusco" que es el Universo.[26]

[26] Einstein llama "molusco" a un cuerpo de referencia no rígido el cual, visto como un todo, no

Recordemos que cada punto de un universo tetradimensional describe una línea universal. En nuestro Universo molusco estas líneas se curvarán todo lo que se quiera, pero las coordenadas gaussianas las acompañarán solidariamente en todas sus deformaciones. De esta manera los puntos-suceso que se correspondan con la intersección de dos líneas universales quedan invariables, ya que son independientes de cualquier sistema de coordenadas. En un Universo de continuas relatividades encontramos, por fin, algunas propiedades absolutas como son los puntos de corte de las líneas universales, su número y su ordenación. Si conociéramos los puntos de intersección de todas las líneas universales conoceríamos la historia del Universo.

Hasta ahora podíamos determinar la topología de este espacio, pero no su métrica. Construir la métrica del gelatinoso espacio-tiempo no fue sencillo, Einstein tuvo que pedir ayuda a un amigo y compañero de estudios, el matemático Marcel Grossmann, experto en geometría diferencial o cálculo absoluto. Einstein y Grossmann, haciendo uso de las enseñanzas geométricas de Gauss y Riemann y el cálculo tensorial de Cristoffell de Ricci y Tullio Levi-Civita entre otros, consiguieron alcanzar el objetivo anhelado. La idea fundamental consiste en descomponer las superficies curvas en trozos infinitesimales, de esta manera podrán ser tratados como minúsculos planos sin curvatura. Un plano carente de curvatura es un plano euclídeo. Podemos, pues, manejar espacios no euclidianos mediante la integración de infinitos planos euclídeos infinitesimales.[27]



Mediante la reformulación riemanniana del teorema de Pitágoras, junto con las coordenadas gaussianas, podremos medir la distancia entre dos puntos del espacio estableciendo así su métrica. De ésta guisa encontramos los llamados "coeficientes métricos", tres de ellos expresan un plano, seis un espacio tridimensional y diez el espacio tetradimensional de la teoría emergente. Mediante estos diez factores métricos se obtiene tanto la curvatura como las propiedades geométricas de un fragmento de Universo, lo que equivale a decir la intensidad de su campo gravífico, su esta-

sólo tiene un movimiento arbitrario, sino que durante su movimiento sufre alteraciones arbitrarias en su forma. Cfr. Einstein, A., *Sobre la Teoría de la relatividad especial y general*. Traducción de Miguel Paredes Larrucea, Alianza (RBA), Barcelona, 2002, § 28 y 29, pp. 66-70.

27 Cfr. Papp, D., *Op. cit.,* 210.

do físico. Pero lo más impresionante de este cálculo es que las distancias obtenidas tienen valor absoluto, es decir, sirven para cualquier sistema de coordenadas, para observadores inerciales y no inerciales.

Los diez factores métricos se reúnen en una magnitud que recibe el nombre de tensor. El tensor relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía, siendo independiente del sistema de coordenadas elegido, por lo que permite a éste ser arbitrario, variando solamente los coeficientes métricos (*g*). El tensor al que nos referimos es, pues, válido para cualquier sistema de coordenadas y se llama, concretamente, tensor métrico o gravitacional, siendo su expresión la siguiente: $ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{21}dydx + g_{22}dy^2$. Las ecuaciones de campo forman un sistema de diez ecuaciones diferenciales de cuatro dimensiones, que relacionan la geometría del espacio-tiempo (*G*) con la distribución de materia y energía (T): $G_{\mu\nu} = 8p\ T_{\mu\nu}$ en donde $(\mu,\nu) = (0,1,2,3)$.

5. Geometría y física

Los análisis acerca de la geometría euclidiana posteriores a la aparición de la geometrías astrales han puesto de manifiesto que los postulados de los *Elementos* son incompletos. Esto se debe a que ciertas conclusiones de la geometría euclidiana carecen de un axioma que los valide. Esta ausencia se debe a que la geometría euclidiana es la geometría intuitiva, por tanto, desde la perspectiva kantiana la representación intuitiva del espacio suple tales axiomas porque vienen dados por la intuición. Las lagunas en la geometría euclidiana serían, pues, numéricas, no espaciales. La descripción geométrica intuitiva es previa a su descripción numérica, por lo que los axiomas ausentes en ella implican la ausencia de un número, pero no del punto correspondiente. Las expresiones aritméticas de la geometría analítica cartesiana adolecen de una discontinuidad numérica, mas no espacial. Tal discontinuidad debe suplirse con los llamados *axiomas de continuidad* tal como demostró Hilbert. La concepción kantiana apela a un conocimiento intuitivo elemental, la descripción numérica no se contempla. Los axiomas de continuidad son necesarios para que los números concuerden con la intuición espacial, siendo ésta la que garantiza la continuidad de las representaciones espaciales. Hilbert describe analíticamente la intuición del espacio, por eso necesita los mencionados axiomas de continuidad.[28]

En el sistema kantiano el conocimiento de la continuidad y de la tridimensionalidad del espacio es independiente de la expresión analítica de la geometría. Pese a eso Kant no excluyó la posibilidad de poder concebir otros espacios que no sean

[28] Hilbert, D., *Die grundlagen der Geometrie.* 1899. Inroducción y § 1.

euclidianos, pero éstos serán puras quimeras si carecen de conexión con la experiencia posible, como ya dijimos.[29]

La geometría aplicada a la física aporta el análisis de la estructura espacial del mundo. ¿Pero es la misma geometría la de la matemática y la de la física?

La geometría euclidiana fue la primera geometría, por consiguiente jugó ambos papeles. Los teoremas de esta geometría en la Física newtoniana nos informan de objetos fácticamente reales. Por ejemplo, el teorema de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º es posible derivarlo de los axiomas de Euclides. Tenemos, pues, un conocimiento *a priori* de su verdad. Si realizamos la prueba empírica encontraremos que el teorema es cierto y si no, es que nos hemos equivocado en la construcción, en la medición, o en ambas cosas. Estos teoremas describen la estructura física del mundo, son sintéticos y *a priori*.

Con la aparición de las geometrías no euclidianas la geometría matemática es considerada, como toda la matemática, una ciencia analítica. Es un sistema deductivo basado en unos axiomas sin interpretación física. Por ejemplo, Bertrand Russell demostró que es posible deducir lógicamente un conjunto de teoremas que abarquen la geometría euclidiana.[30] Eso hace de la geometría euclidiana una geometría matemática. El procedimiento de Russell, aparte de genial, es sumamente aclaratorio, pero totalmente superfluo para nuestro tema. En efecto, lo que nos interesa no es que la geometría euclidiana sea susceptible de tratamiento analítico como las demás, sino que es la única geometría que no lo precisa. Es la geometría intuitiva, la que nos permite hacernos una idea de lo que se está diciendo acerca del mundo físico. Eso hace de ella la única geometría física pensable hasta la aparición de la Teoría general de la relatividad. De hecho, la diferencia entre geometría física y geometría matemática no fue lo suficientemente clara hasta la publicación en 1899 de los *Fundamentos de la geometría* de David Hilbert. En el sistema ideado por Hilbert se definen una serie de objetos a los que se les llama puntos, líneas y planos; pero estos términos no se refieren a lo que significan usualmente estas palabras. Las usó porque hablaba de geometría y podía establecerse una analogía con la geometría euclidiana, pero, en rigor, su sistema carece de interpretación física.

J. E. Wiredu distinguió en la década de los 70 tres tipos de geometría.[31] Dos de ellas son la geometría matemática y la geometría física de las que habla Carnap en su *Fundamentación lógica de la física*,[32] lo novedoso es que a éstas añade una primera forma pura en la que se encontraría inserta la fundamentación kantiana.

---

[29] Cfr. *Gedanken,* § 10, p. 35-36 (Ak., I, 24-25).

[30] Cfr. Russell, B., *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1903, pte. VI.

[31] Cfr. Wiredu, J. E., "Kant´s Synthetic A Priori in Geometry and the Rise of Non-Euclidean Geometries". *Kant-Studien* 61 (1970), pp. 5-27.

[32] Carnap, R., *Fundamentación lógica de la física.* Traducción de Néstor Miguens, Edit. Sudamericana, Argentina, 1969, cap. XVIII.

Como dice Carnap, hay que diferenciar entre matemática pura y matemática física. Nosotros entendemos así la distinción:

Matemática pura: Trata de puros objetos matemáticos. La intuición no es necesaria para enunciar sus teoremas, en este sentido es analítica, pero trata sobre el espacio como infinito potencial, el cual no puede ser concepto sino intuición.

Matemática física: Trata sobre fenómenos, es decir, de aquellos objetos que existen, que son algo más que objetos matemáticos. Para que estos objetos puedan darse tienen que poder ser enlazados con la experiencia mediante conexión causal a una intuición empírica.

6. Lo matemático

Einstein llamó a una de sus conferencias "Geometría y experiencia", en ella decía que "En la medida en que los teoremas de las matemáticas se refieren a la realidad, no tienen certeza. Y en la medida en que poseen certeza, no se refieren a la realidad".[33] Evidentemente, Einstein entiende por realidad la experiencia empírica, la concepción empirista del conocimiento toma la experiencia como algo dado, no como algo construido por el sujeto. Debemos definir, pues, lo que se entiende por "matemático" en la *Crítica de la razón pura* y qué papel desempeña en el proceso de construcción de la experiencia. Para ello nos serviremos de las consideraciones de Martin Heidegger en *La pregunta por la cosa*.

La palabra "matemático" viene de τά μαῳη΄ματα y significa lo que se puede aprender, μανῳα΄νειν es aprender, y μα΄ῳησιζ es la enseñanza como búsqueda del conocimiento y también como contenido de lo enseñado. En Grecia lo matemático se encontraba próximo a estas acepciones:

1. τά φυσικα΄· Las cosas, en cuanto surgen y se presentan por sí mismas.
2. τά ποιου΄μενα· Las cosas, en cuanto son producidas artesanalmente por el hombre, y están presentes como tales.
3. τά ξρη΄ματα· Las cosas en cuanto están en uso y en permanente disposición, pueden ser o φισικα΄, piedras y cosas semejantes, o ποιοη΄ενα, cosas expresamente fabricadas.
4. τά πρα΄γματα· Las cosas en cuanto son en general cosas con las que tenemos trato, sea que las elaboremos, usemos o transformemos, o sea que sólo las contemplemos o investiguemos, πρα΄γματα, referidas a πραῃχιζ en sentido amplio, no en el sentido más estrecho del uso práctico (ξρηῃσῳαι) ni en el sentido de la πραῃχιζ como acción en el sentido de la acción moral;

[33] Einstein, A., *Geometrie und Erfahrung.* Berlín 1921. *Apud.,* Carnap, R., *Op. cit.,* 246.

πραηχιζ es todo hacer, emprender, mantener, lo que incluye en sí también la ποι´´ησιζ.

5. τά μαῳη´ματα. Según las cuatro caracterizaciones anteriores, debemos decir aquí, en cuanto a las μαῳη´ματα: "las cosas, en cuanto ellas…"; la pregunta es: ¿en cuanto qué?[34]

Al igual que Sócrates defiende que el conocimiento es reminiscencia,[35] Heidegger entiende que lo matemático es todo lo que sabemos antes de cualquier experiencia. Lo matemático quiere aprender las cosas en un aspecto concreto. Un modo de aprender puede ser usar algo, ese uso lo llama Heidegger *ejercicio*. Pero no es la única manera de aprender. El ejercicio nos puede llegar a dar un conocimiento exhaustivo no sólo del uso, sino de la composición del objeto usado. Sin embargo:

> Respecto a la cosa hay todavía un aprender a conocer que es aún más originario, y es tal que debe estar aprendido con anterioridad, para que haya tales modelos y los ejemplares correspondientes. […] Pero en verdad esto ya lo sabemos.[36]

Si no supiéramos de antemano lo que ese objeto es, no lo percibiríamos como tal, no se nos haría "visible":

> Cuando tomamos conocimiento en forma explícita y de manera determinada, entonces introducimos en el conocimiento algo que en verdad ya tenemos. Precisamente este "tomar conocimiento de" es la auténtica esencia del aprender, de la μα´ῳησιζ. Las μαῳη´ματα, son las cosas, en cuanto las introducimos en el conocimiento, introduciéndolas en el conocimiento como lo que de ellas ya es conocido de antemano, el cuerpo en cuanto corporeidad, la planta en cuanto vegetal, el animal en cuanto animalidad, la cosa en cuanto cosidad, etc. Este verdadero aprender es por lo tanto un tomar muy notable, en el cual el que toma, toma sólo aquello que en el fondo ya tiene.[37]

Vemos que según Heidegger lo matemático es lo intuitivo, lo *a priori*, lo que ya "sabemos" porque lo ponemos nosotros mismos. Lo matemático no es solamente lo perteneciente a la matemática numérica, aunque sea lo más conocido:

> Pero la esencia de lo matemático no está en el número en cuanto limitación pura de la

[34] Cuadro tomado de Heidegger, M., *La pregunta por la cosa*. Traducción de Eduardo García Belsunce y Zoltan Szankay, Alfa Argentina, Buenos Aires, 1975, p. 66.

[35] Como, por ejemplo, en el diálogo de corte mayéutico mantenido con un esclavo. Cfr. Platón, *Menón.* (82b-85b).

[36] Heidegger, M., *La pregunta por la cosa*. Ed. cit., 68.

[37] *L. c.*

> cantidad pura, sino a la inversa: puesto que el número es de tal naturaleza, pertenece a lo aprendible en el sentido de la μα΄ϣησιζ.[38]

Según Kant, los conceptos matemáticos no se pueden definir porque la intuición es la fuente de lo matemático. Los conceptos matemáticos poseen una naturaleza intuitiva que aflora al fundar los juicios sintéticos. Por eso dice Kant que el concepto matemático encierra en sí la intuición y su definición supone inmediatamente su construcción.[39]

7. Conclusión

Para Kant la representación del espacio tiene que ser *a priori*, pues en ella se basan los conocimientos que la geometría expone. También tiene que ser intuitiva, ya que la geometría determina los conceptos espaciales (espacio, recta, triángulo…) con atributos no implícitos en su definición. La geometría establece proposiciones sintéticas, produce avance en el conocimiento, no se trata de meras tautologías, por lo que debe apoyarse en la intuición. Por eso para Kant la geometría es la prueba de que existe una intuición pura (representación intuitiva y *a priori*) del espacio. Asegura además el valor objetivo de esta representación. Esto explica también la "asombrosa" coincidencia entre la matemática y la estructura espacial de objetos que nunca han sido observados.

La aparición de las geometrías no euclidianas provocó un estudio y una reformulación tan grande de la geometría euclidiana, que nada tiene que ver con la idea que tenía Kant de esta ciencia, sin embargo, estas geometrías no son incompatibles con la filosofía de Kant:

> El descubrimiento de Bolyai y Lobachevtsky consistió, en negar la validez del postulado de las paralelas y deducir de esta negación (combinada con la afirmación de los demás principios de la geometría clásica) una serie al parecer infinitamente prolongable de consecuencias, sin duda inusitadas, pero en absoluto contradictorias. Un descubrimiento tal no sólo no se opone a la concepción kantiana de la geometría, sino que hasta puede decirse previsto por ella.[40]

Torretti refuerza su explicación con el siguiente argumento de Arthur Pap:

---

38 Ibíd., 70.

39 *KrV.,* A 719/B 747.

40 Cfr. Torretti, R., *Manuel Kant. Estudio sobre los fundamentos de la filosofía crítica.* Ediciones de la universidad de Chile, Chile, 1967, p. 189.

> Sean A_1, A_2,…. A_n los axiomas de una geometría euclídea formalizada, de modo que el último corresponda al axioma de las paralelas. Supongamos que los matemáticos han demostrado que el conjunto no euclidiano de axiomas A_1, A_2,…. no-A_n no implica contradicción. Cualquiera que haya de ser nuestro veredicto final acerca de la filosofía kantiana de la geometría, un descubrimiento matemático como éste no refuta una sola opinión de Kant sobre ese tema. Pues sólo establece que el axioma de las paralelas no es analítico (si lo fuera su negación sería contradictoria y por lo tanto incompatible con cualquier otro axioma) y que es lógicamente independiente de los otros axiomas euclidianos. En verdad, la primera parte de esta demostración habría sido especialmente bienvenida por Kant.[41]

Para Kant las demostraciones geométricas se guían siempre por la intuición.[42] En la matemática actual la demostración de los teoremas no necesita apoyarse en la intuición. Dados los axiomas, las definiciones y las reglas lógicas de inferencia, se tiene todo lo que hace falta para establecer los teoremas. En la geometría euclidiana tradicional los teoremas no se deducen rigurosamente de los principios, sino que requieren ciertos principios "implícitos". Estos principios implícitos se veían como lo intuitivamente evidentes. Así los entendió Kant, pero al menos él comprendía la matemática de su tiempo, no como aquellos que la fundamentaban en un sistema deductivo mucho antes de que se pudiera hacer tal cosa.

Algunos autores piensan que al hablar del espacio no presupondremos ya una u otra geometría.[43] De todos modos, las ideas de Kant acerca de una geometría generalizada se cortan en la *Disertación*, en la que concluye que aquel que prescriba otras relaciones espaciales diferentes a las que establece la geometría euclídea "realiza en vano su trabajo, porque se ve obligado a utilizar esa misma representación como medio para apoyar su ficción".[44]

Dado que las geometrías no euclídeas no sólo existen en el ámbito de la matemática pura, sino que con la Teoría de la relatividad adquirieron interpretación física, y dado que la única manera de entender una teoría física es relacionándola con nuestro mundo intuitivo; no podemos por menos que estar de acuerdo con Kant. En efecto, en último extremo tenemos que tener un punto de contacto entre la teoría y el mundo percibido, de lo contrario la teoría no pasa de ser una ficción.

---

41 Pap, A., *An introduction to the Philosophy of Science.* Glencoe 1962, pp. 114 ss. En Torretti, R., *Op. cit.,* 189 n-190 n.

42 Cfr. *KrV.,* A 717/B 745.

43 Cfr. Lorenzo, J. de, *Kant y la matemática,* Tecnos, Madrid, 1992, pp. 38-39.

44 *Principios formales del mundo sensible y del inteligible (Disertación de 1770).* Versión castellana de Ramón Ceñal Lorente, Estudio preliminar y Complementos de José Gómez Caffarena, CSIC, Colección clásicos del pensamiento, Madrid, 1996, p. 24. (Ak., II, 404-405).

Juan Cano de Pablo
Dpto. de Filosofía
Facultad de Letras
Universidad de Castilla - La Mancha