MONOGRÁFICO

Logos. Anales del **Seminario de Metafísica**
ISSN: 1575-6866

https://dx.doi.org/10.5209/asem.75356

EDICIONES COMPLUTENSE

¿Qué es una ficción en matemáticas? Leibniz y los infinitesimales como ficciones[1]

Oscar M. Esquisabel[2]

Recibido: 22 de abril de 2021 / Aceptado: 26 de mayo de 2021

Resumen. El objetivo de este trabajo es examinar el concepto leibniziano de ficción matemática, con especial énfasis en la tesis de Leibniz acerca del carácter ficcional de las nociones infinitarias. Se propone en primer lugar, como marco general de la investigación, un conjunto de cinco condiciones que una ficción tiene que cumplir para ser matemáticamente admisible. Sobre la base de las concepciones de Leibniz acerca del conocimiento simbólico, se propone la ficción matemática como la clase de nociones confusas que carecen de denotación a raíz de la imposibilidad de su objeto. Tomando como punto de partida el análisis de la imposibilidad entendida como inconsistencia, se muestra que Leibniz admite otras formas de imposibilidad, que afectan especialmente a las nociones infinitarias. Proponemos así la imposibilidad como irrepresentabilidad geométrica y la imposibilidad por incompatibilidad con principios arquitectónicos. Así, el resultado de nuestro examen fundamenta la admisión de tres tipos de ficcionalidad matemática: la ficción$_1$, que se corresponde con la noción inconsistente, la ficción$_2$ que incluye las nociones geométricamente irrepresentables y la ficción$_3$, que se aplica a las nociones "arquitectónicamente" imposibles. En conclusión, los conceptos infinitarios, sin ser por sí mismos inconsistentes, corresponden al tipo de ficcion$_2$ y ficción$_3$. Como conclusión, se señala que la preocupación de Leibniz se enfoca sobre todo en la imposibilidad que surge de la incompatibilidad con principios arquitectónicos, relegando a un segundo plano la cuestión de la irrepresentabilidad geométrica. También se proponen algunas cuestiones generales acerca de la relación entre matemática y realidad en la filosofía de Leibniz.
Palabras clave: Leibniz; ficción matemática; infinito; cálculo infinitesimal; conocimiento simbólico ideal.

[en] What is a fiction in mathematics? Leibniz and infinitesimals as fictions

Abstract. This paper aims to examine the Leibnizian concept of mathematical fiction, emphasizing Leibniz's view on the fictional character of infinitary notions. Firstly, a set of five conditions that fiction has to fulfill to be mathematically admissible is proposed as a general framework for the investigation. Based on Leibniz's conceptions of symbolic knowledge, mathematical fiction is proposed as the class of confused notions that lack denotation due to the impossibility of their object. Departing from the analysis of the impossibility in terms of inconsistency, it is shown that Leibniz admits other forms of impossibility, especially for the infinitary notions. Thus, we propose impossibility as geometric irrepresentability and impossibility on the grounds of incompatibility with architectonic principles. In this way, the output of our examination supports the admission of three types of mathematical fiction: fiction$_1$, which corresponds to the inconsistent notions, fiction$_2$ that includes geometrically unrepresentable notions, and fiction$_3$, which applies to "architectonically" impossible notions. In

---

[1] Este trabajo se realizó en el marco del proyecto PICT 2017-0506*, La ciencia general de Leibniz como fundamentación de las ciencias: lógica, ontología y filosofía natural,* financiado por la ANPCyT.

[2] UNLP-UCA-IESCT(UNQ)/CONICET
omesqui@fibertel.com.ar

conclusion, infinitary concepts, without being inconsistent, correspond to the type of fiction$_2$ and fiction$_3$. Finally, it is concluded that Leibniz's concerns focus on the impossibility due to incompatibility with architectonic principles rather than on the issue of geometric irrepresentability. Also we propose some general issues about the relationships between Mathematics and reality in Leibniz's philosophy.
Keywords: Leibniz, mathematical fiction, infinite, infinitesimal calculus, symbolic-ideal knowledge

Cómo citar: Esquisabel, O.M. (2021) "¿Qué es una ficción en matemáticas? Leibniz y los infinitesimales como ficciones", en *Logos. Anales del Seminario de Metafísica* 54 (2), 279-295.

1. Introducción

Abordaremos en el presente trabajo la cuestión de los infinitesimales leibnizianos desde el punto de vista de las ficciones matemáticas. Para ello, el marco general que adoptaremos como hipótesis general son las concepciones de Leibniz acerca de la noción de conocimiento simbólico. De este modo, consideraremos que, para Leibniz, la ficción matemática es un tipo de noción o concepto simbólico[3] que tiene como características o notas fundamentales las siguientes:[4]

1. En principio, se trata de un concepto vacuo, sin denotación o sin idea que le corresponda. En la clasificación leibniziana de nociones, le corresponde el estatus de noción confusa.[5]
2. Es de carácter analógico, en el sentido de que su introducción se fundamenta en una relación analógica con conceptos de entidades y operaciones ya conocidas o establecidas.[6]
3. Como ocurre con toda noción simbólica, posee una función sustitutiva, en el sentido de que se la utiliza en lugar de otra cosa. A diferencia de las nociones simbólicas que sustituyen la consideración del objeto (o de la idea del objeto) en cuanto tal, las ficciones subrogan procedimientos u operaciones. En relación con esta función subrogativa, la relación que la ficción mantiene con lo subrogado es doble, a nuestro entender. En primer lugar, la ficción procura una abreviación del procedimiento matemático y, en ese sentido, funciona como un compendio. Por otra parte, el procedimiento subrogado posee un carácter fundante, en el sentido de que es exacto y riguroso (no apela a ficciones). De este modo, el resultado obtenido mediante la ficción

3 Para un análisis de la noción o concepto simbólico, ver Esquisabel, O. M.: "Representing and Abstracting. An Analysis of Leibniz's Concept of Symbolic Knowledge", en A. Lassalle Casanave (ed.), *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl, London, College Publications*, 2012, pp. 1-49.

4 Raffo Quintana, F.: "Sobre compendios y ficciones en el pensamiento juvenil de Leibniz", *Revista Latinoamericana de Filosofía*, 46, pp. 131-150. on-line DOI: 10.36446/rlf2020203.

5 Esquisabel, O. M., "Representing and Abstracting. An Analysis of Leibniz's Concept of Symbolic Knowledge", pp. 4-7.

6 Sherry, D. & Katz, M.: "Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions", *Studia Leibnitiana*, Vol. 44, 2012, pp. 166-192.

debería poder ser siempre validado en principio mediante el recurso del procedimiento correspondiente.[7]

4. Su introducción es, en general, de carácter informal, pero se puede formalizar mediante procedimientos sintácticos que se rigen por reglas de operación. De esta manera, Leibniz intenta construir un cálculo que regule la operación con nociones ficticias.
5. La ficción posee poder heurístico, en el sentido de que amplía el alcance del "arte de la invención": proporciona mejores soluciones a problemas conocidos, en el sentido de que son más sencillas y elegantes, al tiempo que extiende el dominio de problemas solubles, en el sentido de que proporciona una resolución a problemas a los que no se les ha encontrado aún una solución.[8]

2. La controversia sobre los infinitesimales

La propuesta general que constituye el marco de los análisis que desarrollaremos en lo que sigue defiende la idea de que la introducción de los infinitesimales leibnizianos como metodología matemática satisface las características que, según Leibniz, debe poseer las ficciones matemáticas. Por el momento, nos concentraremos en el concepto de ficción matemática, y dejaremos para otra ocasión el examen detallado de la justificación metodológica de su introducción. Por otra parte, nuestro enfoque sólo afectará de modo tangencial a la ya clásica controversia que se ha suscitado acerca de la naturaleza de los infinitesimales, así como sobre la justificación de su introducción.[9] Tampoco será nuestra preocupación determinar si la concepción leibniziana de las cantidades infinitesimales puede ser reconstruida adecuadamente mediante los conceptos de la matemática actual. Al contrario, nos interesamos más bien en determinar de qué manera Leibniz mismo concibió y trató de interpretar la novedad de su método.

En cualquier caso, los lineamientos actuales del debate pueden sintetizarse en cuatro enfoques principales. El primero de ellos, que podemos denominar "contextual" o "sincategoremático", fue propuesto por Hidé Ishiguro[10] y continuado por Richard Arthur.[11] En síntesis, para esta interpretación, el concepto de infinitesimal puede ser parafraseado sin resto mediante una combinación de cuantificadores universales y existenciales. Una visión opuesta a la anterior está representada por

---

7 Para la función sustitutiva y abreviadora de la noción simbólica en general, ver Esquisabel, O. M.: "Representing and Abstracting. An Analysis of Leibniz's Concept of Symbolic Knowledge", y para el caso de los infinitesimales, ver Raffo Quintana, F.: "Sobre compendios y ficciones en el pensamiento juvenil de Leibniz", *Revista Latinoamericana de Filosofía*, 46, pp. 131-150. on-line DOI: 10.36446/rlf2020203.

8 Sherry, D. & Katz, M.: "Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions", *Studia Leibni*tiana, vol. 44, 2012, pp. 166-192.

9 Para una síntesis de la controversia en el siglo XVII, ver Mancosu, P.: *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New York-Oxford, Oxford University Press, 1996, cap. 6, pp. 150-177.

10 Ishiguro, H.: *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990 (2a ed.), cap. V.

11 Arthur, R.: "Leibniz's syncategorematic infinitesimals", *Arch. Hist. Exact. Sci.,* 67, 2013, pp. 553-593. Ver también Arthur, R. "Leibniz's Syncategorematic Actual Infinite", en O. Nachtomy y R. Winegar (eds.), *Infinity in Early Modern Philosophy*, Cham, Springer, 2015, pp. 155-179.

la posición de Sherry y Katz,[12] sostenida también por Bair y otros,[13] según la cual los infinitesimales deben ser considerados como “objetos ideales” con derecho propio e insustituibles. Eberhard Knobloch[14] abrió una tercera línea de trabajo, no necesariamente inconsistente con las anteriores, al defender la tesis de que Leibniz introdujo la operación con cantidades infinitesimales mediante una fundamentación rigurosa que se basa, en términos generales, en nociones que anticipan la matemática epsilóntica estándar (basada, entre otras cosas, en la noción de límite). Finalmente, la clásica interpretación de Bos[15] apela al principio de continuidad para mostrar la posibilidad de eliminar, en el cálculo, las cantidades infinitesimales.

No es nuestra intención en el presente contexto proporcionar una nueva interpretación del estatus de los infinitesimales leibnizianos. Antes bien, nuestra estrategia consiste en enmarcar la concepción leibniziana de las ficciones matemáticas y, en particular, de los infinitesimales dentro de las reflexiones de Leibniz sobre la importancia del uso de los signos para el conocimiento, al tiempo que tratamos de rescatar las razones que el mismo Leibniz alegó para concebir los conceptos infinitarios en términos de “ficciones útiles”. Para ello, abordaremos el concepto de ficción matemática como noción simbólica y lo conectaremos con la cuestión de la posibilidad matemática.

3. Leibniz sobre la ficcionalidad de los infinitesimales

Usualmente, se sostiene que Leibniz asume una concepción ficcionalista de los conceptos infinitarios a partir de la controversia generada por la difusión de su método desde la pubicación de la *Nova methodus de maximis et minimis* (1684).[16] Así, esta sería la manera en que Leibniz responde a las objeciones de Nieuwentijt y a la controversia suscitada entre los defensores del nuevo método, por ejemplo, Varignon, los hermanos Bernoulli y el Marqués de l’Hopital, y sus detractores, encabezados por Rolle. Dos textos constituyen lugares clásicos de la tesis de la ficcionalidad. El primero proviene de una carta a Des Bosses del 7 de marzo de 1706:

> Filosóficamente hablando, yo no afirmo más las magnitudes infinitamente pequeñas que las infinitamente grandes, es decir: ni más las infinitésimas que las infinituples. Para resumir, tanto las unas como las otras, las considero ficciones de la mente, aptas para el cálculo, como lo son también las raíces imaginarias en Álgebra. No obstante, he demostrado que estas expresiones son de gran utilidad para pensar resumidamente y, por tanto, para la invención, y no pueden conducir al error, ya que en lugar de un

---

12 Sherry, D. & Katz, M.: “Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions”.

13 Bair, J., Błaszczyk, Ely R., Heinig, P., Katz, M.: “Leibniz’s Well-Founded Fictions and Their Interpretations”, *Matematychni Studii*, vol. 49, n° 2, 2018, pp. 186-224. DOI 10.15330/ms. 49.2.168-224. contiene una buena síntesis de la discusión actual sobre la cuestión del estatus de los infinitesimales leibnizianos.

14 Knobloch, E.: “The infinite in Leibniz’s Mathematics – The Historiographical Method of Comprehension in Context”, en K. Gavroglu, J. Christianidisand y E. Nicolaïdis (eds.), *Trends in the Historiography of Science*, Dordrecht/Boston/London Kluwer 1994, pp. 265-278; Knobloch, E.: “Leibniz’s Rigorous Foundation of Infinitesimal Geometry by Means of Riemannian Sums”, *Synthese*, vol. 133, nos. 1-2, 2000, pp. 43-57.

15 Bos, H.: “Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus”, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14, 1974, pp. 1-90.

16 Por ejemplo, Jesseph, D. M.: “Leibniz on the Foundations of the Calculus: The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes*”*, pp. 16 ss.

infinitamente pequeño se puede poner algo tan pequeño como se quiera, de manera que el error sea menor que cualquier magnitud dada, de donde se sigue que no habrá error. (GP 2, 305-306/OFC 14, 172-173).

Un argumento similar, aunque más conciso, encontramos en la carta de Leibniz a Varignon, del 14 de abril de 1702:

> Por lo demás, hace ya algunos años le había escrito al Sr. Bernoulli de Groningen que los infinitos y los infinitamente pequeños podrían considerarse como ficciones, semejantes a las raíces imaginarias, sin que ello debiera perjudicar nuestros cálculos, siendo estas ficciones cosas útiles y fundadas en la realidad. (GM 4, 98)

Estos pasajes, que enuncian de manera sintética una buena parte de las características que les hemos atribuido a las ficciones en la sección introductoria y que pueden confirmarse mediante otros textos de aproximadamente el mismo período, son representativos de lo que, según parece, es la posición madura de Leibniz, después de haber pasado por la prueba de fuego de las diversas recepciones de su método. Sin embargo, un pasaje de una carta a Bernoulli del 29 de julio de 1698 nos muestra que la tesis de la ficcionalidad formaba parte de los inicios mismos de la formulación de los métodos infinitarios. En efecto, en dicha carta Leibniz le confiesa a Bernoulli lo siguiente:

> Pero, ya entre nosotros, añado esto, que hace tiempo escribí en dicho tratado inédito, a saber, que es dudoso que se den en la realidad líneas rectas infinitas en longitud y, sin embargo, terminadas; para el cálculo, no obstante, basta con que las imaginemos, lo mismo que las raíces imaginarias en álgebra. (GM II, 524/OFC 16 A, 480)

El "tratado inédito" al que se refiere Leibniz es el *De quadratura arithmetica circulo, ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometría sine tabulis* (1676, AA VII 6, 520-676), editado y publicado en forma completa por primera vez por E. Knobloch en 1992.[17] Como ha surgido a partir de los estudios de Knobloch y posteriores, esta obra contiene un estudio sistemático de las cónicas mediante la introducción de métodos infinitesimales, aunque no del formalismo del cálculo infinitesimal. Allí podemos encontrar el siguiente comentario sobre la introducción de nociones infinitarias:

> Poco importa que tales cantidades (a saber, las infinitas e infinitamente pequeñas) sean naturales o no; nos podemos contentar con introducirlas a modo de una ficción, en la medida en que ofrecen abreviaciones para la formulación, para el pensamiento y finalmente tanto para la invención como para la demostración. (AA VII 6, 585/OFC 7 A, 166).

---

[17] Leibniz, G.W.: *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium es trignonometria sine tabulis*, kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch, Göttingen, Vandenhoedk & Ruprecht, 1992; trad. española en Leibniz, G.W.: *Obras Filosóficas y Científicas*, vol. 7A, *Escritos matemáticos*, Granada, Comares, 2014, pp. 107-241.

En otras palabras, como lo ha mostrado Arthur,[18] más de veinte años antes de la carta a Johann Bernoulli, Leibniz ya sostenía el carácter ficcional de los conceptos infinitarios, lo cual es una clara señal de que su acta de nacimiento poseía una decisiva orientación instrumental y pragmática. Mucho antes de la irrupción de la controversia acerca de la confiabilidad del cálculo infinitesimal, Leibniz expresaba un punto de vista pragmático acerca de las cantidades infinitas e infinitesimales, al mismo tiempo que manifestaba sus serias dudas de que objetos de esta clase tuvieran algún tipo de realidad, como lo muestra, en consonancia con el texto anterior, el siguiente pasaje del *Pacidius Philalethi*, de fines de 1676:

> Por mi parte, yo admitiría ciertamente estos espacios y tiempos infinitamente pequeños en geometría, a los fines de la invención, aunque fuesen imaginarios. Pero dudo de que puedan admitirse en la naturaleza. (AA VI 3, 564-565/OFC 8, 150)

Ciertamente, Leibniz no fue el primero en utilizar nociones infinitarias, ya sea que se las denomine indivisibles o "cantidades infinitamente pequeñas". Ya Cavalieri y Galileo Galilei habían apelado a la noción de "indivisible" para sus demostraciones matemáticas, mientras que Pascal, Roberval, Barrow, Wallis, Fermat y Newton[19] habían utilizado alguna versión de lo infinitamente pequeño para el tratamiento de problemas matemáticos. En síntesis, el uso de indivisibles o infinitamente pequeños estaba ampliamente extendido en la época, siendo el problema central no tanto su aplicación efectiva para la demostración y resolución de problemas matemáticos, sino la cuestión técnica del mejor modo de introducirlos y operar con ellos. A esta cuestión, de carácter más bien técnico, se le añadía el problema ontológico acerca de si tales objetos infinitesimales eran realmente existentes o si, por el contrario, tenían un estatus meramente instrumental o metodológico.

Leibniz clasifica como ficciones un buen número de nociones matemáticas. Además de las cantidades infinitamente pequeñas, suele citar también como ficciones a los números negativos, las raíces imaginarias, los números infinitos, las líneas infinitamente pequeñas o infinitamente grandes "terminadas", así como polígonos infinitángulos y focos de cónicas e intersecciones ubicados en un punto en el infinito. Sin embargo, a pesar de reconocer su carácter ficcional, los admite por su utilidad y eficacia en la invención y demostración matemática, como lo muestran los pasajes de la correspondencia con Varignon, Des Bosses y Johannes Bernoulli que hemos citado.

4. Conocimiento simbólico, cognición simbólica y ficciones

Como lo anticipamos, abordaremos la cuestión de las ficciones matemáticas a partir de las concepciones leibnizianas acerca del conocimiento simbólico, tomando como punto de partida las reflexiones al respecto expuestas en *Meditationes de cognitione, veritatis et ideis (MCVI)*, de 1684 (AA VI 4, 585-492). Como se sabe, en

[18] Arthur, R.: "Actual Infinitesimals in Leibniz's Early Thought", en M. Kulstad, M. Laerke y D. Snyder (eds.), *The Philosophy of the Young Leibniz*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag,2009, pp. 11-28.

[19] Ver Jullien, Vincent (ed.): *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Cham-Heidelberg-New York-Dordrecht-London, Birkhäuser, 2015, para estudios actualizados de los diversos métodos infinitesimales utilizados por los autores referidos.

ese breve pero central trabajo, Leibniz expone paradigmáticamente la clasificación de conocimientos o nociones, dentro de las cuales se encuentra la noción confusa, que es el tipo que nos interesa en el presente contexto. Así, Leibniz distingue en primer lugar entre la noción clara y la oscura; a su vez, dentro de la noción clara, establece una división entre las nociones confusas y distintas, al tiempo que estas últimas se dividen en adecuadas e inadecuadas. Esta última división se conecta, finalmente, con la distinción entre nociones intuitivas y simbólicas. No analizaremos en el presente contexto el carácter problemático de esta clasificación, que sólo en la superficie parece seguir un método de división dicotómica.[20] En todo caso, vale la pena tener en cuenta que la noción simbólica se caracteriza por ser un signo de carácter sensible que sustituye, de una u otra manera, la captación de una idea en sí misma, ya sea sensible o intelectual. La noción simbólica puede caracterizarse como una representación o pensamiento que, refiriéndose a algún objeto, posee un soporte material perceptible, es decir, tiene características semióticas. El rasgo fundamental de la noción simbólica consiste en que, en cuanto cognición (o acto de cognición), o bien acompaña, como sustrato sensible, a un acto de captación de un concepto simple, o bien sustituye de manera global un conjunto de nociones no analizadas o "confusas". Especialmente en el lenguaje verbal, la noción simbólica va acompañada de una comprensión vaga o global, en la que no se discrimina la estructura nocional del concepto compuesto. Por esa razón, la noción simbólica recibe la denominación de "noción ciega" o "pensamiento ciego", puesto que se trata de un pensamiento que sustituye la consideración de nociones o conceptos más simples, que permanecen sin analizar y por eso son concebidos "confusamente".

Para comprender de manera adecuada la ficción como un cierto tipo de noción simbólica, debemos apelar a la distinción entre nociones o conceptos, por un lado, e ideas por el otro,[21] distinción que Leibniz introduce en la década de 1680.[22] Así, la idea es una facultad que se actualiza en nociones o conceptos. De esta manera, podemos tener ideas de las cosas, sin tener que pensar en ellas constantemente. En consecuencia, toda idea *se expresa*, en el sentido leibniziano del término, en nociones. Por otra parte, no vale la inversa; en otras palabras, no se da que haya una idea para toda noción actual. En efecto, puede haber nociones sin ideas y, en ese caso, se trata de nociones "falsas", como, por ejemplo, cuando la noción que pensamos implica una contradicción, según el clásico ejemplo invocado por Leibniz de la velocidad máxima. De este modo, propondremos la tesis de que las ficciones matemáticas pertenecen a la clase de nociones simbólicas "vacías" o "falsas", es decir, es decir, carentes ideas. Si hacemos coincidir la idea con la "referencia inmediata" de la noción, podríamos decir también que una ficción es una noción que carece de denotación.

Sobre esta base, caracterizaremos la ficción como una noción ciega o simbólica, cognitivamente confusa, tal que si se la analiza distintamente resulta vacía o sin denotación, ya sea porque la idea correspondiente es imposible ("falsa" o

20 Para una revisión de este modo de entender la división, ver Esquisabel, O.M.: "Representing and Abstracting. An Analysis of Leibniz's Concept of Symbolic Knowledge", pp. 5-7.

21 Cfr. Poser, H.: "Signum, Notio und Idea. Elemente der Leibnizschen Zeichentheorie", *Semiotik,* vol. 1, 1979, pp. 309-324; Poser, H.: *Leibniz' Philosophie.* Über *die Einheit von Metaphysik und Wissenschaft*, herausgegeben von Wenchao Li, Hamburg, Felix Meiner, 2016, pp. 90-92.

22 Cfr. *Quid sit idea* AA VI 4 1370 y *Discurso de metafísica*, AA VI 4 1572. Otros textos. AA VI 4, 591; AA VI 6, 12 y 109.

"inexistente"), ya sea porque el objeto que corresponde a la noción no ha existido, no existe ni existirá fácticamente. Por esa razón, se impone distinguir dos tipos de ficción: la "ideal", que viola el principio de contradicción (por ejemplo, la noción de un cuadrado redondo), y la "fáctica", que se refiere a objetos inexistentes en la realidad actual, como es el caso de las narraciones novelescas. Por el momento, esta distinción será suficiente, aunque como veremos más adelante, en un análisis más sutil del concepto de imposibilidad, deberemos introducir matizaciones en el concepto de ficción "ideal".[23]

Ahora bien, si la ficción es una noción carente de idea y, por tanto, falsa, es posible, sin embargo, detectar dos casos posibles de falsedad o de "carencia de denotación". El primero corresponde a la imposibilidad en sentido estricto, que resulta de la inconsistencia o autocontradicción, la segunda a la inexistencia fáctica. Así se presenta la ficción en *De ente, existente, aliquo, nihilo et similibus*:

> La ficción es el pensamiento de una cosa imposible, como el movimiento más veloz; en ocasiones también se lo considera como el concepto de una cosa que nunca existió, como es el caso de la *Argenis*. (AA VI 4, 570).

Como veremos luego, la distinción que establece Leibniz aquí entre dos tipos de ficción es fundamental para distinguir los tipos de ficción matemática. En este caso, las ficciones "fácticas" consisten en nociones de objetos que nunca existieron, como es el caso de la *Argenis*, de Barclay. No obstante, este tipo de ficciones no excluye la posibilidad de que existan en algún futuro, dado que en sí mismas no implican contradicción, como es el caso de las primeras. Por esa razón, aunque no tengan una existencia fáctica, no hay impedimento alguno para que se den en un mundo posible no actualizado.

Finalmente, la ficción implica una cierta confusión o falta de distinción. Como indicamos un poco antes, la noción o concepto confuso se encuentra estrechamente ligado al de pensamiento ciego o simbólico. En efecto, nuestras limitaciones cognitivas imponen restricciones a las operaciones con nociones compuestas, como lo son la mayor parte de los conceptos que aplicamos en nuestras cogniciones.[24] En conclusión, la ficción es una noción simbólica confusa, carente de denotación o idea y, por tanto, falsa. De acuerdo con lo que hemos examinado hasta el momento, su falsedad puede probarse o bien mediante un análisis que muestra la inconsistencia de la noción, es decir, su imposibilidad, o bien de manera fáctica, mostrando que el objeto denotado no existe.

Parecería, entonces, que hay dos tipos de ficciones, las inconsistentes y las "fácticas". Sin embargo, nuestro examen de las ficciones matemáticas mostrará que Leibniz reconoció, de una manera más o menos constante, una tercera posibilidad: las ficciones que, sin ser inconsistentes, son también imposibles por violar principios arquitectónicos. Según nuestra interpretación, las cantidades infinitesimales son ficciones más bien de este tercer tipo, antes que del primero.

---

23 Cfr. *Acervus Chrysippi*, A VI 4, 69-70

24 AA VI 4, 388; AA VI 4, 586; AA VI 6, 261.

5. Las ficciones matemáticas y la imposibilidad

Se impone ahora la necesidad de precisar la noción de ficción matemática, en lo que respecta a la cuestión de la existencia o inexistencia de los correspondientes objetos. En efecto, podríamos decir que las entidades matemáticas son objetos del "pensamiento", nocionales, de manera que en cuanto tales no pueden encontrarse ni en la realidad fáctica ni poseen una existencia en sí, independientes de todo pensar o concebir. [25]

Ahora bien, una concepción semejante, que Leibniz sostiene enfáticamente en su pensamiento maduro, nos plantea el problema de si, en ese caso, el concepto de ficción no podría aplicarse al dominio entero de lo matemático. Se trata, pues, de responder a la cuestión de la existencia de lo matemático. En relación con este punto, la respuesta leibniziana a este problema parece clara: en matemática, el criterio de existencia es la posibilidad. Dicho de otro modo, un objeto matemático es admisible en la medida en que es posible y, por tanto, consistente. En otras palabras, para que un objeto matemático exista, sólo basta probar que de su concepto no se sigue una contradicción. Naturalmente, esta existencia no puede ser asimilada a la manera en que existen los objetos físicos, sino que presenta un carácter nocional, en el sentido de una existencia-en-idea o lisa y llanamente, "ideal". En conclusión, el existir o el ser de lo matemático se identifica con su ser posible, es decir, el ser pensable sin contradicción. De esta forma, en el dominio de lo matemático, la diferencia entre una noción "real" y una ficción, en matemática depende de poder dar una prueba de consistencia de la correspondiente noción. De ello parece seguirse que las ficciones matemáticas son nociones de objetos imposibles y por tanto, autocontradictorios.

Sin embargo, el examen de los argumentos que despliega Leibniz acerca de la ficcionalidad de los objetos infinitarios nos devela una actitud más prudente. Por ejemplo, a diferencia del carácter abiertamente autocontradictorio del número infinito, los argumentos que rechazan los objetos infinitarios tales como las líneas infinitas terminadas o las cantidades infinitamente pequeñas suelen ser más matizados, en el sentido de que no apuntan a la contradicción, sino que concluyen propiedades paradójicas o inadmisibles, que hacen que su existencia sea al menos "improbable".

En la siguiente sección, trataremos de mostrar que Leibniz admite diferentes conceptos de imposibilidad, desde el más riguroso, basado en la inconsistencia, hasta otros más laxos, en los que interviene más bien la incompatibilidad con principios de orden o racionalidad. Estas diferentes formas de imposibilidad obligan a reconocer, también, diferentes formas de ficcionalidad de lo matemático, que van desde el rechazo categórico de los objetos correspondientes hasta formas más estrictas, basadas en la improbabilidad de su existencia en un mundo racionalmente organizado.

6. Tres conceptos de posibilidad e imposibilidad matemática

En consonancia con las consideraciones anteriores, sostenemos que en las reflexiones de Leibniz sobre la naturaleza de los objetos matemáticos pueden

---

[25] Leibniz parece haber desarrollado esta concepción de lo matemático como algo "ideal" a fines de la época de Paris y especialmente en la década de 1680. Cfr. AA II 2, 75; AA VI 4 991; GP 4, 490, 561; GP 2, 225/OFC 16B, 1164, *inter alia*. Para la cuestión de los inicios de la concepción "ideal" de las entidades matemáticas, Esquisabel, O.M. y Raffo Quintana, F.: "Infinitos y filosofía natural en Leibniz (1672-1676)", *Anales del Seminario de Historia de la Filosofía*, 2020, pp. 425-435, on-line DOI 10.5209/ashf.68281

distinguirse tres conceptos de posibilidad y, correlativamente, de imposibilidad, a saber, la posibilidad/imposibilidad absoluta, como consistencia/inconsistencia, la posibilidad/ imposibilidad (relativa) como representabilidad/irrepresentabilidad matemática y la posibilidad/imposibilidad (relativa) como compatibilidad/ incompatibilidad con principios arquitectónicos del orden del mundo, como, por ejemplo, el principio de razón suficiente y el principio del orden.

Del primer caso de posibilidad/imposibilidad hemos hablado en nuestras anteriores explicaciones. En efecto, la posibilidad absoluta está dada por la ausencia de contradicción. Dicho de otro modo, posible es aquello cuya noción no encierra una inconsistencia. De este modo, son posibles el número dos y el círculo, para dar un ejemplo. Correlativamente, la imposibilidad está dada por la autocontradicción o inconsistencia conceptual, tal como ocurre con la noción de 'círculo cuadrado' o 'el número de todos los números'.

No obstante, Leibniz reconoce otras formas de posibilidad/imposibilidad. Una segunda clase del par de nociones modales está dada por la posibilidad de proporcionar a un concepto matemático alguna clase de instanciación o representación geométrica en sentido propio (no analógica). En ese caso, es posible lo geométricamente representable, tal como lo son las magnitudes finitas o las raíces "reales" de una ecuación, mientras que lo imposible es lo geométricamente irrepresentable, a saber, las raíces imaginarias y las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes terminadas.

Finalmente, una serie de reflexiones indican que Leibniz concibió un tercer tipo de posibilidad/imposibilidad, a saber: aquella que surge de la compatibilidad o incompatibilidad con los principios arquitectónicos o de racionalidad que gobiernan la constitución del mundo, tales como el principio de orden y el principio de razón suficiente. En ese caso, lo posible es lo que se adecua y es compatible con dichos principios arquitectónicos. Así, por ejemplo, la continuidad matemática, las magnitudes indefinidas (no terminadas) y la infinitud potencial cumplen con los requisitos de la razón suficiente y la ley de orden (que puede ser entendida como una versión más general del principio de continuidad), por lo que son "cosmológicamente" posibles, es decir, admisibles dentro del orden *estructural o formal* de un mundo racionalmente organizado. Por su parte, son imposibles aquellas nociones de objetos que violan o son incompatibles con esos mismos principios de organización del mundo. Es el caso de los conceptos infinitarios tales como las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes terminadas. En efecto, la admisión de estos objetos como condiciones estructurales de un mundo existente constituye, como veremos, una violación del principio de razón suficiente.[26]

La distinción entre posibilidad/imposibilidad como consistencia/inconsistencia y posibilidad/imposibilidad como representabilidad/irrepresentabilidad aparece en varios textos leibnizianos de juventud y también de la década de 1680. En efecto, retomando una distinción de un escrito de juventud,[27] en *De libertate et necessitate*, un

---

[26] Para la aplicación de principios arquitectónicos en la filosofía leibniziana, especialmente en la construcción de su dinámica, cfr. Duchesnau, F.: *Leibniz et la méthode de la science*, Paris, PUF, 1993 ,cap. 4; Duchesnau, F.: *La dynamique de Leibniz*, Paris, Vrin, 1994 y Duchesnau, F.: "Le recours aux príncipes architectoniques dans la Dynamica de Leibniz", *Revue d'Histoire des Sciences*, 72, 1, 2019, pp. 39-62. Sobre los principios de razón suficiente y de continuidad, ver Nicolás, J.A.: "Razón, verdad y libertad en Leibniz", Granada, Universidad de Granada, 1993 y Luna Alcoba, J.: *La ley de continuidad*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 1996.

[27] *De mente, de universo, de Deo* (1675), AA VI 3, 463-464.

texto datado entre 1680 y 1684, Leibniz distingue entre la posibilidad de esencia, que corresponde a lo que puede entenderse distintamente, y la imposibilidad de existencia. Para ilustrar la distinción, recurre a la analogía con una ecuación contradictoria, que se correlaciona con la imposibilidad de esencia, y con los números imaginarios, para la imposibilidad de existencia. Las raíces imaginarias, como la raíz cuadrada de -1, no pueden exhibirse geométricamente o más bien representan una situación geométrica absurda (A VI 4, 1447-1448). Mientras que en el escrito mencionado se introduce la distinción a modo de una analogía para ilustrar con ejemplos la diferencia entre la imposibilidad de esencia y la imposibilidad de existencia, la discriminación adquiere relevancia matemática en un texto de 1683, titulado *Elementa nova matheseos universalis*, en el que Leibniz aplica expresamente a los conceptos matemáticos la diferencia entre la imposibilidad absoluta y la imposibilidad por accidente. La importancia del texto justifica su cita completa:

> Hay una gran diferencia entre las cantidades imaginarias o imposibles por accidente y las absolutamente imposibles, que envuelven contradicción, como cuando se encuentra que para resolver el problema es necesario que 3 sea igual a 4, cosa que es absurda. Las cantidades imaginarias, empero, es decir, imposibles por accidente, a saber, aquellas que no pueden exhibirse a causa de una falta de constitución suficiente, necesaria para la intersección, pueden comparase con las cantidades infinitas o infinitamente pequeñas, que surgen del mismo modo. (A VI 4, 521)

En este caso, las cantidades imaginarias son, nuevamente, las raíces cuadradas de números negativos, que, geométricamente interpretadas, representan una intersección que no se da entre una recta y un círculo. Aunque la distinción entre imposibilidad absoluta e imposibilidad de accidente se basa en prácticamente los mismos ejemplos que en *De libertate et necessitate*, es central para nuestro enfoque que el contexto de aplicación sea estrictamente matemático. La misma importancia tiene la inclusión de los conceptos infinitarios, tales como las cantidades infinitamente pequeñas o las infinitamente grandes, dentro de la clase de las nociones imposibles por accidente. En ese caso, los ejemplos de Leibniz son el ángulo recto entendido como un ángulo que tiene una diferencia infinitesimal con la perpendicular y las rectas paralelas con un punto de intersección ubicado en el infinito. Además, añade que, a pesar de que para el inexperto en matemática estas ficciones parezcan conducir a conclusiones absurdas, no sólo son productivas para el cálculo, sino que también, en su práctica, nos vemos conducidos necesariamente a ellas (AA VI 4, 521).

También la imposibilidad como incompatibilidad con principios arquitectónicos aparece más de una vez a través de las distintas épocas del pensamiento de Leibniz.[28] Así, en *De libertate et necessitate,* Leibniz aplica este concepto a un ejemplo matemático, retomando la distinción entre posibilidad de esencia y posibilidad de existencia e ilustrándola de la manera siguiente:

> Por ejemplo, aunque imaginásemos que en la naturaleza no ha existido ni existirá jamás ningún pentágono exacto, no obstante el pentágono seguiría siendo posible. Sin embargo, debe darse una razón de por qué el pentágono no ha existido o no habrá de existir jamás. De esta situación no hay otra razón más que el hecho de que el pentágono

---

[28] AA VI 3, 464-465.

> es incompatible con otras cosas que incluyen una mayor perfección, es decir, tales que envuelven más realidad, de manera que existirán con toda certeza en lugar de aquél. Ahora bien, si se infiere que por eso es necesario que ese mismo pentágono no exista, concedo la conclusión, si su sentido es el de que la proposición "el pentágono no existirá ni ha existido" es necesaria, pero es falsa, si su sentido es el de que la proposición "ningún pentágono existe" (que hace abstracción del tiempo) es necesaria. En efecto, niego que esta proposición pueda demostrarse, pues el pentágono no es absolutamente imposible y no implica contradicción, aunque de la armonía de las cosas se siga que el mismo no pueda encontrar un lugar en las cosas. (AA VI 4, 1447-1448. Las cursivas son mías).

El punto que nos interesa destacar es que el argumento de Leibniz se encamina a exhibir la distancia que existe entre la posibilidad "pura" o "absoluta" y la posibilidad real, relativa a la existencia de la serie de cosas más perfecta y armónica. No obstante, la exigencia de compatibilidad, armonía y orden es, generalmente, el argumento que esgrime Leibniz contra la existencia real de los objetos infinitarios. Así, por ejemplo, en el diálogo *Pacidius Philalethi*, Leibniz expone al menos dos veces su rechazo de objetos infinitarios, basándose en el principio de razón suficiente. En efecto, el examen de la naturaleza del movimiento introduce la consideración de líneas y tiempos infinitamente pequeños, precisamente en conexión con la posibilidad de retomar la explicación del cambio de lugar mediante saltos a través de espacios y tiempos infinitamente pequeños. El desarrollo de esta hipótesis implicaría la existencia de espacios y tiempos infinitamente pequeños (AA VI 3 564). Al respecto, la respuesta de Pacidio, el *alias* de Leibniz en el diálogo, es un categórico rechazo de esta posibilidad:[29]

> Yo sin duda admitiría estos espacios y tiempos infinitamente pequeños en Geometría, a los fines de la invención, aunque fueran imaginarios. Pero me pregunto si acaso pueden ser admitidos en la naturaleza. En efecto, de allí parecen originarse líneas rectas infinitas terminadas por ambos lados, como mostraré en otra parte, cosa que es absurda. Además, ya que pueden asumirse al infinito otras cosas infinitamente pequeñas aún menores que otras, nuevamente no puede ofrecerse una razón de por qué se asumen unas más que otras, pues nada sucede sin razón (AA VI 3, 564-565).

La conclusión de Leibniz añade una consideración adicional al rechazo de las cantidades infinitesimales debido a la transgresión del principio de razón suficiente. En concordancia con el argumento que hemos sintetizado párrafos antes, la admisión de cantidades infinitamente pequeñas equivaldría nuevamente a violar la uniformidad de la naturaleza, porque tendríamos que admitir la existencia de cantidades menores que cualesquiera otras y no habría razón para ello, además de que resultan consecuencias absurdas o "incongruentes". Por otra parte, estas razones para denegar existencia real a esta clase de ficciones matemáticas no son circunstanciales o momentáneas. En efecto, en la discusión con Johann Bernoulli acerca de la realidad de los infinitesimales, Leibniz vuelve a la carga en su carta del 7/17 de junio de 1698 contra la existencia real de infinitesimales, apelando al mismo argumento: la existencia de cantidades infinitamente pequeñas implicaría la admisión de líneas infinitas terminadas, lo cual conlleva consecuencias absurdas, tales como

[29] Raffo Quintana, F., *Ibíd*., p. 81.

la existencia de un tiempo terminado, es decir, dotado de extremos, aunque infinito[30]

Buena parte de los argumentos que sustentan estas consecuencias paradójicas, un límite al cual no puede llegarse en un tiempo finito, una eternidad con extremos, una vida infinita pero igualmente mortal, pueden encontrarse en escritos que se retrotraen al período de París y que pertenecen, según los editores de la edición de la Academia, al ciclo de *De summa rerum*.[31] Aunque el examen de los argumentos que esgrime Leibniz en esos escritos exceden los límites del presente trabajo,[32] son estas consecuencias absurdas, si bien no contradictorias en sentido estricto, lo que motiva que Leibniz rechace la existencia real de los objetos infinitarios y sostenga su imposibilidad en términos de incompatibilidad con la naturaleza de un mundo ordenado y armónico.[33] En su respuesta a Bernoulli, Leibniz es prudente en lo relativo a la existencia de los infinitesimales: sólo afirma la presunción de su imposibilidad, hasta que se demuestre lo contrario, en cuyo caso estaría dispuesto a admitir su existencia; desde este punto de vista, parece lejos de aceptar que las nociones infinitarias son autocontradictorias.

7. El concepto de ficción matemática reconsiderado

Llegados a este punto de nuestro examen, trataremos de reunir las líneas argumentales que hemos seguido hasta aquí, para conectarlas con las consideraciones iniciales que hemos propuesto para la noción de ficción matemática. Así, al concepto de imposibilidad absoluta, fundada en la inconsistencia le corresponde la *ficción*$_1$, que delimita la clase de las nociones matemáticas inconsistentes, como lo es el concepto de "número de todos los números", que mencionamos en reiteradas ocasiones. A su vez, el concepto de imposibilidad por irrepresentabilidad se corresponde con la *ficción*$_2$, que agrupa las nociones matemáticas que no pueden instanciarse o exhibirse geométricamente, tales como las raíces imaginarias, los extremos de rectas infinitas, los puntos en común de rectas paralelas entre sí y las cantidades infinitamente pequeñas. Finalmente, el tercer tipo de ficción, *la ficción*$_3$, resulta del concepto de imposibilidad por incompatibilidad con principios arquitectónicos, y se aplica fundamentalmente a los conceptos "infinitarios". En relación con la ficción$_3$, finalmente, habría que añadir que las ficciones infinitarias son de tipo "presuntivo", en el sentido de que sus objetos se consideran imposibles hasta que no se demuestre su posibilidad.

Como hemos adelantado al comienzo de nuestras indagaciones, Leibniz aplica en la matemática, de una manera u otra, las tres clases de ficciones, ya sea que se trate de todos infinitos (el caso de las series infinitas), las raíces imaginarias o los objetos infinitarios. Desde el punto de vista del conocimiento simbólico, la introducción de ficciones puede tener lugar mediante el discurso verbal o escrito, es decir, utilizando términos del lenguaje común cuyo significados pueden ser aclarados, en el mejor de los casos, mediante una definición meramente nominal, tal como "el número infinito es el número de todos los números" o "una cantidad infinitamente pequeña es una

30 GM III, 499-500/OFC 16 A, 449

31 Por ejemplo, *De infinito observatio notabilis* AA VI 3 481 (SI 37)

32 Cfr. Esquisabel, O. M. y Raffo Quintana, F.: "Infinitos y filosofía natural en Leibniz (1672-1676)".

33 GM II, 551/OFC 16 A, 512).

cantidad menor que cualquier cantidad asignable”, etc. Otra forma de representar una ficción matemática apela a un elemento simbólico integrable y manipulable en el contexto de una fórmula, como ocurre con la notación diferencial en el cálculo infinitesimal. De acuerdo con lo que hemos propuesto, Leibniz considera que las ficciones infinitarias son tanto del tipo 2 como del tipo 3, es decir, son irrepresentables en sentido propio y también incompatibles con principios arquitectónicos. Dicho de otro modo, a diferencia del número infinito o el número de todos los números, los conceptos infinitarios no implican para Leibniz contradicción alguna, aunque pueden implicar consecuencias paradójicas, como las que ya mencionamos.

En cualquier caso, en la inclusión de las nociones infinitarias en las ficciones$_2$ y ficciones$_3$, hay una cuestión que requiere aclaración. En efecto, si las cantidades infinitarias son ficciones tanto del tipo 2 como del tipo 3, surge naturalmente la pregunta: ¿cuál es la razón de que Leibniz rechace desde dos puntos de vista distintos la existencia de este tipo de objetos, cuando en realidad podría bastar con un solo tipo imposibilidad, ya sea la segunda o la tercera? La respuesta a esta pregunta exigiría probablemente un análisis que excedería el marco de este trabajo, por lo que nos limitaremos a dar solamente sus lineamientos generales.

Si prestamos atención al desarrollo del problema de la ficcionalidad de los objetos infinitarios a través de las diversas fases de la filosofía leibniziana, vemos que predominan los argumentos basados en la incompatibilidad con principios arquitectónicos. Esta insistencia parece indicar que la preocupación leibniziana respecto de la ficcionalidad de las entidades infinitarias se vincula preponderantemente con el problema de la existencia real de tales cantidades y no tanto con el de su existencia matemática. Al respecto, la progresiva separación que instaura Leibniz entre el ámbito de lo matemático, que se restringe a la existencia ideal, y el dominio de la existencia actual de las entidades completas y concretas, está acompañada por la distinción entre la infinitud potencial para el dominio de lo matemático y la infinitud actual, que afecta a la realidad actual.[34] Desde esta perspectiva, es natural que el problema de la existencia de los objetos infinitarios se desplace al ámbito de lo real actual, puesto que en el ámbito de lo matemático deja de ser un problema, ya que en ese dominio la infinita divisibilidad del continuo geométrico hace innecesaria la discusión acerca de la existencia matemática de las cantidades infinitamente pequeñas: son ficciones matemáticas que pueden sustituirse mediante otros métodos. En cambio, la división actual infinita de los cuerpos materiales plantea la necesidad de abordar seriamente la cuestión de la existencia de cantidades infinitamente pequeñas, ya que está en juego la composición del continuo real.

8. Conclusión

A lo largo de nuestra exposición hemos tratado de mostrar que, cuando Leibniz introduce ficciones matemáticas u objetos matemáticos ficcionales, recurre en realidad a nociones cognitivamente confusas carentes de denotación, cuyo uso se valida, entre otras cosas, por la eficiencia a la hora proporcionar la resolución de problemas matemáticos. Si esta resolución es también demostrativa, es una cuestión que dejaremos pendiente, porque implica examinar con más precisión en

[34] GM 4, 93; GP 2, 268-69/OFC 16B 1, 222-1224; GP 2, 314/OFC 14, 186.

qué consiste para Leibniz una demostración matemática. Del mismo modo, quedará para otro trabajo la cuestión de los métodos que emplea Leibniz para introducir en la matemática de manera eficaz esta clase de nociones confusas. En cualquier caso, las ficciones matemáticas constituyen un capítulo del concepto leibniziano de conocimiento simbólico.

Sea de ello lo que fuere, la introducción de ficciones en la matemática plantea un problema en relación con los objetos matemáticos en general, puesto que Leibniz les proporciona a estos últimos un estatus puramente "ideal" o "abstracto", especialmente en su pensamiento de madurez. Por esa razón, nos vimos obligados a retomar la diferencia entre noción o concepto, por un lado, e idea por el otro, con el fin de mostrar que las ficciones son nociones "sin idea" y, por tanto, sin denotación. La imposibilidad resultó ser, justamente, el criterio de la carencia de denotación y, por eso mismo, la marca de la inexistencia matemática. Asimismo, nuestro examen mostró que Leibniz sostiene tres conceptos de imposibilidad, que dan lugar también a tres conceptos de ficción, a saber, la ficción$_1$ en términos de inconsistencia, la ficción$_2$ en términos de irrepresentabilidad y la ficción$_3$ en términos de incompatibiliadad con principios arquitectónicos.

En conclusión, nuestras reflexiones finales se dirigen a un problema complejo y vigente quizás más allá de Leibniz, a saber, ¿qué significa para Leibniz que un objeto matemático existe? Según lo que hemos venido planteando, la mera consistencia es una condición necesaria, pero, según parece, no es suficiente, especialmente cuando pensamos lo matemático en términos de lo que constituye algo así como el trasfondo estructural o "formal" de lo real, sobre la base del cual se hace posible la ciencia matemática de la naturaleza.

9. Referencias bibliográficas

Arthur, R.: "Actual Infinitesimals in Leibniz's Early Thought", en M. Kulstad, M. Laerke y D. Snyder (eds.), *The Philosophy of the Young Leibniz*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2009, pp. 11-28.

Arthur, R.: "Leibniz's syncategorematic infinitesimals", *Arch. Hist. Exact. Sci.,* 67, 2013, pp. 553-593. DOI 10.1007/s00407-013-0119-z.

Arthur, R.: "Leibniz's Syncategorematic Actual Infinite", en O. Nachtomy y R. Winegar (eds.), *Infinity in Early Modern Philosophy*, Cham, Springer, 2015, pp. 155-179. DOI 10.1007/978-3-319-94556-9_10

Bair, J., Błaszczyk, Ely R., Heinig, P., Katz, M.: "Leibniz's Well-Founded Fictions and Their Interpretations", *Matematychni Studii*, vol. 49, n° 2, 2018, pp. 186-224. DOI 10.15330/ms. 49.2.168-224.

Bos, H.: "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14, 1974, pp. 1-90.

Duchesnau, F.: *Leibniz et la méthode de la science*, Paris, PUF, 1993.

Duchesnau, F.: *La dynamique de Leibniz*, Paris, Vrin, 1994.

Duchesnau, F.: "Le recours aux príncipes architectoniques dans la Dynamica de Leibniz", *Revue d'Histoire des Sciences*, 72, 1, 2019, pp. 39-62.

Esquisabel, O.M. : «Representing and Abstracting. An Analysis of Leibniz'Concept of Symbolic Knowledge », en A. Lassalle Casanave, *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*, London, College Publications, 2012, pp. 1-49.

Esquisabel, O.M. y Raffo Quintana, F. : « Infinitos y filosofía natural en Leibniz (1672-1676) », *Anales del Seminario de Historia de la Filosofía,* 37, 3, 2020, pp. 425-435, on-line DOI 10.5209/ashf.68281.

Herrera Castillo, L. E.: "Dimensionen des Leibniz'schen Expressionsbegriffs. Ein interpretativer Dialog mit E. Cassirer, D. Mahnke und G. Deleuze", en Herrera Castillo, L. E. (ed.), Äusserungen *des Inneren. Beiträge zur Problemgeschichte des Ausdrucks*, Berlin-Boston, Walter de Gruyter, pp. 133-154.

Ishiguro, H.: *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990 (2a ed.)

Jesseph, D. M.: "Leibniz on the Foundations of the Calculus: The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes*", Perspectives on Science*, vol. 6, 1998, pp. 6-38.

Jullien, Vincent (ed.).: *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Cham-Heidelberg-New York-Dordrecth-London, Birkhäuser, 2015.

Knobloch, E.: "Les courbes analytiques simples chez Leibniz", *Sciences et techniques en perspective*, vol. 6, 1993, pp. 74-96.

Knobloch, E.: "The infinite in Leibniz's Mathematics – The Historiographical Method of Comprehension in Context", en K. Gavroglu, J. Christianidisand y E. Nicolaïdis (eds.), *Trends in the Historiography of Science*, Dordrecht/Boston/London Kluwer 1994, pp. 265-278.

Knobloch, E.: "Leibniz's Rigorous Foundation of Infinitesimal Geometry by Means of Riemannian Sums", *Synthese*, vol. 133, nos. 1-2, 2000, pp. 43-57.

Leibniz, G.W. (AA): *Sämtliche Schriften und Briefe, editada por la Deutschen Akademie der Wissenschaften,* Darmstadt, 1923; Leipzig, 1938; Berlin, 1950 y prosigue.

Leibniz, G.W. (GM): *Mathematische Schriften*, ed. por C.I. Gerhardt, 7 vols., Berlin-Londres 1849-1863.

Leibniz, G.W. (GP*): Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, editados por C. I. Gerhardt, 7 vols., Berlin, 1875-1890.

Leibniz, G.W. (HOCD): *Historia et origo calculi differentialis*, editado por C. I. Gerhardt, Hannover, Hahn, 1846.

Leibniz, G.W.: *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium es trignonometria sine tabulis*, kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch, Göttingen, Vandenhoedk & Ruprecht, 1992.

Leibniz, G.W.: *Quadrature airthmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométriques qui en est le corollaire*, introduction, traduction et notes de Marc Parmentier, texte latin édité par Eberhard Knobloch, Paris, Vrin, 2004.

Leibniz, G.W.: *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium es trignonometria sine tabulis*, herausgegeben und mit einem Nachwort versehen von Eberhard Knobloch, aus dem Lateinisch übersetzt von Otto Hamborg, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2016.

Leibniz, G.W.: (OFC) *Obras Filosóficas y Científicas. 7A Escritos matemáticos*, editora responsable del volumen Mary Sol de Mora Charles, editada por la Sociedad Española Leibniz, Granada, Comares 2014.

Luna Alcoba, J.: *La ley de continuidad*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 1996.

Mancosu, P.: *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century,* New York-Oxford, Oxford University Press, 1996.

Nicolás, J.A.: *Razón, verdad y libertad en Leibniz*, Granada, Universidad de Granada, 1993.

Poser, H.: "Signum, Notio und Idea. Elemente der Leibnizschen Zeichentheorie", *Semiotik,* vol. 1, 1979, pp. 309-324.

Poser, H.: *Leibniz' Philosophie.* Über *die Einheit von Metaphysik und Wissenschaft*, herausgegeben von Wenchao Li, Hamburg, Felix Meiner, 2016.

Raffo Quintana, F.: "Sobre compendios y ficciones en el pensamiento juvenil de Leibniz", *Revista Latinoamericana de Filosofía*, 46, pp. 131-150. on-line DOI: 10.36446/rlf2020203

Sherry, D. & Katz, M.: "Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions", *Studia Leibnitiana*, Vol. 44, 2012, pp. 166-192.