La ley física de Ibn Sahl:estudio y traducción parcial de su *Kitāb al-ḥarraqāt*

The Physics Law of Ibn Sahl: study and partial translation of his *Kitāb al-ḥarraqāt*

Sara CERANTOLA
Universidad Ca' Foscari de Venecia
Departamento de estudios euroasiáticos (Dipartimento di studi eurasiatici)

RESUMEN
El manuscrito del *Kitāb al-Ḥarraqāt* (El libro sobre los instrumentos incendiarios) de Ibn Sahl, matemático y físico de la corte de Bagdad del siglo X, fue encontrado y estudiado por Roshdi Rashed. Este tratado de óptica geométrica demuestra que la ley de la refracción de la luz había sido descubierta seis siglos antes de Snell, del que actualmente lleva el nombre.

PALABRAS CLAVE: Óptica geométrica. Historia de la Ciencia Árabe. Ibn Sahl. Ley de Snell-Snellius. Espejo Ustorio. Lente. Refracción.

ABSTRACT
The manuscript of *Kitāb al-Ḥarraqāt* (The Book about Burning Instruments) by Ibn Sahl, a mathematician and physicist of the Baghdad court in the 10th century, was founded and studied by Roshdi Rashed. This geometric optics' treatise shows that the law of refraction was discovered six centuries before Snell, who gives the law its name.

KEY WORDS: Geometric optics. History of Arabic science. Ibn Sahl. Snell's law. Burning mirror. Lens. Refraction.

1. CONTEXTO HISTÓRICO Y CIENTÍFICO

1.1 EL ESTADO ACTUAL DE LA CUESTIÓN

·SNELL Y DESCARTES

El descubrimiento de la ley de los senos se atribuye habitualmente a Willebrord van Roijen Snell[1], o Snellius (Leiden, 1580 - 1626), físico holandés del siglo XVII. Snell estudió derecho en la universidad de Leiden, pero sus intereses se concentraban especialmente en las matemáticas. Viajó mucho por Europa, ocupándose sobre todo de problemas de astronomía, mientras su vocación para las matemáticas se desarrollaba cada vez más: llegó a la cátedra de la universidad de Leiden — sustituyendo al padre — y sacó muchas conclusiones interesantes sobre la medición de la Tierra[2]; de hecho, se considera el fundador de la geodesia moderna, después de que Eratóstenes[3] abriera el camino en la antigüedad. También se ocupó del cálculo del "número pi" (π) mediante polígonos y del estudio de la luz.

En lo que respecta a la refracción, su investigación continuó desde donde se había estancado cuatro siglos antes con Ibn al-Hayṯam en su *Kitāb al-manāẓir*[4] — que en Europa se conocía como "Thesaurus opticus" de Alhacén — y sus discípulos medievales Teodorico de Friburgo[5] (también conocido por su nombre en alemán Dietrich von Freiburg, o en latín Theodoricus Teutonicus de Vriberg) y Vitelio[6] (o bien Witelo: el nombre tiene muchas grafías distintas).

Estos estudiosos habían observado que los rayos de luz cambiaban de dirección cuando entraban en contacto con una superficie más densa. Snell descubrió la ley exacta en 1621, pero se conocieron sus resultados sólo en 1703, año en el que Huygens los publicó junto con los suyos en el libro "Dioptrica"[7].

Mientras tanto Descartes publicó su "Discurso del método"[8] en 1637, incluyendo en él la ley de los senos a la que había llegado Snell. Explicó la refracción con las partículas de la luz que se movían en el cuerpo refractante con una velocidad mayor con respecto a su velocidad en el aire[9]. Dada la incuestionable autoridad de Descartes en esos tiempos, muchos intentaron justificar esta explicación filosófica sin fundamento físico. Hoy en día, de todas formas, en los países francófonos la ley de los senos lleva el nombre de Descartes, mientras que en los países anglófonos y España se conoce como la ley de Snell.

---

1 Sobre la vida y las obras de Snell, véase Gillispie, 1981, p. 499-502 (11&12).

2 Sobre sus investigaciones con respecto a la geodesia, véase también Ruiz Morales y Ruiz Bustos, 2000, figuras de p. 209.

3 Una explicación interesante de su medición de la Tierra se encuentra en Sagan, 1987, p. 14-15.

4 véase a propósito su libro VII en Rashed, 1993.

5 Gillispie, 1981, p.92-95 (3&4).

6 Gillispie, 1981, p.457-462 (13&14).

7 Huygens, 1962.

8 Gillispie, 1981, p. 58 sig. (3&4).

9 El primero en medir la velocidad de la luz en el agua fue Foucault en 1862: demostró que era menor (aproximadamente 3/4) que la velocidad en el aire, con lo cual se vio que Descartes se equivocaba en este punto. Véase a propósito Gribbin, 2003, p. 348-349.

·REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN: LEYES

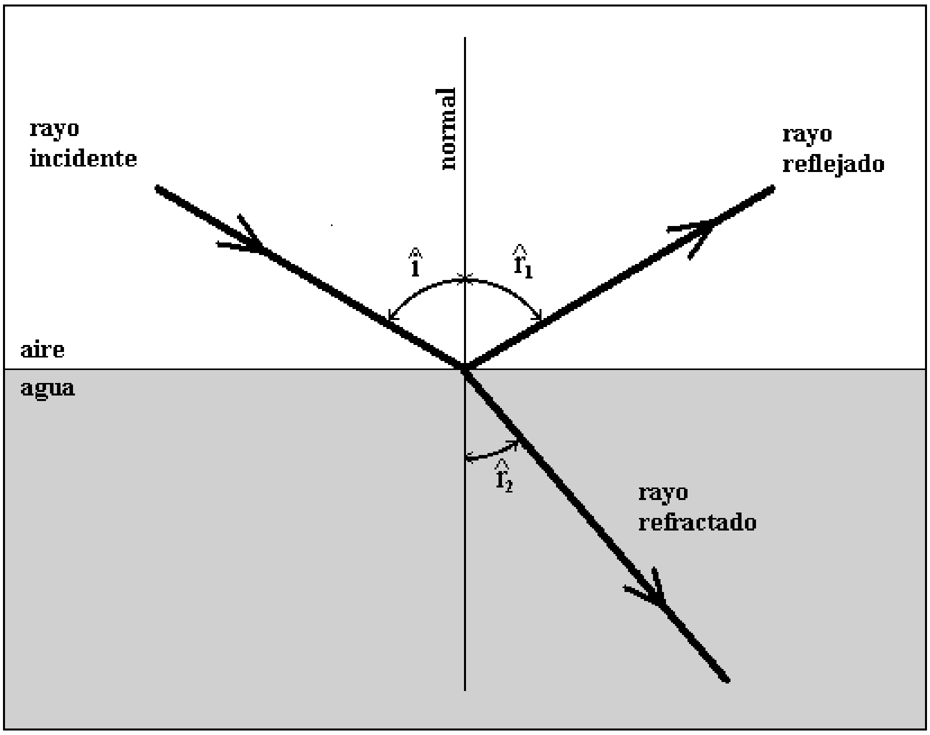

figura 1: rayos incidente, reflejado y refractado

La reflexión es el cambio de dirección del rayo luminoso que incide sobre una superficie reflectante. Las leyes que la describen, conocidas ya por los antiguos griegos, son estas:

1. el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie reflectante se hallan en el mismo plano;
2. el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.

La refracción es el cambio de dirección del rayo luminoso cuando pasa de un medio transparente a otro. Se rige por las siguientes leyes:
1. el rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de separación entre los dos medios están en el mismo plano;
2. conociendo los dos medios, la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante.

En la actualidad la ley de los senos se formula de la siguiente manera:

$$sen(i)= n\ sen(r)$$

En este caso se supone que el primer medio en cuestión es el vacío (o el aire, cuyo índice de refracción es muy parecido). i es el ángulo del rayo incidente, mientras que r es el ángulo del rayo refractado. Los senos se refieren al ángulo que forman respectivamente los dos rayos con la normal a la superficie de separación entre los dos medios transparentes.

El ángulo de desviación del rayo luminoso depende del índice de refracción de cada material: este índice se define como la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el material en cuestión, o más sencillamente,

$$n = c/v$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y v es la velocidad de la luz en el material analizado[10].

·ESPEJOS Y LENTES

Puesto que tratamos el tema de las superficies reflectantes y refractantes, me parece oportuno aclarar los conceptos de espejo y lente, aunque sean de fácil intuición.

Un espejo es una superficie que refleja la luz y en un contexto más amplio, también otro tipo de ondas (como por ejemplo el sonido), absorbiéndolas y esparciéndolas sólo en parte. "Es un cuerpo con superficie pulida de forma regular, capaz de reflejar los rayos luminosos, conservando la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión, y que forma imágenes ópticas de objetos (incluidas las fuentes de luz), cuya posición puede determinarse por las leyes de la óptica geométrica."[11] Lo que llamamos normalmente espejo es un objeto constituido por una lámina de vidrio a la que se aplica sobre una sola cara una capa de metal que refleja los rayos luminosos devolviendo una imagen de lo que se pone enfrente.

La palabra lente deriva del latín LENTICULA (lenteja) en torno al año 1170, por la analogía de su forma con la de la legumbre. La lente es un sistema óptico constituido por una sustancia refractante — y por lo tanto transparente, como por ejemplo el vidrio — limitado por dos superficies, de las cuales una por lo menos es curva[12]. "Es un cuerpo transparente limitado por dos superficies que refractan los rayos luminosos y que es capaz de formar una imagen óptica de los objetos que desprenden luz propia o reflejada"[13].

Los rayos de luz que inciden sobre la lente se curvan hacia la parte más espesa de la misma, por esta razón las lentes convexas son convergentes, mientras que las cóncavas son al revés, divergentes. Por lo tanto, cuando se habla de superficies dióptricas o anaclásticas, se habla de superficies refractantes, normalmente lentes.

En los primeros ejemplares, las caras de las lentes eran porciones de esfera, o bien tenían una cara plana, que se consideraba por aquel entonces una esfera de radio infinito. Hoy en día, en cambio, las caras de las lentes son más bien porciones de conoides, que eliminan algunos defectos geométricos de las lentes esféricas. Así por ejemplo, con una lente

[10] sobre las leyes de la refracción, se puede consultar cualquier manual de óptica, por ejemplo Pedrotti y Pedrotti, 1987, p.32.

[11] Torres Triviño, 1995-1996, p.435 (tomo 2).

[12] véase Djebbar, 2002.

[13] Torres Triviño, 1995-1996, p.701 (tomo 3).

parabólica evitamos en gran medida la aberración esférica, lo que quiere decir que la imagen que obtendremos será más nítida.

·LA REFRACCIÓN Y SU UTILIDAD

De las leyes de la refracción de la luz depende el funcionamiento de instrumentos ópticos extremamente importantes para el avance de la ciencia y para la mejora de la calidad de vida cotidiana. No pretendo ser exhaustiva en esta breve exposición, pero mencionaré algunos de estos instrumentos para tener una idea general:

1. lentes, y por lo tanto
    - gafas
    - telescopios
    - microscopios
    - objetivos de cámaras fotográficas
    - fotocopiadoras
2. prismas, y por lo tanto
    - comprensión del espectro
    - comprensión de la composición de las estrellas
    - análisis de la composición de sustancias
    - descubrimiento de nuevos elementos
3. fibra óptica, y por lo tanto
    - telecomunicaciones actuales
    - transmisión de información a alta velocidad

1.2 LA ÓPTICA EN LA CIENCIA ÁRABE

·LOS ESPEJOS USTORIOS

Después de la alianza de los griegos de Siracusa con los cartagineses durante la Segunda Guerra Púnica, el cónsul romano Marco Claudio Marcelo empezó el asedio de la ciudad en el año 215 a.C. Después de más de dos años de ataques y contraataques, en el invierno de 212 a.C. se rindieron los últimos defensores de la ciudad en la zona de Ortigia. Durante el asedio mataron a Arquímedes, a pesar de que el cónsul dio la orden de no tocarle. Esto es lo que nos dicen los libros de historia[14].

La leyenda cuenta que, mientras tanto, Arquímedes — además de usar otros numerosos inventos — quemó las mayor parte de la flota de Claudio Marcelo, anclada en las proximidades del puerto, con unos espejos ustorios que había puesto sobre las murallas y que apuntaban hacia los barcos.

No sabemos hasta qué punto la leyenda es verídica; a pesar de que queda fuera de dudas el genio de Arquímedes y de que ha sido comprobada la consistencia histórica de un gran número de sus inventos y descubrimientos, resulta difícil establecer la veracidad de este hecho.

[14] Gillispie, 1981, p.213 sig. (1&2).

Desde el tercer siglo a. C., el estudio de los espejos ustorios ha sido un campo de investigación peculiar porque abarca diferentes disciplinas: estudio de las propiedades de las secciones cónicas, técnicas de construcción de los espejos y óptica teórica. Precisamente por esta razón no formaba parte de la clasificación epistemológica de la época: un conocimiento teórico se podía aplicar a necesidades prácticas, es decir, que ¡su fin no se agotaba en sí mismo! Este estudio era particularmente interesante para los soberanos en virtud de sus aplicaciones prácticas, como cuenta la anécdota según la cual Arquímedes quemó las naves de Marcelo: tenemos una prueba de esto en los textos literarios en griego, latín y árabe en los que se mencionaba el prestigio de los espejos ustorios como armas[15].

El interés por los espejos ustorios por parte de los científicos del Imperio Islámico se desarrolló desde el siglo IX. Sabemos que seguramente los árabes conocían y habían asimilado, gracias a traducciones, algunos textos griegos sobre el tema, ya que algunos indicios nos ayudan a establecer cuales habían sido traducidos: los tratados de los que tenemos noticias son los de Diocles, un cierto Dtrums, Antemio de Tralles y Dídimo. Además la deuda cultural de la ciencia árabe con los griegos es altísima especialmente con respecto a las secciones cónicas, sobre todo por los textos de Eudoxo y Apolonio.

·IBN SAHL

En este contexto se introduce Ibn Sahl, matemático y físico del siglo X, que es el primero en extender el análisis también a las lentes; entonces la catóptrica griega es también la base de la dióptrica. Al-‘Alā’ Ibn Sahl escribe un libro sobre los instrumentos ustorios, es decir, amplía el campo de investigación a las superficies anaclásticas. La parte que habla de los espejos no contiene novedades con respecto a los escritos griegos, mientras que la parte que habla de las lentes y la refracción de la luz, aun sin ser diferente en la argumentación, es original. De hecho en el texto el autor deduce la ley de los senos, llegando a una fórmula que representa la inversa de la que Snell enunciará más de seis siglos más tarde.

Debido a que Ibn Sahl se proponía también la construcción de instrumentos mecánicos que sirvieran para trazar las secciones cónicas que constituían la superficie de los espejos de las lentes examinadas por él, en cada capítulo, después del tratamiento teórico de la sección cónica en cuestión, dedica una parte a la representación de la misma curva por medio de sistemas que probablemente se remontan a libros griegos sobre el tema.

De todas formas, queda la duda sobre si era o no consciente de la ley que descubre, dado que no está acompañada de comentarios ni explicaciones. Si por un lado esto es parte del estilo seco que le caracteriza, por otro nos preguntamos qué importancia dio a la relación constante que había notado. Además, hay que recordar que la formulación de la ley contempla la utilización de la función seno; Ibn Sahl, en cambio, hace notar una relación constante en forma del todo geométrica, sin recurrir a la función trigonométrica que caracteriza la ley.

Sir William Osler[16] (1849-1919) dijo que “en ciencia, el mérito se atribuye al que convence al mundo, no al que tuvo la idea por primera vez”[17]. En realidad no ha pasado lo

[15] Rashed, 2000.

[16] William Osler: le llamaron «el fisiólogo más influyente de la historia ». Entre sus otras numerosas aportaciones, se considera el padre de la medicina psicosomática.

[17] MacKay, 1992, p.224.

mismo con Snell, cuyos resultados fueron publicados por Huygens, o con Kepler: las leyes que llevan su nombre fueron extrapoladas por Newton de un texto del científico. A pesar de todo, conocemos las leyes de Kepler[18] y la ley de Snell. Igualmente se podría proponer "la ley de Ibn Sahl".

Por lo que se refiere a la obra matemática de Ibn Sahl, nos han llegado dos títulos, pero sabemos que escribió al menos cinco. Lo que tenemos por ahora es un tratado sobre las cónicas y un comentario sobre el libro de al-Qūhī, sobre la geometría del astrolabio. Por lo que nos dicen al respecto otros científicos, se conocía a Ibn Sahl por aquel entonces como matemático, y, más precisamente, como geómetra. Es fundamental, desde este punto de vista, su interés por la construcción de las cónicas y por sus propiedades ópticas: su éxito en la dióptrica, por tanto, está estrictamente vinculado al examen detallado de estas curvas, es decir a las matemáticas. El punto de conexión entre las dos disciplinas, en este caso, es justamente el estudio de los medios mecánicos que sirven para la construcción de las cónicas[19]. Recordamos que las matemáticas árabes, aun empezando desde los logros de otros pueblos, han aportado métodos y fórmulas originales que seguimos utilizando hoy en día. Según Carl B. Boyer[20] estas se pueden subdividir en cuatro partes:

- Aritmética de origen presumiblemente hindú y basada en el principio posicional.
- Álgebra que derivaba de fuentes griegas, hindúes y babilónicas y que asumió entre los árabes una forma nueva y sistemática.
- Trigonometría cuyos principios venían principalmente de Grecia, y a la que los árabes aplicaron la forma hindú y añadiendo nuevas funciones y fórmulas.
- Geometría de origen griego a la que los árabes dieron importantes contribuciones introduciendo generalizaciones de gran valor.

·LA TRANSMISIÓN DE LA CIENCIA GRIEGA Y ÁRABE EN LA EUROPA CRISTIANA

Con respecto a España, el centro más importante de intercambio y traducción – al igual que Sicilia en Italia - fue Toledo. Toledo fue conquistada por Alfonso VI en 1085, y en el siglo XII, con la ayuda y la protección del obispo, empezó a ser un centro de traducción del árabe al latín. Había un gran número de traducciones atribuidas a unos pocos personajes, como por ejemplo Gerardo de Cremona, así que es probable que se fundara una escuela de traducción. De todas formas la difusión de este fenómeno era mucho mayor, de nivel europeo, como demuestra la relevante cantidad de traductores de la época y las muchas obras fruto de una labor de colaboración. El primer diccionario árabe-latín, por lo que se sabe hasta ahora, es precisamente un manuscrito español del siglo XII[21].

Entre el final de siglo XII y el final del siglo XIII aumentaron en proporción las traducciones del griego, fuentes de primera mano, con respecto a las del árabe. Las traducciones del árabe se acabaron definitivamente en el siglo XIV, cuando los mongoles conquistaron Persia y Mesopotamia (muchos manuscritos griegos llegaron a Italia cuando los cruzados conquistaron Bizancio) y el resultado fue que en torno a la mitad del siglo XIII

[18] Gillispie, 298-299 (7&8).
[19] Rashed, 1993.
[20] Boyer, 1980.
[21] Crombie, 1974.

habían sido traducidas al latín casi todas las obras científicas griegas que iban a tener una fuerte influencia en el Occidente latino[22].

Algunas fueron traducidas también a lenguas romances, sobre todo al castellano, al italiano, al francés y más tarde al inglés. De esta forma se difundieron en Europa la ciencia griega y la árabe y, a través de ésta, también las matemáticas hindúes, que fueron motivo de mejorías notables en el comercio, por ejemplo, y en general en el nivel práctico del sistema de numeración[23].

En el siglo XIII, gracias al refuerzo de las relaciones comerciales entre cristianismo e Islam, se reforzaron también las relaciones culturales y empezaron a penetrar en la Europa cristiana la ciencia griega y árabe. La ciencia árabe se difundió sobre todo desde Sicilia y desde España. La situación geográfica de Sicilia favorecía de manera particular el intercambio de ideas entre estudiosos griegos, árabes y latinos; de hecho allí aparecieron unas de las primeras traducciones directamente del griego, además de las del árabe. El dominio del Imperio Romano de Oriente en la isla se acabó con la caída de Siracusa en 878. Después, la ciudad pasó al Islam durante aproximadamente dos siglos hasta 1060, cuando empezó la conquista normanda. En 1090 Sicilia ya se había convertido en reino normando y en ella convivían latinos, griegos y musulmanes en unas condiciones estimulantes y fecundas para los científicos[24].

Con respecto a la óptica, no hubo avance en la Edad Media occidental hasta el siglo XVI. Desde Ibn al-Hayṯam hasta Kepler[25] y Galileo[26] la situación se quedó prácticamente estancada. Precisamente en el siglo XVI por el perfeccionamiento de la construcción de lentes e instrumentos ópticos — desde las gafas hasta el telescopio — la óptica avanza hacia el descubrimiento de lo infinitamente grande y de lo infinitamente pequeño. Como en el caso de los espejos ustorios, el primer uso del telescopio fue de diversión y bélico: de hecho Galileo lo ofreció a la República de Venecia — cuyos senadores lo recompensaron subiéndole el sueldo de profesor — para que pudieran ver los barcos enemigos dos horas antes que a simple vista. La verdadera revolución de Galileo, por lo tanto, no fue el telescopio en sí — que ya era conocido en Europa desde hacía algunos años — sino el uso científico que dio al invento, es decir que fue el primero en alzar el telescopio hacia el cielo con el fin de conocer a través de la experiencia directa la realidad sobre la que los filósofos y los científicos habían estado escribiendo durante miles de años sin poder comprobar directamente. Naturalmente el ambiente que lo acogía era de completa desconfianza, ya que nadie podía asegurar que el telescopio reproducía fielmente la imagen real del objeto observado, dado que todavía no resultaba claro el mecanismo de la visión del ojo humano. El primer paso hacia adelante con respecto a la creencia peripatética según la cual del ojo salía un haz de rayos que iluminaba los objetos fue dado por Ibn al-Hayṯam. Su teoría sostenía que el haz de rayos salía más bien de los objetos mismos.

El ojo ve gracias a la refracción: el cristalino, de hecho, funciona como una lente que hace que las imágenes converjan en la retina, pero para llegar a esta conclusión hay que

[22] Crombie, 1974.

[23] Crombie, 1974.

[24] Crombie, 1974.

[25] Duncan, A. M., 1998, <<Kepler on light and sound>>, *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum* 2: 98 – 103.

[26] Fermi, Laura, y Bernardini, Gilberta, 1961, *Galileo and the Scientific Revolution*. New York: Basic Books.

esperar al descubrimiento de la naturaleza corpuscular (Newton[27]) y ondulatoria[28] (Christian Huygens, holandés del siglo XVIII) de la luz.

·CATÓPTRICA Y DIÓPTRICA

Los fenómenos de la reflexión y de la refracción de la luz se estudian ya desde hace milenios, pero las leyes que los rigen aparecieron en la escena de la física relativamente tarde. Sabemos que los antiguos griegos conocían las leyes de la reflexión de la luz (al parecer, aunque hay opiniones discordes, el fuego olímpico se encendía con un espejo ustorio parabólico), pero no las de la refracción, aun siendo de dominio público el poder incendiario de las lentes. Aristófanes, por ejemplo, menciona esta propiedad en su comedia "Las nubes" del 423 a.C., en la que un ciudadano quiere derretir la parte de cera de las tablillas de la acusación en su proceso con una lente. Este es el fragmento correspondiente, en la traducción de Juan Rodríguez Somolinos[29]:

> Sócrates: Muy bien. Ahora déjame que te plantee otra cuestión ingeniosa. Si alguien te interpusiera una demanda por cinco talentos, explícame cómo te eludirías.
> Estrepsíades: ¿Cómo? ¿Qué cómo? No tengo ni idea. Pero déjame pensarlo.
> Corifeo: No tengas siempre tu idea hecha un ovillo en torno tuyo; deja volar el pensamiento por el aire como un abejorro atado con un hilo por la pata.
> Estrepsíades: He hallado un medio ingeniosísimo de anular el proceso: incluso tú me darás la razón.
> Sócrates: ¿Cuál es?
> Estrepsíades: ¿Has llegado a ver alguna vez en las tiendas de fármacos esa piedra, hermosa y transparente, con la que encienden fuego?
> Sócrates: ¿Te refieres al cristal de roca?
> Estrepsíades: Eso mismo. Pues bien, ¿qué te parecería si me hiciese con una y cuando el escribano estuviese redactando la denuncia, situándome a una cierta distancia, así, yo derritiese las letras de mi acusación?
> Sócrates: Muy ingenioso, por las Gracias.
> Estrepsíades: ¡Ay, qué alegría que he anulado una causa de cinco talentos!

La catóptrica es el campo de investigación que se ocupa de la reflexión de la luz y de las superficies reflectantes[30]: en este tema entran los espejos ustorios, es decir espejos estudiados, construidos y usados con el solo fin de incendiar un cuerpo a una distancia dada. La catóptrica se desarrolló como disciplina ya con los antiguos griegos, que escribieron mucho sobre esto.

La dióptrica, en cambio, examina la refracción de la luz y las superficies anaclásticas[31] (las que permiten el pasaje de los rayos luminosos desviando su dirección gracias a su

---

[27] Gillispie, 1981.
[28] Holton, 1981.
[29] Aristófanes, 1999, edición de Francisco Rodríguez Adrados y Juan Rodríguez Somolinos.
[30] véase la definición de De Galiana Mingot, 1987, p. 238.
[31] véase la definición de De Galiana Mingot, 1987, p. 444.

transparencia): de aquí, por ejemplo, deriva la palabra dioptría, unidad que indica la capacidad de convergencia de una lente (u otro sistema óptico), pero también la unidad de medida de la capacidad visual, porque en el ojo humano las imágenes se forman por la refracción de la luz en las varias partes transparentes (cristalino y córnea) y su convergencia en la retina, por lo menos en un ojo sano.

Dióptrica y anaclástica son sinónimos, básicamente; lo que diferencia los dos términos es el uso que se ha hecho de ellos en el tiempo.

Existe también la catadióptrica, es decir la parte de la física que trata de los efectos combinados de la reflexión y de la refracción de la luz[32].

Aun siendo una ley de simple formulación, la ley de los senos controla varios aspectos del vivir de hoy en día. Sin ella, de hecho,

1 no habríamos descubierto la existencia de los microbios y de las demás células y la gente seguiría muriendo por enfermedades no tan graves, ya que nadie habría podido observar microbios y células sin microscopio; no se habría desarrollado la teoría germinal de Pasteur;

2 seguiríamos creyendo que el Sol gira alrededor de la Tierra, porque nadie habría podido ver los planetas con un telescopio, como hizo Galileo;

3 no existiría la fotografía, los objetivos de las cámaras de fotografía no serían eficientes y tendríamos que seguir haciéndolos con la cámara oscura;

4 análogamente para cintas de vídeo y cine;

5 no habría sido posible elaborar gafas con un mínimo de calidad;

6 internet colapsaría sin fibra óptica que hiciera posible la transmisión de los datos y sería demasiado caro como para estar al alcance de muchos;

7 no se entendería por qué se forma el arco iris[33].

Por estas numerosas razones es verdaderamente interesante el texto de Ibn Sahl, porque si se hubiera tenido en cuenta su tratado, se habrían logrado estos resultados siglos antes. Si los europeos lo hubieran conocido, no habríamos tenido que esperar a Kepler y su tratado de óptica geométrica — el primero en el mundo occidental moderno — del año 1604, sobre cuya base, aunque no exclusivamente, se perfeccionaron los instrumentos ópticos, sobre todo el microscopio y el telescopio: los mismos instrumentos, de hecho, se consideran por parte de los que se ocupan de historia de la ciencia como pieza fundamental de la revolución científica que llevó al análisis de la realidad perceptible. Naturalmente los descubrimientos y los inventos se colocan en un contexto fecundo y apto a su realización, por lo tanto muy probablemente no se habrían podido anticipar todos de más de seis siglos, si no que de un período menor. Esto no resta validez a la ley de la refracción expuesta por Ibn Sahl y la probabilidad, si alguien hubiera considerado atentamente el texto, de progresar más rápidamente de cómo ha sucedido en realidad.

[32] véase la definición de De Galiana Mingot, 1987, p. 235.

[33] La primera explicación del por qué se forma el arco iris fue dada justamente por un científico árabe, Kamāl al-Din al-Fārisī, en un comentario a una epístola de Ibn al-Hayṯam. Véase a propósito el Rashed, 1990; Rashed, 1970.

·LA ÓPTICA ÁRABE EN EL SIGLO X

La óptica árabe al principio fue orientada sobre todo a la fisiología del ojo y de la visión. De hecho, ya en el siglo VIII, la medicina árabe estaba más desarrollada respecto a los otros campos del conocimiento: particularmente avanzado fue el estudio de las enfermedades de los ojos y la experimentación, es decir que el hecho de intervenir quirúrgicamente lleva consigo el estímulo de investigar la estructura y el funcionamiento del ojo. A partir del siglo IX se empezaron a escribir también tratados que podríamos llamar de óptica aplicada, es decir la aplicación de la óptica a instrumentos de utilidad pública o diversión. El estudio de los espejos ustorios diría que se configuraba como parte de la óptica aplicada. Obviamente el apogeo de la óptica árabe se considera todavía hoy en día Ibn al-Hayṯam, que investigó en su *Kitāb al-manāẓir*[34] y en otros escritos menos conocidos desde la visión y la estructura del ojo hasta la esfera ustoria.

1.3 IBN SAHL Y SU APORTACIÓN ÓPTICA

·EL MANUSCRITO Y EL TEXTO

Se sabía que un cierto Ibn Sahl, sobre cuya vida no tenemos noticias, había escrito sobre espejos ustorios: de hecho dos manuscritos, uno conservado en la biblioteca nacional al-Zahiriya de Damasco y el otro en la biblioteca nacional Millī de Teherán, llevan el nombre del autor y hablan del mismo tema. Hasta hace unos años se creía que eran dos copias del mismo manuscrito, sobre la base del catálogo bibliográfico de Fuat Sezgin con título "Geschichte des arabischen Schrifttums-Astronomie"[35]. El título del primero es *Risāla fī-'l-'āla al-muhriqa li-Abī Sa'd al-'Alā' Ibn Sahl*; el del segundo *Kitāb al-harraqāt, 'amilahu Abū Sa'd al-'Alā' Ibn Sahl*[36].

Roshdi Rashed, en cambio, ha demostrado que se trataba del mismo texto: las hojas de Damasco son un largo fragmento que integra los de Teherán. El texto de Teherán es el más largo, pero está gravemente dañado y las hojas no están ordenadas[37]. Por lo tanto la tarea de Roshdi Rashed ha consistido en entender la estructura que se hallaba tras el tratado y luego reordenar las hojas del manuscrito de Teherán, deducir cuáles son las partes que faltan y demostrar que el texto de Damasco es una de ellas.

Sólo después de este valioso trabajo, Roshdi Rashed pudo afirmar que tenemos la mayor parte de la obra y que, afortunadamente, la falta de algunos fragmentos no impide la comprensión del texto, al contrario: se puede fácilmente deducir de qué trataban y de qué manera se desarrollaba el tema en cuestión.

El problema que analiza Ibn Sahl se puede sintetizar de esta forma: queremos incendiar un punto dado, con una fuente luminosa cercana o lejana, por medio de reflexión o refracción. De la combinación de estas cuatro posibilidades obtenemos cuatro diferentes instrumentos:

---

[34] véase a propósito su libro VII en Rashed, 1993.
[35] Sezgin, 1970.
[36] Rashed, 1993, p. CXXXVIII-CXLIII.
[37] Rashed, 1990.

· si los rayos se pueden considerar paralelos (es decir, que la fuente luminosa se halla a una tal distancia que se puede considerar infinita, por lo que el ángulo de divergencia entre los rayos es despreciable), y utilizamos la reflexión, tenemos un espejo parabólico.
· también por reflexión, pero usando una fuente luminosa a distancia finita, tenemos un espejo elipsoidal.
· por refracción y con fuente luminosa a distancia infinita obtenemos una lente plano-convexa.
· por último, en el caso de una fuente luminosa a distancia finita y de un instrumento refractante, usaremos una lente biconvexa.

Cada capítulo comprende una parte teórica de estudio de la curva y una parte práctica que explica cómo dibujar la misma curva, dado que el autor se propone también construir tales instrumentos incendiarios. Lo que queda del texto verifica la hipótesis de este esquema, y gracias a ello es fácil deducir las partes que faltan.

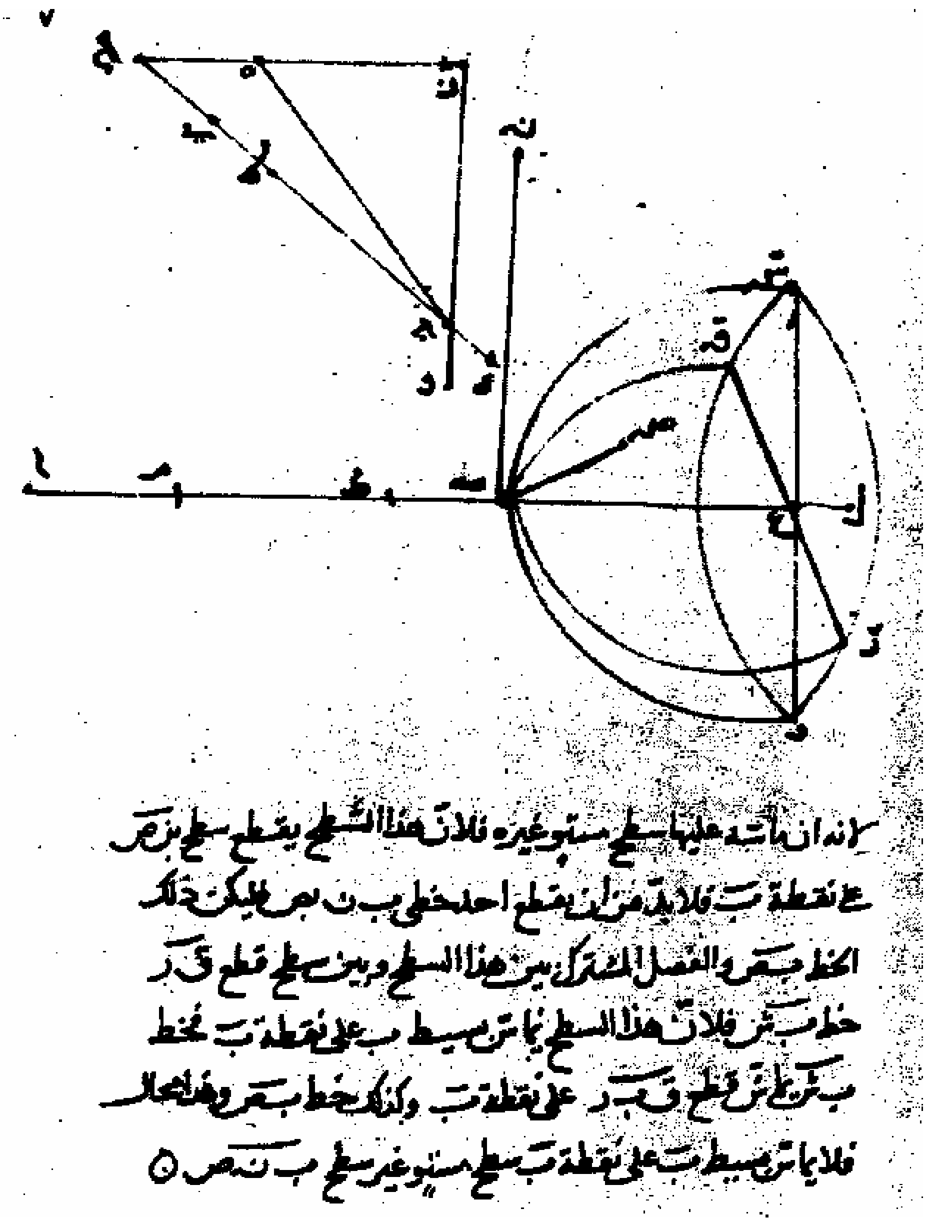

figura 2: página del manuscrito. Biblioteca Millī, Teherán. Véase Rashed, 1993, página XIII.

· TRADUCCIÓN Y TRANSCRIPCIÓN

La traducción que he hecho, de la que voy a insertar una parte en este artículo, se basa en el texto árabe establecido críticamente y publicado por Roshdi Rashed en *Géométrie et dioptrique en X^e^ siècle. Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*[38]. No he me he desviado en ningún caso de la versión publicada. He tomado también las figuras, para que la versión en castellano se pueda comparar fácilmente con la única edición en árabe (y en francés). Por la misma razón he designado curvas y figuras geométricas con las mismas letras que se encuentran en la traducción al francés de Roshdi Rashed.

En este artículo se encontrarán la traducción de la introducción del tratado, de la parte que se ocupa de las lentes (es decir la parte original e innovadora del texto: lente plano-convexa, trazado continuado de la hipérbola y la lente biconvexa) y la nota final del copista que transmite el texto. Por motivos de espacio he excluido la parte que habla sobre el espejo ustorio parabólico, el trazado continuado de la parábola y el trazado continuado de la elipse.

Con respecto a la transcripción de los nombres árabes en el resto del texto — y me refiero, evidentemente no sólo a la traducción, sino también a la introducción del presente artículo — he usado el sistema español, cuando no cito libros o fragmentos, en cuyo caso me he mantenido fiel a la fuente original.

[38] Rashed, 1993.

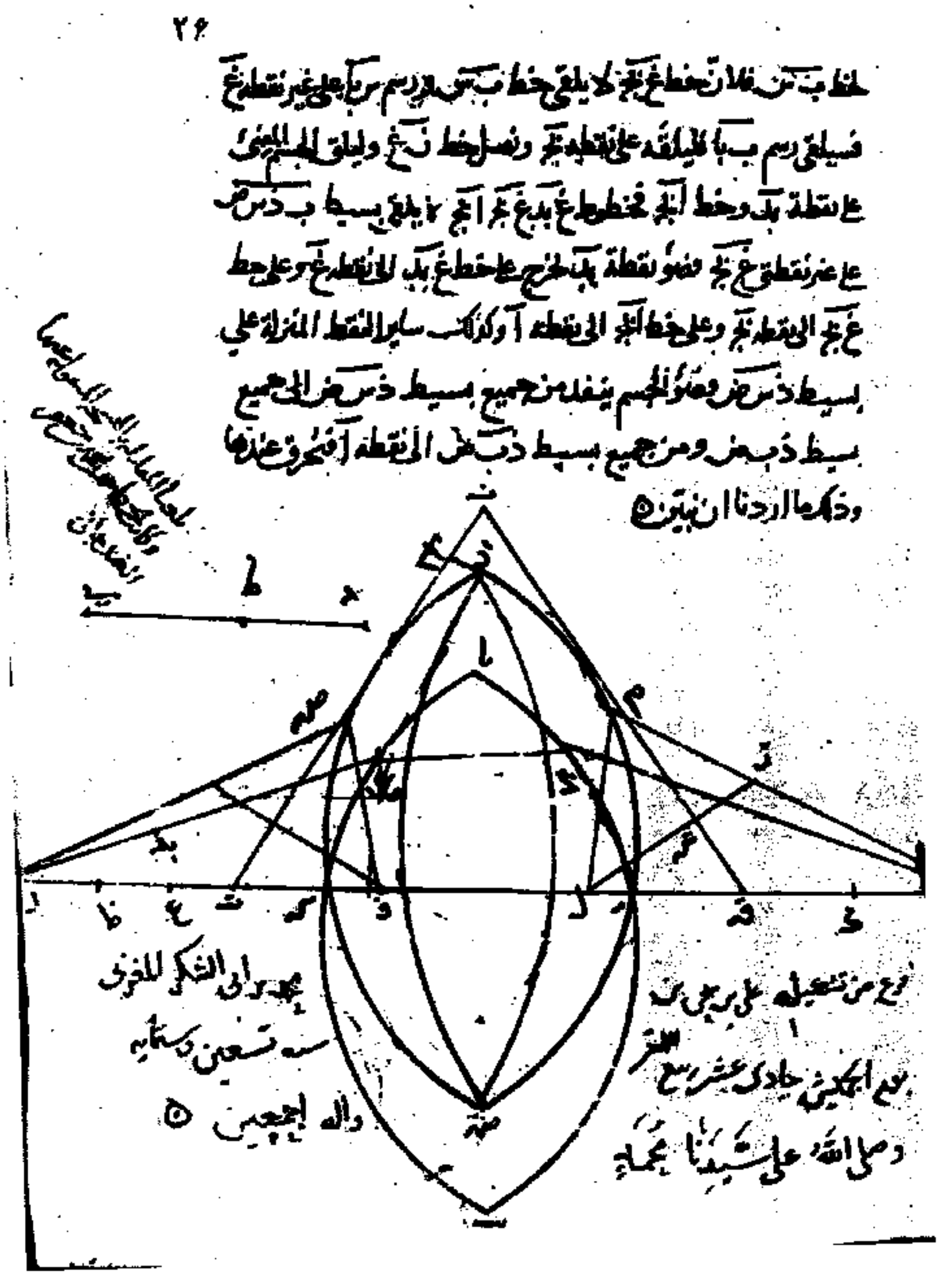

figura 3: página del manuscrito. Biblioteca Millī, Teherán. Véase Rashed, 1993, página XLII.

2. TRADUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Al-'Alā' Ibn Sahl

EL LIBRO SOBRE LOS INSTRUMENTOS USTORIOS

En el nombre de Dios clemente y misericordioso,
a Él pido ayuda.

El rey, Espada del estado y Sol de la comunidad[39], está en derecho de esperarse del que conoce la grandeza de la gracia en su empeño por divulgar las ciencias para que se difunda entre la gente su fama, y crezca entre los hombres su valor, y para que los que las estudian obtengan amplio provecho de su utilidad y disfruten de su beneficio, que esta persona haga de su servicio en este campo, con todos los medios que encuentre, un agradecimiento parcial por esta gracia. Y cómo no preocuparse por difundirlas dado que ya ellas reconocen en este rey al que entiende su excelencia y las defiende por ellas, al que cuida de ellas con la bondad de su tutela y une con la generosidad de sus vínculos quien esté lejos de ellas con quien esté cerca; entonces su causa hoy es fuerte y su protector potente, su puesto es firme y su comercio fructífero; la idea que él tiene de las ciencias lo protege de sus pasiones, por ello el inocente no temerá ser condenado y el mezquino no esperará que se emita una sentencia a su favor.

He pasado ya un tiempo buscando en profundidad la verdad sobre lo que se ha atribuido a los científicos con respecto al poder de incendiar con luz un cuerpo a una distancia lejana y está relacionado con Arquímedes por la combustión de unas naves de los enemigos con esta clase de artificio, hasta que he conocido el total de los casos en este tema, y he investigado con precisión, y he recurrido a propósito del tema a lo que he encontrado en los libros de los antiguos y de ellos he extraído lo que contenían, es decir la descripción de la combustión con la luz del Sol reflejada en un espejo a una distancia cercana y un tipo de combustión con luz de un cuerpo cercano que se refleja en un espejo. Luego, he continuado el estudio en lo que no está contenido en estos libros hasta deducir la descripción del incendio por medio de la luz del Sol <que pasa a través de un instrumento y se refracta en el aire.>

[…] <LA LENTE PLANO-CONVEXA >

Si el incendio tiene lugar por medio de un haz de luz que pasa a través de un instrumento, entonces nos servimos de un trozo de vidrio limitado por una superficie plana, que llamamos C. Es necesario que sea del tamaño que necesitamos y que sus partes sean de igual pureza. Llevamos dos rectas sobre una de las cuales la luz pasa a través del vidrio, y la llamamos CD, y sobre la otra la luz se refracta en el aire, y la llamamos CE. Trazamos el plano CDE y la intersección entre este y el plano C sea la recta FCG, pues los dos ángulos

[39] los títulos en árabe son *Ṣamṣām al-Dawla* y *Šams al-Milla*. Se refieren al príncipe buyida Abū Kālīŷār Marzubān, 964-998 (véase *Encyclopédie de l'Islam*, Leiden, París, E.J. Brill- Maisonneuve, 1960, página 1086).

DCF y ECG son agudos y el más pequeño de ellos es el ángulo ECG. Llevamos el segmento CH sobre la prolongación del segmento CD y suponemos sobre el segmento CH el punto H; trazamos el segmento GH perpendicular al segmento CG y hacemos que interseque el segmento CE en el punto E. Por lo tanto el segmento CE es más corto que el segmento CH. Separamos del segmento CH el segmento CI igual al segmento CE, dividimos HI en dos mitades en el punto J, ponemos la relación del segmento AK con el segmento AB igual a la relación del segmento CI con el segmento CJ, trazamos el segmento BL sobre la prolongación del segmento AB y lo hacemos igual al segmento BK. Pues los rayos que salen de un punto sobre la superficie del cuerpo luminoso hacia los lados del instrumento o bien son paralelos a la percepción o bien no lo son.

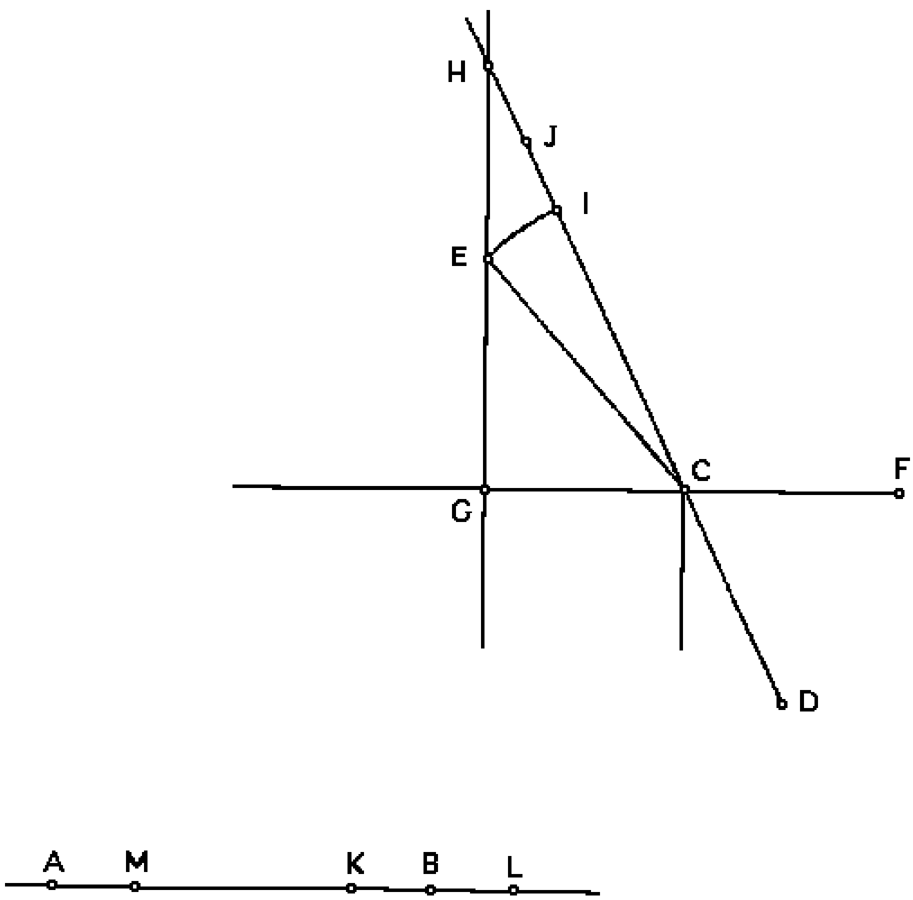

figura 4: véase Rashed, 1993, página 24, figura 11

Si los rayos que se propagan desde un punto sobre la superficie del cuerpo luminoso hacia los lados del instrumento son paralelos a la percepción, entonces se incendian a una distancia o bien pequeña o bien no pequeña: pues si el incendio tiene lugar a una distancia pequeña, entonces ponemos el segmento BM igual al segmento AK, trazamos el segmento BN perpendicular al segmento AB, y ponemos la superficie BN por BM cuatro veces la superficie BL por LM. Determinamos una hipérbola cuyo eje es la recta BM y cuyo *latus rectum*[40] es la recta BN, que empieza en el punto B y acaba en el punto S; luego trazamos el segmento SO perpendicular al segmento BL, fijamos el segmento BO, y hacemos rotar en torno a éste la superficie delimitada por el arco BS y por los dos segmentos BO y SO hasta que el punto S describe la circunferencia SP y se forma el sólido BS; entonces modelamos un sólido igual que aquel con dos puntos de mira: uno de ellos está cerca de la circunferencia SP y en su centro está un orificio circundado por un círculo, y el otro está cerca del punto B y en su centro está un círculo al que llega la luz del Sol que ha atravesado el orificio hasta allí; la recta que pasa por los centros de los dos círculos es paralela a la recta BL, y este sólido es de la misma materia con la que hemos trabajado. Suponemos en una de las dos miras un apéndice para fijarla y lo pulimos, excepto los dos puntos de mira y lo que está sobre ellos. Es necesario que la luz del Sol, si penetra desde toda la superficie O hasta toda la superficie B excepto la posición de los dos puntos de mira y de lo que está sobre ellos y desde toda la superficie B excepto esa posición hasta el punto A, se incendie en ese punto.

Luego ponemos el mismo sólido frente al Sol de manera que su luz penetre a través del orificio hasta el círculo; yo digo que la luz del Sol penetra desde todo el plano O hasta toda la superficie B, excepto la posición de los dos puntos de mira y de lo que está sobre éstos, y desde toda la superficie B excepto esa posición hasta el punto A, y se incendia en este punto.

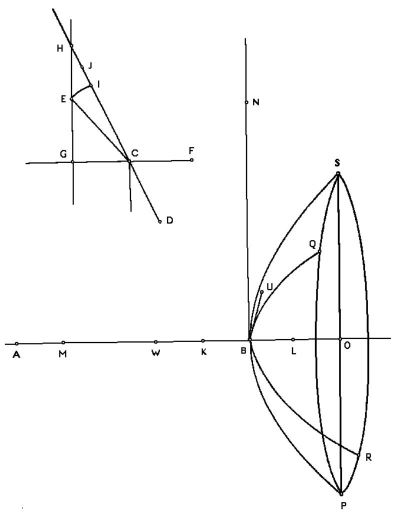

figura 5: véase Rashed, 1993, página 26, figura 12

---

[40] El *latus rectum* (que hoy en día prácticamente no se usa) se define como el segmento que pasa a través del foco de una sección cónica, paralelo a la directriz y limitado en los dos extremos por la misma curva. Es el parametro del eje principal. Véase a propósito los siguentes textos sobre la nomenclatura de las secciones cónicas: Berzolari, Vivanti, Gigli, 1964 y Morin, 1959. Véase también la definición de Lapedes, 1978, p. 548.

Demostración: suponemos sobre la superficie B un punto; éste se superpone o bien no se superpone al punto B: si el punto supuesto se superpone al punto B, entonces trazamos sobre el segmento BN el plano BNU perpendicular al plano LBN, pues éste es tangente a la superficie B en el punto B, dado que si no es tangente a esta superficie en el punto B, entonces hacemos que la interseque en el mismo punto; es necesario que una parte del plano BNU que termina en el punto B esté en el interior del sólido BSP. Suponemos sobre esta parte el punto U, llevamos el plano BLU y hacemos que se forme en la superficie B la figura QBR, en el plano O el segmento QR y en el plano BNU el segmento BU. Entonces, dado que el punto U está en el interior del sólido BSP pero también pertenece al plano BLU, está en el interior de la superficie que la figura QBR y el segmento QR delimitan. Y debido a que la sección BS es una hipérbola y su eje es BL, y ella se superpone a la figura BQ y el segmento BL es común a los dos, entonces la figura BQ es una hipérbola y su eje es la recta BL, por lo tanto el segmento BU no es perpendicular al segmento BL. Pero dado que el plano BNU es perpendicular al plano BLN y el segmento BN es perpendicular al segmento BL, entonces el plano BNU es perpendicular al segmento BL, y por consiguiente el segmento BU es perpendicular al segmento BL, y esto es imposible.

Entonces el plano BNU es tangente a la superficie B en el punto B y no hay otro plano excepto BNU que sea tangente a la superficie B en el punto B.

Porque si otro plano es tangente a esta superficie en este punto, puesto que este plano corta el plano BNU en el punto B, entonces es necesario que interseque uno de los dos segmentos BN o BU. Sea este segmento BU, y sea el segmento BX la intersección entre este plano y el plano de la sección QR. Pues, ya que este plano es tangente a la superficie B en el punto B, entonces el segmento BX es tangente a la sección QBR en el punto B, y así igualmente para el segmento BU, y esto es imposible: entonces no es tangente a la superficie B en el punto B ningún plano excepto BNU.

El segmento AO no interseca la superficie B si no en el punto B, porque si la interseca en otro punto, entonces el plano BSO forme en la superficie B la figura BP, entonces el segmento AO encuentra la figura SBP — que es una hipérbola cuyo eje es BL— en un punto diferente de B, y esto es imposible, pues el segmento AO no encuentra la superficie B en ningún punto excepto B.

Dado que ya hemos puesto el trozo de vidrio en frente del Sol para que su luz penetre por el orificio hasta el círculo, entonces la luz de un punto sobre la superficie del Sol se propaga sobre la recta que une el centro del orificio y el centro del círculo; el segmento que los une es paralelo al segmento BL, entonces la luz de aquel punto se propaga en el aire sobre la prolongación del segmento BO hasta el punto O, y esta recta es perpendicular a la superficie O; entonces su luz penetra en el vidrio sobre el segmento BO y no encuentra la superficie B excepto en el punto B; entonces no encuentra en el trayecto de BO nada más que vidrio. Está demostrado, entonces, que la luz llega a través del vidrio hasta el punto B; el segmento BO es perpendicular al plano tangente a la superficie B en el punto B y ningún otro plano es tangente a esta superficie en el punto B; por lo tanto la luz del Sol se propaga en el aire sobre la recta AB y no encuentra la superficie B excepto en el punto B, y no encuentra en la trayectoria de AB nada más que aire, entonces es evidente que llega en el aire al punto A.

Si el punto supuesto no coincide con el punto B, hacemos que sea T; trazamos el plano BLT y forme en la superficie B la figura VBW: es una hipérbola, y su eje es BL y su *latus rectum* es igual al segmento BN. Unimos los dos segmentos AT y LT y dividimos el ángulo ATL en dos mitades con el segmento TZ, que es tangente a la sección VBW. Llevamos sobre el segmento TZ el plano perpendicular al plano BLT; este plano es tangente a la superficie B en el punto T y no es tangente a la superficie B en el punto ningún otro plano, como hemos demostrado. Puesto que la superficie BM por BN es cuatro veces la superficie BL por LM, entonces la diferencia entre el segmento AT y el segmento LT es igual al segmento BM. Trazamos el segmento AU' igual al segmento BM, pues el segmento TU' es igual a LT. Llevamos el segmento LU': hacemos que encuentre el segmento TZ en el punto Z; entonces el segmento TZ es un lado común a los dos triángulos TZU' y LTZ y el ángulo ZTU' es igual al ángulo LTZ, por lo tanto el ángulo TZU' es igual al ángulo LZT, el segmento ZU' es perpendicular al segmento TZ, y el segmento ZU' es perpendicular al plano tangente a la superficie B en el punto T. Hacemos la relación del segmento TZ con el segmento I' igual a la relación entre el segmento CE y el segmento CH. Dado que el ángulo CGH es recto y el segmento CE es más corto que el segmento CH, entonces el segmento TZ es más corto que el segmento I'. Trazamos en torno al punto T a la distancia correspondiente al segmento I' una circunferencia: ésta encontrará el segmento trazado desde el punto Z sobre la prolongación del segmento LZ y hacemos que lo encuentre en el punto O'. Unimos el segmento TO': entonces es igual al segmento I'. La relación del segmento TZ con el segmento TO' es igual a la relación entre el segmento CE y el segmento CH. Trazamos el segmento TB_a paralelo al segmento AL: que encuentre la recta LU' en el punto B_a, pues el triángulo $TU'B_a$ es símil al triángulo ALU', entonces la relación del segmento TU' con el segmento TB_a es igual a la relación del segmento AU' con el segmento AL; pero el segmento AU' es igual al segmento BM, y el segmento BM es igual al segmento AK, luego el segmento AU' es igual al segmento AK como es segmento CE es igual al segmento CI. La relación del segmento AK con el segmento AB es igual a la relación del segmento CI con el segmento CJ, y el segmento BK es igual al segmento BL como el segmento IJ es igual al segmento HJ. Entonces la relación del segmento AU' con el segmento AL es igual a la relación del segmento CE con el segmento CH, y a relación del segmento TU' con el segmento B_aT es igual a la relación del segmento CE con el segmento CH. Pero la relación del segmento TZ con el segmento TO' es igual a la relación del segmento CE con el segmento CH, entonces la relación del segmento TZ con el segmento TO' es igual a la relación del segmento TU' con el segmento B_aT, y la relación del segmento TZ con el segmento TU' es igual a la relación <del segmento> TO' con el segmento TB_a. El segmento TZ es más corto que el segmento TU', luego el segmento TO' es más corto que el segmento TB_a, y el punto O' está entre los dos puntos Z y B_a. Hacemos que el segmento TB_a encuentre la superficie O en el punto B_b, entonces el segmento TB_b es perpendicular a la superficie O. Trazamos el segmento TB_c sobre la prolongación del segmento TZ, entonces el ángulo B_bTB_c es agudo, y es igual al ángulo ZTB_a: el ángulo ZTB_a es más amplio que el ángulo ZTO', luego el ángulo B_bTB_c es más amplio que el ángulo ZTO'. Los dos segmentos AT y TB_b no encuentran la superficie B en ningún punto excepto T, porque, si la encuentran en otro punto entonces encontrarán la sección VBW en un punto diferente de T, y esto es imposible. Entonces los dos segmentos no encuentran la superficie B excepto en el punto T.

La luz de un punto sobre la superficie del Sol se propaga sobre la prolongación del segmento TB_b hasta el punto B_b, y sobre el segmento TB_b hasta el punto T y sobre el segmento AT hasta el punto A, y así para todos los puntos supuestos sobre la superficie B. Entonces, la luz del Sol penetra desde todo el plano O hasta toda la superficie B, excepto la posición de los dos puntos de mira y de lo que está encima de éstos, y de toda la superficie B excepto esa posición hasta el punto A; luego se incendia en este punto, y eso es lo que queríamos demostrar.

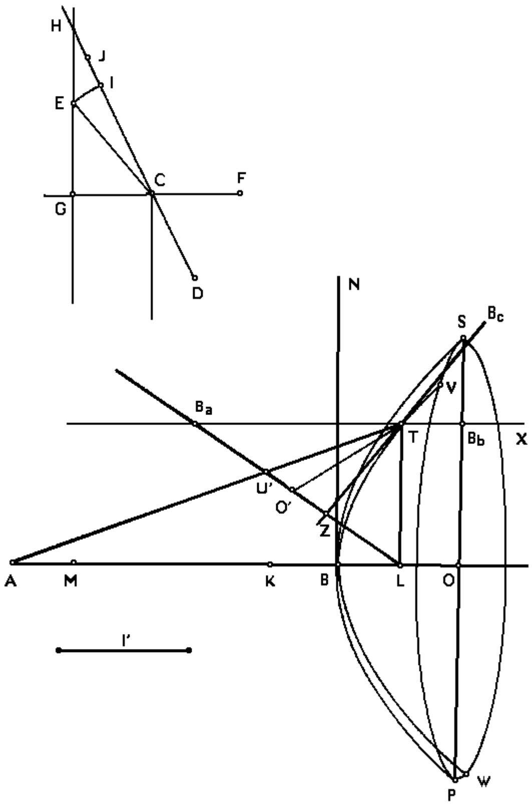

figura 6: véase Rashed, 1993, página 30, figura 13

<EL TRAZADO CONTINUADO DE LA HIPÉRBOLA >

Si el incendio no tiene lugar a una distancia cercana, hacemos sobre el segmento AL un arco de ángulo obtuso, y sea este AML [figura 14]; trazamos en torno al punto A a la distancia del segmento AK una circunferencia: hacemos que encuentre el arco AML en el punto M; y trazamos los dos segmentos LM y AMN; el ángulo AML es obtuso, por lo que el ángulo LMN es agudo. Hacemos el ángulo MLS igual al ángulo LMN: el ángulo MLS es agudo, luego el segmento MN encuentra el segmento LS: suponemos que lo encuentre en el punto N. Llevamos el segmento OAP perpendicular al segmento AB y hacemos el segmento AO igual al segmento AP. Es necesario que ninguno de los dos segmentos AB y KL sea más corto que el segmento OP. Trazamos en torno al punto A a la distancia del segmento AO la semicircunferencia OP; trazamos el segmento LU perpendicular al segmento AL y lo hacemos igual al segmento AO; trazamos el segmento UOQ, y ponemos sobre eso el punto Q y trazamos el segmento QR perpendicular al plano ALM y el segmento BX perpendicular al segmento AB: que éste encuentre y encuentre el segmento OU en el punto X. Suponemos sobre el segmento OX el punto V, hacemos el segmento UV igual al segmento OQ, y el segmento VW perpendicular al plano ALM, y lo hacemos igual al segmento QR. Unimos el segmento RW, trazamos en torno al punto B a la distancia BX la circunferencia X y llevamos el segmento BZ sobre la prolongación del segmento BX: hacemos que el segmento BZ encuentre la circunferencia X en el punto Z. Unimos PZ, y trazamos el segmento LU' perpendicular al segmento LN y el segmento I'AO' paralelo al segmento LU': éste encuentre la semicircunferencia O en el punto I'. Completamos la semicircunferencia I'O', trazamos el segmento I'B_a perpendicular a AI' y lo hacemos igual al segmento OQ; trazamos el segmento B_aB_b perpendicular al plano ALM y lo hacemos igual al segmento QR, y hacemos el segmento LU' igual al segmento LU. Trazamos el segmento NB_c perpendicular al segmento LN y lo hacemos igual al segmento LU'; trazamos el segmento U'B_cB_d y lo hacemos igual al segmento UT. Hacemos el segmento U'B_e igual al segmento UV; trazamos el segmento B_eB_f perpendicular al plano ALM y lo hacemos igual al segmento VW. Unimos el segmento B_bB_f y trazamos en torno al punto N a la distancia del segmento NB_c la circunferencia B_c, y trazamos los dos segmentos AB_g y NB_h perpendiculares al segmento AN: hacemos que encuentren la semicircunferencia I' y la circunferencia B_c en los dos puntos B_g y B_h, y unimos el segmento B_gB_h y el segmento B_aB_e. Puesto que el segmento B_eB_f es igual a VW y el segmento VW es igual a QR y el segmento QR es igual al segmento B_aB_b, entonces el segmento B_eB_f es igual al segmento B_aB_b y los dos son perpendiculares al plano ALM, entonces el segmento B_bB_f es igual al segmento B_aB_e. Unimos los dos segmentos LB_e y AB_a. Debido a que el segmento U'B_e es igual al segmento UV, y a que el segmento UV es igual a la recta OQ, y además el segmento OQ es igual al segmento I'B_a, entonces el segmento U'B_e es igual al segmento I'B_a. Ya que el segmento LU' es igual al segmento LU, y el segmento LU es igual que el segmento AO —porque la superficie AU tiene ángulos rectos—, el segmento AO es igual al segmento AI', y cada uno de los dos ángulos LU'B_e y AI'B_a es recto, entonces el segmento LB_e es igual que el segmento AB_a, y el ángulo U'LB_e es igual al ángulo I'AB_a y el segmento LU' es paralelo al segmento AI', entonces el segmento LB_e es paralelo al segmento AB_a y es igual a éste; entonces el segmento B_aB_e es igual al segmento AL y el plano AU tiene ángulos rectos; entonces el segmento AL es igual al segmento OU y el segmento UV es igual al segmento OQ: el segmento OU es igual que el segmento QV y el segmento VW es igual al segmento QR y son perpendiculares al plano ALM, entonces el segmento QV es igual al segmento RW; por lo tanto el segmento B_bB_f es igual que el segmento RW.

Trazamos el segmento SB_d perpendicular al segmento LS: entonces la superficie NB_d tiene ángulos rectos, entonces el segmento B_cB_d es igual al segmento NS. Ya que el segmento AB_g es igual al segmento NB_h y ya que son perpendiculares al segmento AN, entonces el segmento AN es igual al segmento B_gB_h, y la suma de los dos segmentos B_gB_h y B_cB_d es igual a la suma de los dos segmentos AN y NS. Puesto que el ángulo MLN es igual al ángulo NML, el segmento LN es igual al segmento MN, y la suma de las dos rectas MN y MS es igual al segmento LS; la superficie LB_d tiene ángulos rectos, entonces el segmento LS es igual que el segmento U'B_d y el segmento U'B_d es igual al segmento UT. Trazamos el segmento TB_i perpendicular al segmento AB: luego la superficie LT tiene ángulos rectos, y el segmento UT es igual al segmento LB_i; el segmento BL es igual al segmento BK, entonces el segmento LB_i es igual a la suma de los dos segmentos BK y BB_i, y la suma de los dos segmentos MN y NS es igual a la suma de los dos segmentos BK y BB_i. El punto A es el centro del círculo KM, entonces el segmento AM es igual al segmento AK, la suma de los dos segmentos AN y NS es igual a la suma de los dos segmentos AB y BB_i y la superficie BP tiene ángulos rectos: entonces el segmento AB es igual al segmento PZ y la superficie BT tiene ángulos rectos, luego el segmento BB_i es igual al segmento XT, y la suma de los dos segmentos AB y BB_i es igual a la suma de los dos segmentos PZ y XT. Por lo tanto la suma de los dos segmentos B_gB_h y B_cB_d es igual a la suma de los dos segmentos PZ y XT, y el segmento NB_c es paralelo al segmento LU', y el segmento LU' es paralelo al segmento AI': entonces el segmento NB_c es paralelo al segmento AI', y el segmento NB_h es paralelo al segmento AB_g, entonces el ángulo B_cNB_h es igual al ángulo $I'AB_g$, y el segmento NB_c es igual al segmento LU', pero el segmento LU' es igual al segmento LU y el segmento LU es igual al segmento AO: entonces el segmento NB_c es igual al segmento AO, y el arco B_cB_h es igual al arco $I'B_g$; entonces la suma de los dos arcos $O'B_g$ y B_cB_h es igual a la semicircunferencia I'; pero la semicircunferencia I' es igual a la semicircunferencia O, y el segmento AO es igual al segmento BX entonces la semicircunferencia O es igual a la semicircunferencia X, y la suma de los dos arcos $O'B_g$ y B_cB_h es igual a la semicircunferencia X, entonces la suma del arco $O'B_g$ y del segmento B_gB_h y del arco B_cB_h y del segmento B_cB_d es igual a la suma del segmento PZ y de la semicircunferencia X y del segmento XT. El segmento AN es más largo que el segmento AB, porque si no es más largo que éste, entonces o bien es igual a éste, o bien es más corto que éste. Si el segmento AN es igual a AB, entonces, puesto que la suma de los dos segmentos AN y NS es igual a la suma de los dos segmentos AB y BB_i, el segmento NS es igual al segmento BB_i y el segmento LS es igual al segmento LB_i, entonces el segmento LN es igual al segmento BL, y la suma de los dos segmentos AN y LN es igual al segmento AL; pero en realidad es más grande que éste, y esto es imposible. Si el segmento AN es más corto que el segmento AB, entonces, ya que la suma de los dos segmentos AN y NS es igual a la suma de los dos segmentos AB y BB_i, el segmento NS es más largo que el segmento BB_i, y el segmento LS es igual al segmento LB_i, entonces el segmento LN es más corto que el segmento BL, y la suma de los dos segmentos AL y LN es más pequeña que el segmento AL, pero en realidad dicha suma es más grande que el segmento, y esto es imposible.

Entonces el segmento AN es más largo que el segmento AB, y el segmento AB no es más corto que el segmento OP, y el segmento OP es igual a la suma de los dos segmentos AO y NB_c, entonces el segmento AN es más largo que la suma de los dos segmentos AO y NB_c, luego la semicircunferencia I' y la circunferencia B_c no se encuentran. El segmento AB no es más corto que el segmento OP, y el segmento OP es igual a la suma de los dos segmentos AO y BX entonces la semicircunferencia O y la circunferencia X no se cortan. Suponemos dos sumas y una circunferencia que se superponen a la suma de la semicircunferencia O y de los dos segmentos OQ y QR y a la suma de las rectas LU, UV y VW, y a la circunferencia X — suponemos que sean límites de cuerpos difíciles de doblar — y una suma que se superpone a la suma del segmento PZ y de la semicircunferencia X y del segmento XT — suponemos que sea difícil de dilatar y fácil de doblar — hacemos que se superpongan con la semicircunferencia y el segmento que se superponen a la circunferencia O y al segmento UT en los dos punto P y T; y un segmento que se superpone al segmento RW, y suponemos que sea difícil de dilatar y fácil de doblar y que coincida con los dos segmentos que se superponen a los dos segmentos QR y VW en los dos puntos R y W. Luego fijamos los dos puntos que se superponen a los dos puntos A y L y nos apoyamos sobre el punto que se superpone al punto B en el lado de una circunferencia cuyo centro es el punto N desde el punto B hasta el punto N. Es necesario que la fuerza que actúa sobre cada uno de los dos cuerpos fáciles de doblar sea menor que una fuerza que, cuando actúa sobre ellos, no los dilata de modo apreciable a la percepción; entonces no se dilatan por la fuerza que actúa sobre ellos en la realidad. El punto y la circunferencia y las sumas y el segmento que se superponen al punto B, y a la circunferencia X, y a la suma de los segmentos LU, UV y VW, y a la suma de la semicircunferencia O y de los dos segmentos OQ y QR, y a la suma del segmento PZ y de la semicircunferencia X y del segmento XT y del segmento RW, se mueven hasta superponerse al punto N, y a la circunferencia B_c, y a la suma de los segmentos LU', U'B_e y B_eB_f, y a la suma de la semicircunferencia I' y de los dos segmentos I'B_a y B_aB_b y a la suma del arco O'B_g y del segmento B_gB_h y del arco B_cB_h y del segmento B_cB_d y del segmento B_bB_f, cada uno a su propio correspondiente.

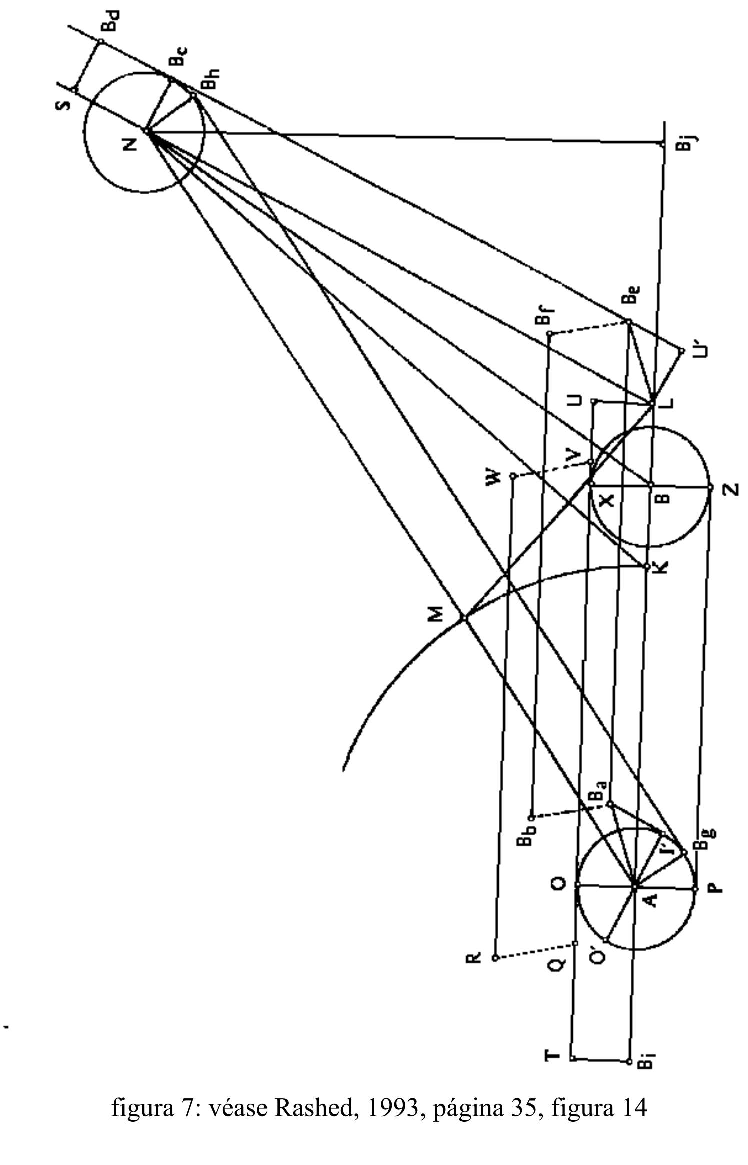

figura 7: véase Rashed, 1993, página 35, figura 14

Del movimiento de este punto se origina la trayectoria BN. Unimos el segmento KN; puesto que el segmento AN pasa por el centro del círculo KM, entonces el segmento MN es más corto que el segmento KN, pero el segmento MN es igual al segmento LN, luego el segmento LN es más corto que el segmento KN y el segmento BL es igual al segmento BK. Unimos el segmento BN: éste es un lado común a los dos triángulos BLN y BKN; por lo tanto el ángulo LBN es más pequeño que el ángulo KBN, entonces el ángulo LBN es agudo. Trazamos el segmento NB_j perpendicular al segmento AL; el segmento LB_j se halla sobre la prolongación del segmento AB, y el segmento NB_j no encuentra la trayectoria BN excepto en el punto N. Porque si la encuentra en otro punto, entonces suponemos que la encuentre en el punto B_k. Porque el punto y la circunferencia y la suma y el segmento que se superponen al punto B, y a la circunferencia X, y a la suma de los segmentos LU, UV y VW, y a la suma de la semicircunferencia O y de los dos segmentos OQ y QR, y a la suma del segmento PZ, y de la semicircunferencia X, y del segmento XT y del segmento RW cuando se mueven se superponen a sus correspondientes en el punto B_k antes de superponerse a sus correspondientes en el punto N. Que sus correspondientes a los que se superponen en el punto B_k sean el punto B_k, la circunferencia B_l, la suma de los segmentos LB_m, B_mB_s y B_sB_o, la suma de la semicircunferencia B_p y de los dos segmentos B_pB_q y B_qB_r, la suma del arco B_uB_x y el segmento B_xB_t y del arco B_lB_t y del segmento B_lB_n y el segmento B_oB_r. Entonces, la suma del arco B_uB_x, del segmento B_xB_t, del arco B_lB_t y del segmento B_lB_n es igual a la suma del segmento PZ, de la semicircunferencia X y del segmento XT. Llevamos el segmento LB_kB_v y el segmento B_nB_v perpendicular al segmento LB_v, y unimos el segmento B_sB_q. Ya que el segmento B_sB_o es igual al segmento VW, y el segmento VW es igual al segmento QR, y el segmento QR es igual al segmento B_qB_r, entonces el segmento B_sB_o es igual al segmento B_qB_r, y éstos son perpendiculares al plano ALM, luego el segmento B_sB_q es igual al segmento B_oB_r, y el segmento B_oB_r es igual al segmento RW, y el segmento RW es igual al <segmento> AL, entonces el segmento B_sB_q es igual al segmento AL. Unimos los otros dos segmentos LB_s y AB_q y los dos segmentos LV y AQ; el triangulo LB_mB_s se superpone al triángulo LUV, y el triángulo LUV al triángulo AOQ, y el triángulo AOQ al triángulo AB_pB_q; entonces el triángulo LB_mB_s se superpone al triángulo AB_pB_q y el segmento LB_s es igual al segmento AB_q y el segmento B_sB_q es igual al segmento AL; entonces el segmento LB_s es paralelo al segmento AB_q y el ángulo B_mLB_s es igual al ángulo B_pAB_q; entonces el segmento AB_p es paralelo al segmento LB_m. Luego la suma del arco B_uB_x, y del segmento B_xB_t, y del arco B_lB_t y del segmento B_lB_n es igual a la suma de los dos segmentos AB_k y B_kB_v y de la semicircunferencia B_p, como hemos demostrado antes.

La suma del segmento PZ, y de la semicircunferencia X, y del segmento XT es igual a la suma de los dos segmentos AB y BB_i y de la semicircunferencia O; entonces la suma de los dos segmentos AB_k y B_kB_v y de la semicircunferencia B_p es igual a la suma de los dos segmentos AB y BB_i y de la semicircunferencia O. La semicircunferencia B_p es igual a la semicircunferencia O, entonces la suma de los dos segmentos AB_k y B_kB_v es igual a la suma de los dos segmentos AB y BB_i. Hacemos que el segmento AB_k encuentre la circunferencia KM en el punto B_w; el segmento AB_w es igual al segmento AK, entonces la suma de los dos segmentos B_kB_w y B_kB_v es igual a la suma de BK y BB_i. La suma de los dos segmentos BK y BB_i es igual al segmento LB_i, y el segmento LB_i es igual al segmento UT, y el segmento UT es igual al segmento B_mB_n, y el segmento B_mB_n es igual al segmento LB_v. Entonces la suma de los dos segmentos B_kB_w y B_kB_v es igual al segmento LB_v, entonces el segmento B_kB_w es igual al segmento LB_k. Hacemos el segmento B_jB_z igual al segmento LB_j, y unimos la recta B_kB_z. Puesto que el segmento B_kB_j es perpendicular al segmento LB_z, entonces el segmento B_kB_z es igual al segmento LB_k. Trazamos en torno al punto B_k a la distancia LB_k una circunferencia: ésta pasa por los puntos L, B_w y B_z. Llevamos el segmento $B_kB_{u'}$ sobre la prolongación del segmento AB_k, y hacemos que encuentre la circunferencia L en el punto $B_{u'}$; entonces el segmento LB_k es igual al segmento $B_kB_{u'}$ y la suma de los dos segmentos AB_k y LB_k es igual al segmento $AB_{u'}$. La superficie $AB_{u'}$ por AB_w es igual a la superficie AL por AB_z, entonces la superficie de la suma de los dos segmentos AB_k y LB_k por AB_w es igual a la superficie AL por AB_z. Así demostramos que la superficie de la suma de los dos segmentos AN y LN por AM es igual a la superficie AL por AB_z. Entonces la superficie de la suma de los dos segmentos AB_k y LB_k por AB_w es igual a la superficie de la suma de los dos segmentos AN y LN por AM. EL segmento AB_w es igual al segmento AM, entonces la suma de los dos segmentos AB_k y LB_k es igual a la suma de los dos segmentos AN y LN; el segmento AB_k es más corto que el segmento AN, porque este segmento está más cerca del segmento AB_j — la perpendicular al segmento NB_j — que el segmento AN; entonces el segmento LB_k es más largo que el segmento LN y está más cerca del segmento LB_j que el segmento LN, y esto es imposible.

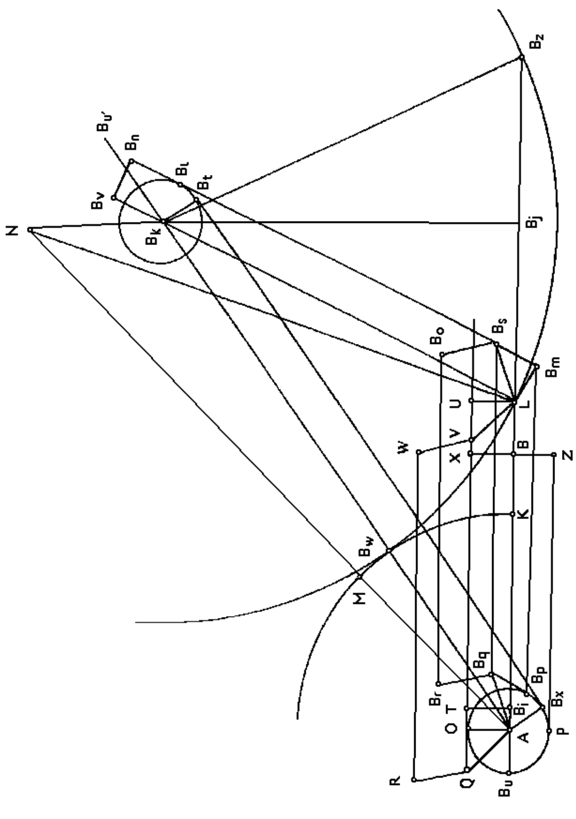

figura 8: véase Rashed, 1993, página 38, figura 15

Entonces el segmento NB_j no encuentra la trayectoria BN excepto en el punto N.

Luego fijamos el segmento BB_j y hacemos rotar en torno a éste la superficie limitada por la figura BN y por los dos segmentos BB_j y NB_j, hasta que el punto describe la circunferencia $NB_{i'}$, y se forma el sólido BNB_i; entonces modelamos uno igual que éste con dos miras, como hemos descrito antes, de la misma sustancia que hemos utilizado ya, y lo pulimos, excepto las dos miras y aquello que está sobre ellas. Es necesario que la luz del Sol, si penetra por toda la superficie B_j hasta toda la superficie B, excepto la posición de los dos puntos de mira, y por consiguiente lo que está sobre ellos, y desde toda la superficie B, excepto esa misma posición, hasta el punto A, se incendie en este punto.

Yo digo que la luz del Sol penetra desde toda la superficie B_j hasta toda la superficie B excepto la posición de los dos puntos de mira y lo que está sobre éstos y desde toda la superficie B excepto esa posición hasta el punto A, entonces se incendia en este punto.

Demostración: suponemos sobre la superficie B un punto: o bien se superpone al punto B o bien no se superpone a éste. Si el punto supuesto se superpone al punto B, trazamos el plano BNB_j, y hacemos que se forme sobre la superficie B la figura $NBB_{i'}$, y en la superficie B_j el segmento $NB_{i'}$. Trazamos en el plano BLN el segmento $B_{o'}B$ perpendicular al segmento BL; el segmento $B_{o'}C_a$ es tangente a la figura $NBB_{i'}$ en el punto B. Porque si no es tangente a la figura en el punto B, entonces hacemos que la corte en ese punto. Es necesario que una parte del segmento $B_{o'}C_a$ que acaba en el punto B se halle en el interior de la superficie delimitada por la figura $NBB_{i'}$ y por la recta $NB_{i'}$: sea esa parte el segmento BC_a. Unimos el segmento $BB_{i'}$: ya que el ángulo $LBB_{i'}$ es igual al ángulo LBN, y el ángulo LBN es agudo, entonces el ángulo $LBB_{i'}$ es agudo, el ángulo LBC_a es recto, luego el ángulo LBC_a es más amplio que el ángulo $LBB_{i'}$, entonces el segmento BC_a está en el interior de la superficie delimitada por la figura $BB_{i'}$ y por la recta $BB_{i'}$. El segmento BC_a encontrará la figura $BB_{i'}$: hacemos que la encuentre en el punto C_a. Unimos los dos segmentos AC_a y C_aL. Hacemos que el segmento AC_a interseque la circunferencia K en el punto C_b. Entonces dado que la figura BN se superpone a la figura $BB_{i'}$, y los dos puntos A y L son comunes a las dos figuras**,** y el segmento B_kB_w es igual al segmento LB_k, entonces el segmento C_aC_b es igual al segmento LC_a, y el ángulo LBC_a es agudo como hemos demostrado antes; pero en realidad es recto, y esto es imposible.

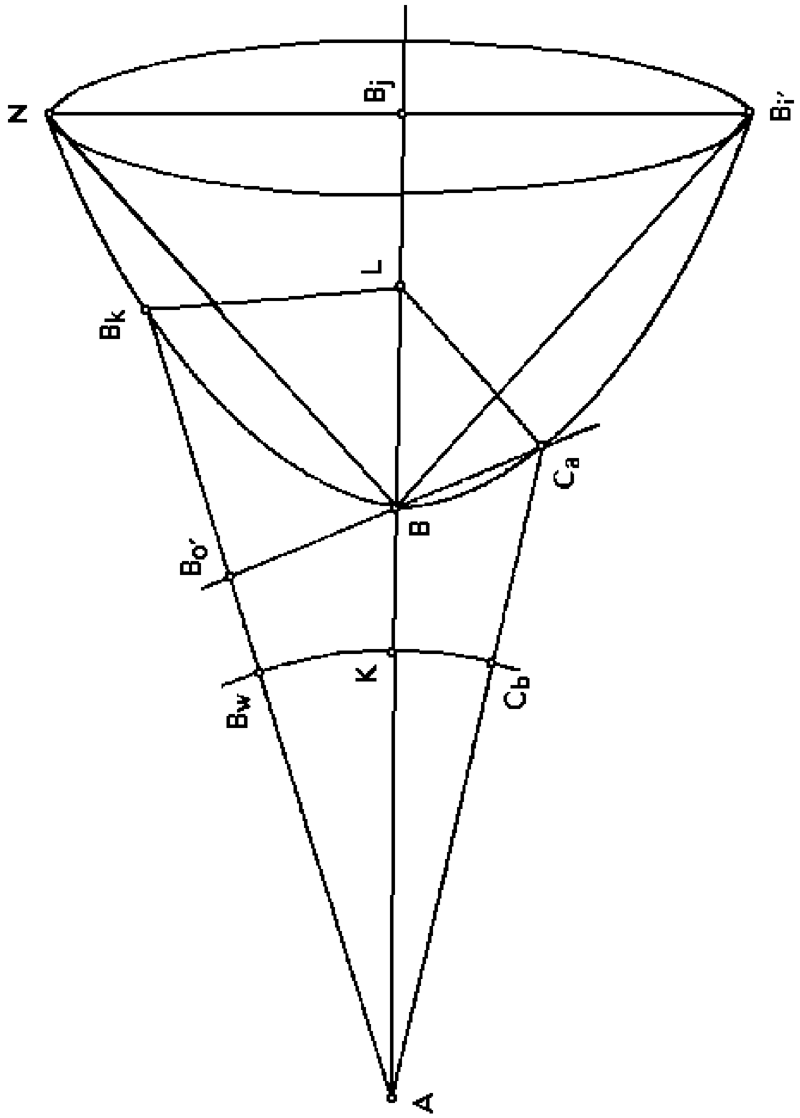

figura 9: véase Rashed, 1993, página 40, figura 16

El segmento $B_{o'}C_a$ es tangente a la figura $NBB_{i'}$ en el punto B. No es tangente a la figura $NB_{i'}B$ en el punto B ningún otro segmento excepto el segmento $B_{o'}C_a$. Porque si es tangente en ese punto otro segmento, suponemos que sea BC_c, que se halla entre éste y el segmento LB. Dado que el ángulo LBC_a es recto, entonces el ángulo LBC_c es agudo. Trazamos el segmento LC_d perpendicular al segmento C_cB: es necesario que una parte del segmento BC_c

que acaba en el punto B esté en el exterior de la superficie delimitada por la figura $NBB_{i'}$ y por la recta $NB_{i'}$. Suponemos sobre esta parte el punto C_c, y unimos el segmento LC_c. Puesto que éste está más cerca del segmento LC_d — la perpendicular al segmento BC_d — que el segmento B_l, entonces el segmento LC_c es más corto que el segmento BL. Trazamos el segmento AC_c, y hacemos que encuentre la circunferencia K en el punto C_e y la figura NB en el punto C_f. Unimos el segmento LC_f; entonces el segmento C_eC_f es igual al segmento LC_f, entonces el segmento C_cC_e es más corto que el segmento LC_c. El segmento LC_c es más corto que el segmento BL, y el segmento BL es igual al segmento BK. Entonces el segmento C_cC_e es más corto que el segmento BK, y el segmento AC_e es igual al segmento AK, entonces la suma de los dos segmentos AC_c y LC_c es más pequeña que el segmento AL; pero en realidad es más grande que éste, y esto es imposible. Entonces no es tangente a la figura $NBB_{i'}$ en el punto B ningún segmento excepto $B_{o'}C_a$.

Trazamos sobre el segmento $B_{o'}C_a$ un plano perpendicular al plano BLN: es tangente a la superficie B en el punto B y no es tangente a la superficie B en ese punto ningún otro plano como hemos dicho antes.

El segmento AL no encuentra la superficie B en ningún otro punto excepto B, porque si la encuentra en otro punto, entonces encontrará la figura $NBB_{i'}$ en un punto diferente de B, y el segmento KL estará dividido en dos mitades en un punto diferente de B, y esto es imposible. Entonces el segmento AL no encuentra la superficie B en ningún punto excepto B.

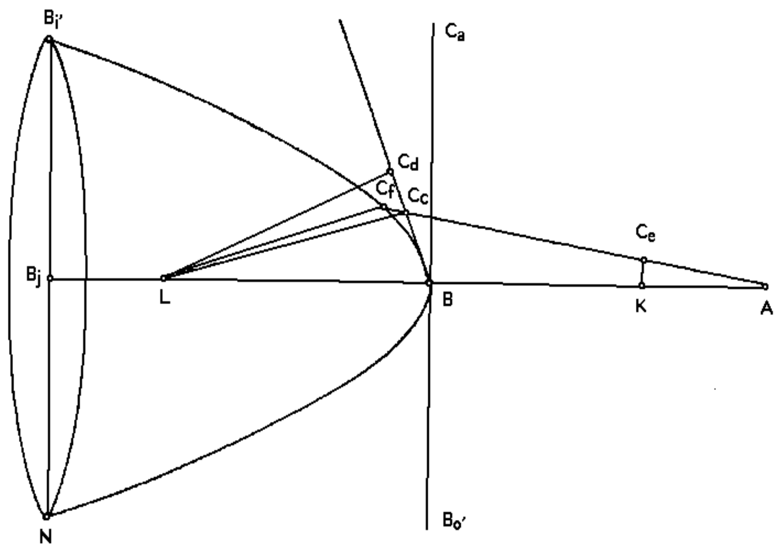

figura 10: véase Rashed, 1993, página 42, figura 17

Entonces la luz del Sol se propaga sobre la prolongación del segmento BB_j hasta el punto B_j, y sobre el segmento BB_j hasta el punto B, y sobre el segmento AB hasta el punto A.

Si el punto supuesto no se superpone al punto B, entonces hacemos que sea C_g este punto. Trazamos el plano BLC_g: hacemos que se forme en la superficie B la figura C_hBC_i, y en la superficie B_j el segmento C_hC_i. Unimos los dos segmentos AC_g y LC_g, y dividimos el ángulo AC_gL en dos mitades con el segmento $C_jC_gC_k$: éste es tangente a la figura C_hBC_i en el punto C_g. Porque si no es tangente en ese punto, entonces suponemos que la interseque en este punto. Es necesario que una parte del segmento C_jC_k que acaba en el punto C_g esté en el interior de la superficie delimitada por la figura C_hBC_i y por la recta C_hC_i. Suponemos sobre esta parte el punto C_k, y hacemos el segmento AC_l igual al segmento AK, entonces el segmento C_gC_l es igual al segmento LC_g. Unimos los dos segmentos C_kC_l y LC_k: el segmento C_gC_k es un lado común a los dos triángulos $C_gC_kC_l$ y LC_gC_k, y el ángulo $C_kC_gC_l$ es igual al ángulo LC_gC_k, porque el ángulo AC_gC_j es igual al ángulo LC_gC_j; entonces el segmento C_kC_l es igual al segmento LC_k. Unimos el segmento AC_k, y hacemos sobre éste el segmento AC_m igual al segmento AC_l.

Puesto que el segmento AC_k es más corto que la suma de los dos segmentos AC_l y C_kC_l, entonces el segmento C_kC_m es más corto que el segmento C_kC_l, y el segmento C_kC_m es más corto que el segmento LC_k. Suponemos que el segmento AC_k encuentre la figura C_hBC_i en el punto C_n, y unimos el segmento LC_n: entonces el segmento C_mC_n es más corto que el segmento LC_n. Pero en realidad es igual que éste, y esto es imposible. Por lo tanto el segmento C_jC_k es tangente a la figura C_hBC_i en el punto C_g.

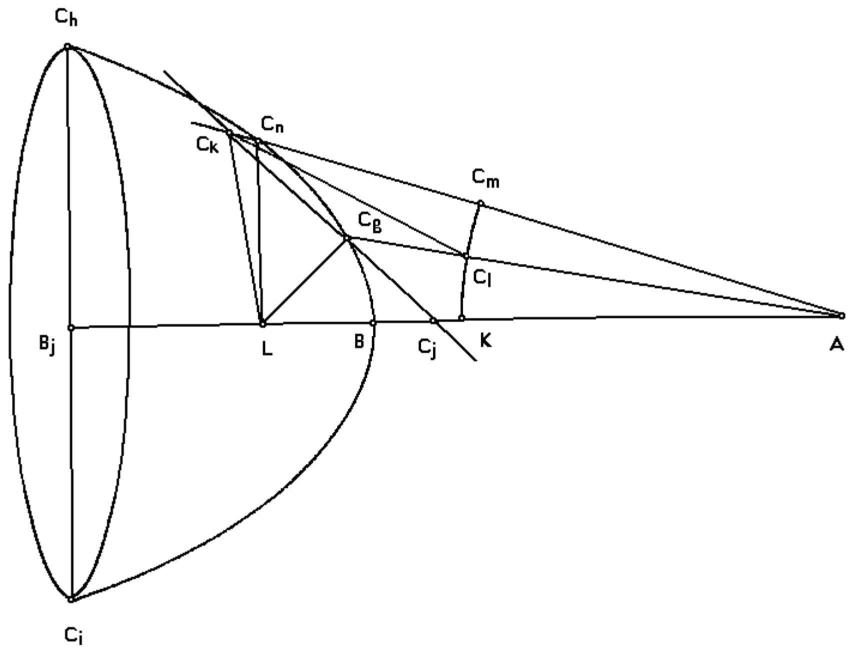

figura 11: véase Rashed, 1993, página 43, figura 18

Hacemos que no sea tangente a la figura C_hBC_i en el punto C_g ningún segmento excepto C_jC_k. Porque si otro segmento es tangente en este punto, entonces suponemos que este segmento sea C_gC_s. Hacemos el ángulo $C_sC_gC_o$ igual al ángulo LC_gC_s, y el segmento C_gC_o

igual al segmento LC_g, y trazamos los segmentos AC_h, AC_i y AC_o. Hacemos que el segmento C_gC_s interseque el segmento AC_h en el punto C_p, y el segmento AC_i en el punto C_u y el segmento AC_o en el punto C_q. Es necesario que una parte del segmento C_gC_s acabe en un punto que esté en el exterior de la superficie delimitada por la figura C_hBC_i y por el segmento C_hC_i. Suponemos sobre esta parte un punto que está entre el punto C_g y el punto C_q y uno de los dos puntos C_p y C_u, y hacemos que este punto sea C_s. Unimos los dos segmentos LC_s y C_sC_o. Puesto que el segmento C_gC_o es igual al segmento LC_g, y el segmento C_gC_s es una lado común a los dos triángulos $C_gC_sC_o$ y LC_gC_s, entonces el ángulo $C_sC_gC_o$ es igual al ángulo LC_gC_s, y el segmento C_sC_o es igual al segmento LC_s. Trazamos en torno al punto A a la distancia del segmento AC_l la circunferencia C_r, y en torno al punto C_g a la distancia del segmento C_gC_l la circunferencia C_x. Dado que cada uno de los dos segmentos C_gC_l y C_gC_o es igual al segmento LC_g, entonces el segmento C_gC_l es igual al segmento C_gC_o; la circunferencia C_x pasa por los dos puntos C_l y C_o y es tangente a la circunferencia C_r en el punto C_l. Unimos el segmento AC_s: que encuentre la circunferencia C_r en el punto C_r, y la circunferencia C_x en el punto C_x. El segmento C_sC_r es más largo que el segmento C_sC_x, y el segmento C_sC_x es más largo que el segmento C_sC_o, porque el segmento C_sC_x está más cerca del segmento C_gC_s — que pasa por el centro de la circunferencia C_x — que el segmento C_sC_o. El segmento C_sC_o es igual al segmento LC_s, entonces el segmento C_sC_r es más largo que el segmento LC_s.

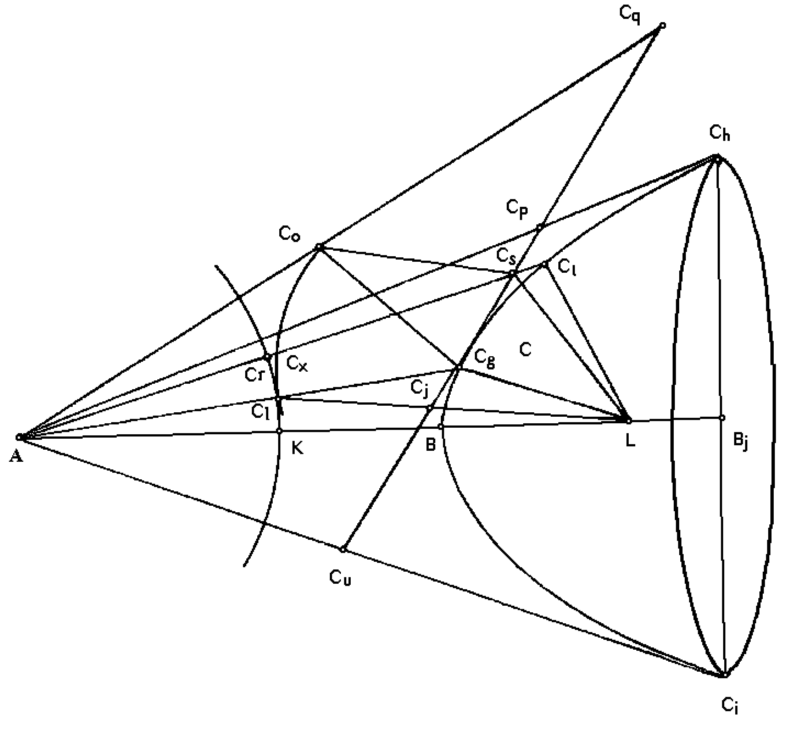

figura 12: véase Rashed, 1993, página 45, figura 19

Hacemos que el segmento AC_s encuentre la figura C_hBC_i en el punto C_t. Unimos el segmento LC_t: el segmento C_rC_t es más largo que el segmento LC_t. Ya que el segmento AC_r es igual al segmento AC_l, y el segmento AC_l es igual al segmento AK, entonces el segmento AC_r es igual al segmento AK, y el segmento C_rC_t es igual al segmento LC_t, y esto es imposible. Entonces ningún segmento es tangente a la figura C_hBC_i en el punto C_g <excepto el segmento C_gC_j. Trazamos sobre el segmento C_gC_j una superficie plana perpendicular al plano ALC_g>, entonces ésta es tangente a la superficie B en el punto C_g, y no es tangente en este punto ningún otro plano, como hemos demostrado antes.

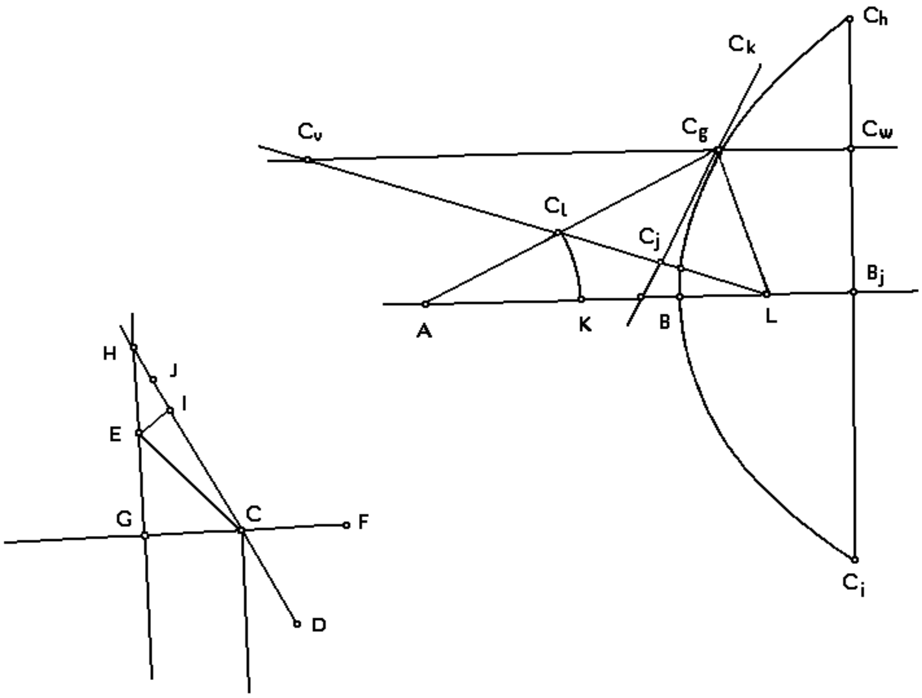

figura 13: véase Rashed, 1993, página 46, figura 20

Trazamos el segmento LC_l: hacemos que interseque el segmento C_jC_k en el punto C_j. Puesto que el segmento C_gC_l es igual al segmento LC_g, y el segmento C_gC_j es una lado común a los dos triángulos $C_gC_jC_l$ y LC_gC_j, y el ángulo $C_jC_gC_l$ es igual al ángulo LC_gC_j, entonces el ángulo $C_gC_jC_l$ es igual al ángulo LC_jC_g, y el ángulo $C_gC_jC_l$ es recto, y el segmento C_jC_l es perpendicular al plano tangente a la superficie B en el punto C_g. Llevamos el segmento C_gC_v paralelo al segmento AL: hacemos que encuentre el segmento LC_l en el punto C_v. El triángulo $C_gC_lC_v$ es semejante al triángulo ALC_l, entonces la relación del segmento C_gC_l con el segmento C_gC_v es igual a la relación del segmento AC_l con el segmento AL. El segmento AC_l es igual al segmento AK, como también el segmento CE es igual al segmento CI, y la relación del segmento AK con el segmento AB es igual a la relación del segmento CI con la recta CJ, y el segmento BK es igual al segmento BL, como el segmento IJ es igual al segmento HJ; entonces la relación del segmento AC_l con el segmento AL es igual a la relación del segmento CE con el segmento CH; la relación del segmento C_gC_l con el segmento C_gC_v es igual a la relación del segmento CE con el segmento CH. Que el segmento C_gC_v interseque la superficie B_j en el punto C_w; entonces el segmento C_vC_w no encuentra la superficie B en otro punto excepto en C_g. Porque si la interseca en otro punto, entonces intersecará también la figura C_hBC_i en otro punto: suponemos que interseque en el punto C_z. Por lo tanto, ya que el segmento C_gC_l es igual al segmento LC_g, el ángulo LC_lC_g es igual al ángulo C_gLC_l, y el ángulo LC_lC_g es agudo, y el ángulo AC_lL es obtuso. Unimos el segmento AC_z, y hacemos que interseque el segmento LC_l en el punto $C_{u'}$. El segmento $AC_{u'}$, es por lo tanto más grande que el segmento AC_l. Separamos de la recta $AC_{u'}$ el segmento $AC_{i'}$ igual al segmento AC_l. Dado que el segmento AC_l es igual al segmento AK, entonces el segmento $AC_{i'}$ es igual al segmento AK. Unimos el segmento LC_z; entonces el segmento $C_zC_{i'}$ es igual al segmento LC_z. Unimos el segmento $LC_{i'}$; entonces, ya que el punto $C_{i'}$ está en el interior del triángulo ALC_l, el ángulo $AC_{i'}L$ es más amplio que el ángulo AC_lL, entonces el ángulo $LC_{i'}C_z$ — y éste es igual al ángulo $C_zLC_{i'}$ — es más pequeño que el ángulo LC_lC_g; pero en realidad es igual al ángulo C_gLC_l, entonces el ángulo $C_zLC_{i'}$ es más pequeño que el ángulo C_gLC_l; pero en realidad es más amplio que éste, y esto es imposible.

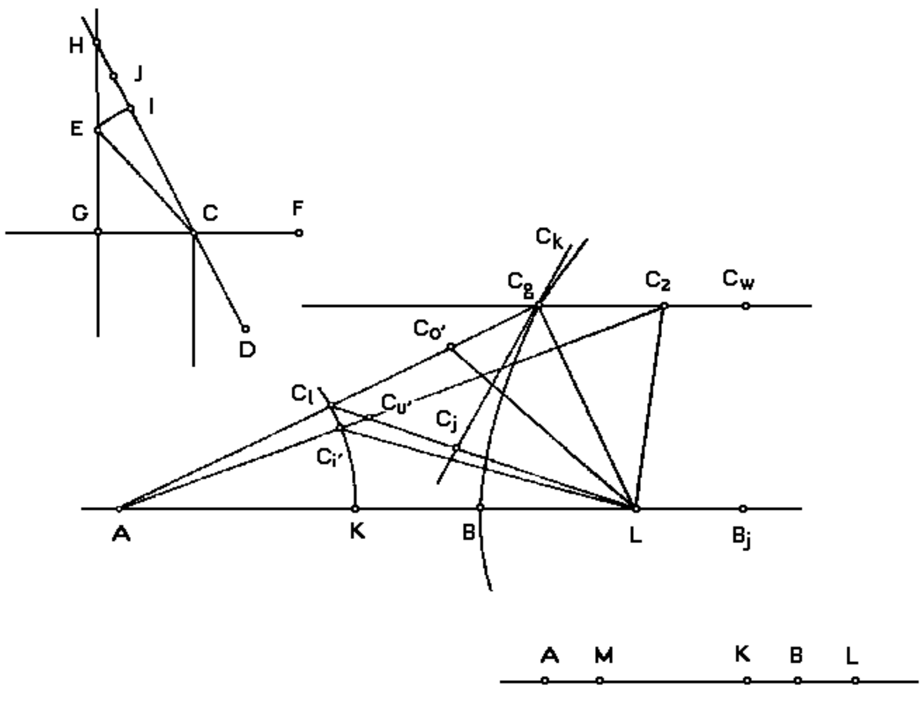

figura 14: véase Rashed, 1993, página 48, figura 21

El segmento C_gC_w no interseca la superficie B en ningún punto excepto C_g y el segmento AC_g no interseca la superficie B en ningún punto excepto en C_g. Porque si la interseca en otro punto entonces encontrará la figura C_hBC_i en otro punto. Suponemos que la interseque en el punto $C_{o'}$. Unimos el segmento $LC_{o'}$: entonces el segmento $C_lC_{o'}$ es igual al segmento $LC_{o'}$, y el segmento C_gC_l es más largo que el segmento LC_g; pero en realidad es igual a éste, y esto es imposible.

Entonces el segmento AC_g no encuentra la superficie B excepto en el punto C_g.

La luz del Sol se propaga sobre la prolongación del segmento C_gC_w hasta el punto C_w, y sobre el segmento C_gC_w hasta el punto C_g, y sobre el segmento AC_g hasta el punto A. Y así es para todos los puntos supuestos sobre la superficie B excepto la posición de las dos miras y por consiguiente lo que está sobre ellas. Entonces la luz del Sol penetra desde toda la superficie B_j hasta la superficie B, excepto la posición de las dos miras y lo que está sobre ellas, y desde toda la superficie B excepto esa posición hasta el punto A, entonces se incendia en este punto, y esto es lo que queríamos demostrar.

<LA LENTE BICONVEXA>

Si los rayos que salen de un punto sobre la cara del cuerpo luminoso hasta los lados del instrumento no son paralelos a la percepción — y así es para toda la luz que llega desde las posiciones que lo rodean — entonces determinamos una figura que empieza desde el punto B, como hemos descrito antes, y suponemos que sea BM. Suponemos sobre la prolongación del segmento AB los dos puntos N y S, y hacemos la relación del segmento NO con el segmento NS igual a la relación del segmento CI con el segmento CJ, y el segmento SP igual al segmento SO. Delimitamos en el plano ALM una figura que empieza desde el punto S, como hemos descrito antes, y suponemos que sea SU. Suponemos sobre la figura BM el punto M, y unimos los dos segmentos AM y LM. Dividimos el ángulo AML en dos mitades con el segmento MQ: éste es tangente a la figura BM y hacemos que interseque el segmento AP en el punto Q. Hacemos el segmento MR igual al segmento LM, y unimos el segmento LR: que interseque el segmento MQ en el punto X: por lo tanto el ángulo LXQ es recto, entonces el ángulo LQX es agudo. Suponemos sobre la figura SU el punto U, y unimos los dos segmentos NU y PU, y dividimos el ángulo NUP en dos mitades con el segmento UT: éste es tangente a la figura SU: hacemos que interseque el segmento NS en el punto T. Entonces el ángulo PTU es agudo, y el segmento MQ interseca el segmento UT: hacemos que interseque en el punto V. Dado que la figura BM no interseca el segmento QB en ningún punto excepto en B, ni el segmento QV en ningún punto excepto M, entonces intersecará el segmento TV; que lo interseque en el punto W. Puesto que la figura SU no interseca el segmento BT excepto en el punto S, y no interseca el segmento TW excepto en el punto U, entonces intersecará la figura BW y hacemos que la interseque en el punto Z. Fijamos el segmento BS, y hacemos rotar en torno a éste el plano delimitado por las dos figuras BZ y SZ, y el segmento BS hasta que el punto Z describe la circunferencia ZU' y se forma el sólido BZSU'. Entonces modelamos uno igual a éste, de la misma sustancia con la que hemos trabajado, y lo pulimos. Es necesario que su luz[41], cuando penetra desde toda la superficie ZSU' hasta toda la superficie ZBU', y desde toda la superficie ZBU' hasta el punto A, se incendie en este punto. Luego, ponemos el cuerpo luminoso en la posición del punto N.

[41] la luz del sólido: está hablando del cuerpo luminoso.

Yo digo que la luz del cuerpo pasa de toda la superficie ZSU’ hasta toda la superficie ZBU’ y de toda la superficie ZBU’ hasta el punto A, entonces se incendia en este punto.

Demostración: suponemos sobre la superficie ZSU’ un punto: o bien se superpone al punto S o bien no se superpone a éste.

Si el punto supuesto coincide con el punto S, entonces hacemos que el segmento NS interseque el cuerpo luminoso en el punto I’; el segmento AI’ no encuentra la superficie BZSU’ excepto en los dos puntos B y S, luego la luz del punto I’ se propaga sobre el segmento SI’ hasta el punto S, y sobre el segmento BS hasta el punto B, y sobre el segmento AB hasta el punto A.

Si el punto supuesto no coincide con el punto S, entonces hacemos que sea O’; trazamos el plano BSO’; hacemos que éste genere en el sólido ZSU’ la figura B_aSB_b, y en el sólido ZBU’ la figura B_aBB_b. Trazamos el segmento O’B_c paralelo al segmento BS. Puesto que el segmento O’B_c no encuentra el segmento BS y no encuentra la figura SB_a excepto en el punto O’, entonces encontrará la figura BB_a: suponemos que la encuentre en el punto B_c. Unimos el segmento NO’ y hacemos que encuentre el cuerpo luminoso en el punto B_d, y unimos el segmento AB_c; entonces los segmentos O’B_d, O’B_c y AB_c no encuentran la superficie BZSU’ excepto en los dos puntos O’ y B_c. La luz del punto B_d se propaga sobre el segmento O’B_d hasta el punto O’, y sobre el segmento O’B_c hasta el punto B_c, y sobre el segmento AB_c hasta el punto A; y así es para todos los puntos supuestos sobre la superficie ZSU’. Entonces la luz del cuerpo penetra desde toda la superficie ZSU’ hasta toda la superficie ZBU’ hasta el punto A y se incendia en este punto. Y esto es lo que queríamos demostrar.

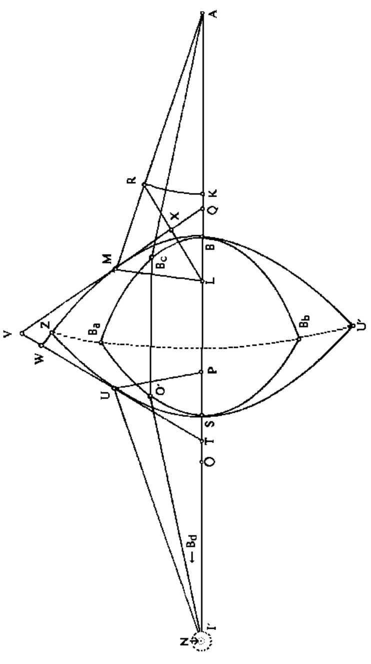

figura 15: véase Rashed, 1993, página 51, figura 22

Hemos llegado al final de la comparación con el manuscrito del que hemos copiado, transmitido por mano de Aḥmad Ibn Aḥmad Ibn Ŷa'far al-Ġundiŷānī. Ha terminado su vocalización[42] 'Alī Ibn Yaḥyā Ibn Muḥammad Ibn Abī al-Šukr al-Magribī en el día 11 de rabī' al-ājir del año 690[43]. Dios bendiga nuestro señor Muḥammad y toda su familia.

3. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AL-KINDĪ,
1997, *Oeuvres Philosophiques Et Scientifiques D'Al-Kindi: L'Optique Et La Catoptrique* (Islamic Philosophy, Theology and Science, Vol 29) by R. Rashed (Editor), Jean Jolivet (Editor), Brill Academic Publishers

ARISTÓFANES,
1999, *Las nubes, Las ranas, Pluto*, edición de Francisco Rodríguez Adrados y Juan Rodríguez Somolinos. Madrid: Cátedra

BERNAL, John D.,
1956, *Storia della scienza.* Roma: Editori Riuniti

BERZOLARI L., VIVANTI G., GIGLI D.,
1964, *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi con estensione alle principali teorie analitiche geometriche e fisiche loro applicazioni e notizie storico-bibliografiche*, volume II, parte 2ª. Milán: Editore Ulrico Hoepli

BOYER, Carl B.,
1980, *Storia della matematica*. Milán: Arnoldo Mondadori Editore

BOYER, Carl B.,
1959, *The rainbow: from myth to mathematics,* New York, 127-129

CROMBIE, A. C.,
1974, *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo/1, siglos V-XIII*. Madrid: Alianza Universidad

DJEBBAR, Ahmed,
2002, *Storia della scienza araba. Il patrimonio intellettuale dell'Islam*. Milán: Raffaello Cortina

1960, *Encyclopédie de l'Islam*, Leiden, París, E.J. Brill- Maisonneuve

DE GALIANA MINGOT, Tomás,
1987, *Diccionario ilustrado de las ciencias*. Buenos Aires: Larousse

---

[42] en árabe *taškīl*: la palabra significa, más en general, "sistemación", pero en este caso, por la referencia al texto, me parece más oportuno "vocalización".

[43] Corresponde al 12 de abril del año 1291 d. C.. Véase Rashed, 1993, p. CXL.

GEYMONAT, Ludovico,
1970, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. Volume 1. Milán: Garzanti

GILLISPIE, Charles Coulston,
1981, *Dictionary of Scientific Biography*. Nueva York: Charles Scribner's Sons (16 vol., 8 tomos)

GRIBBIN, John,
2003, *Historia de la ciencia*; 1543-2001. Barcelona: Crítica

GUIZAL, Brahim y DUDLEY, John,
febrero de 2003 <<Ibn Sahl, descubridor de la ley de la refracción de la luz>>, *Investigación y Ciencia*

HUYGENS, Christiaan,
1962, *Treatise on light,* traducido del francés al inglés por Silvanus P. Thompson, New York: Dover

JIMÉNEZ-LANDI MARTÍNEZ, Pedro,
1985, *Introducción al estudio de los instrumentos ópticos*, Madrid: Editorial de la Universidad Complutense

KNORR, W. R.,
1985, <<Archimedes and the Pseudo-Euclidean 'Catoptrics' : Early Stages in the Ancient Geometric Theory of Mirrors>>, *Arch. Internat. Hist. Sci.* 35: p.96-104

LAPEDES, Daniel N.,
1978, *McGraw-Hill Dictionary of Physics and Mathematics*, Nueva York, Londres: McGraw-Hill

LINDBERG, David C.,
1983, *Studies in the History of Medieval Optics*. Londres: Variorum Reprints

MACH, E.,
1926, *The Principles of Physical Optics: an Historical and Philosophical Treatment*, traducción al inglés por Anderson J. S. Y Young A. F. A.. Londres

MACKAY, Alan L.,
1992, *Diccionario de citas científicas; la cosecha de una mirada serena*. Madrid. Ediciones de la Torre, CSIC

MARTOS QUESADA, Juan
2004, <<La enseñanza de las ciencias en el Islam>>, *Homenaje a Sinesio Gutiérrez Valdeón*, Madrid

MARTOS QUESADA, Juan
2001, <<Los estudios sobre el desarrollo de las matemáticas en al-Andalus: estado actual de la cuestión>>, *Dynamis* XXI: 269-293

MORIN, Ugo,
1959, *Lezioni di geometria*, parte seconda, *curve piane*, terza edizione rifatta a cura di Arno Predonzan, Padua: CEDAM

NASR, Sayyed Hossein,
1979, *Scienza e civiltà nell'Islam*. Milán: Feltrinelli

PEDROTTI, Frank L. & PEDROTTI, Leno S.,
1987, *Introduction to Optics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall

POPPER, Karl R.,
1997, *La lógica de la investigación científica*, Madrid: Editorial Tecnos

RASHED, Roshdi,
2000, *Les catoptriciens grecs*, 4 volúmenes, París: Les Belles Lettres

RASHED, Roshdi,
1993, *Géométrie et dioptrique au* X^{e} *siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, París: Les Belles Lettres

RASHED, Roshdi,
1997, *Histoire de sciences arabes*, 3 volúmenes, París: Seuil

RASHED, Roshdi,
1970, <<Le modèle de la sphère transparente et l'explication de l'arc-en-ciel : Ibn al-Haytham - al-Farisi>>, *Revue d'histoire des sciences* 22: 109-140

RASHED, Roshdi,
1990, <<A Pioneer in Anaclastics, Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses>>, *ISIS*, 81: 464-491

RONCHI, Vasco,
1983, *Storia della luce da Euclide a Einstein*. Roma-Bari: Laterza

SABRA, A. I.,
1967, *Theories of Light from Descartes to Newton*, Londres

SAGAN, Carl,
1987, *Cosmos*. Barcelona: Planeta

SARTON, G.,
1927-1948, *Introduction to the History of Science*. Baltimora

SEZGIN, Fuat,
1978, *Geschichte des arabischen Schriftums*, t. III, *Medizin*, 1970, t. V, *Mathematik*, t. VI, Astronomkie. Leiden: E. J. Brill

TATON, R. (a cargo de)
1957, *Histoire générale des sciences,* I: *La science antique et médievale*. París

TORRES TRIVIÑO, Gregorio, (a cargo de)
1995-1996, *Diccionario enciclopédico de fisica, bajo la dirección de A. Prójorov*, Moscú, MIR; Madrid: Rubiños, D.L

Páginas en red

http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica//applets/Fendt/physesp/refraccion.htm (22.02.2003)

http://www.turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/ (22.08.2003)

http://www.geocities.com/fisicacreativa2/freiicap09.html (14.03.2003)

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/snell/snell.htm (03.04.2003)